गणित

कक्षा ९

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

© सर्वाधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

यस पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी सम्पूर्ण अधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र सानोठिमी, भक्तपुरमा निहित रहेको छ । पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट रेकर्ड गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

प्रथम संस्करण : वि.सं २०७९

परिमार्जित संस्करण : वि.सं. २०८१

पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी पाठकहरूका कुनै पनि प्रकारका सुझावहरू भएमा पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, समन्वय तथा प्रकाशन शाखामा पठाइदिनुहुन अनुरोध छ । पाठकहरूबाट आउने सुझावहरूलाई केन्द्र हार्दिक स्वागत गर्दछ ।

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक, समसामयिक र रोजगारमूलक बनाउन विभिन्न समयमा पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक विकास तथा परिमार्जन कार्यलाई निरन्तरता दिइँदै आएको छ । विद्यार्थीमा ज्ञानको खोजी गरी सिकाइ र वास्तविक जीवनबिच सम्बन्ध स्थापित गर्ने, सिद्धान्त र व्यवहारको समन्वय गर्ने, स्वपरावर्तित हुँदै ज्ञान, सिप र क्षमतालाई अद्यावधिक गर्ने सक्षमताको विकास हुनु आवश्यक छ। विद्यार्थीमा अधिकार, स्वतन्त्रता र समानताको प्रवर्धन गर्ने, स्वस्थ जीवनको अभ्यास गर्ने, तार्किक विश्लेषण गरी निर्णय गर्ने, वैज्ञानिक विश्लेषणका आधारमा व्यक्ति, समाज र राष्ट्रको दिगो विकासमा सरिक हुने सक्षमताको विकास पनि शिक्षाले गर्नुपर्छ। विद्यार्थीमा नैतिक आचरण प्रदर्शन गर्ने, सामाजिक सद्भावप्रति संवेदनशील हुने, पर्यावरणीय सन्तुलनप्रति संवेदनशील हुने, द्वन्द्व व्यवस्थापन गर्दै दिगो शान्तिका लागि प्रतिबद्ध रहने सक्षमताको विकास पनि माध्यमिक तहको शिक्षाबाट अपेक्षित छन् । यस तहको शिक्षाबाट आधुनिक ज्ञान, सिप, सूचना तथा सञ्चार प्रविधिको प्रयोग गर्ने, स्वावलम्बी र व्यवसायमुखी सिपको अभ्यास गर्ने, राष्ट्र, राष्ट्रियता र राष्ट्रिय आदर्शको सम्मान गर्ने, समाज स्वीकार्य आचरण र कार्य संस्कृतिको अवलम्बन गर्ने, सहिष्णु भाव राख्ने सक्षमता भएको नागरिक तयार गर्ने अपेक्षा रहेको छ । त्यस्तै, सिर्जनशील, कल्पनाशील, उद्यमशील एवम् उच्च सोच र आदर्शमा आधारित व्यवहार गर्ने, समसामयिक चुनौतीहरूको सफल व्यवस्थापन गर्नेलगायतका विशेषताले युक्त स्वावलम्बी, देशभक्त, परिवर्तनमुखी, चिन्तनशील एवम् समावेशी समाज निर्माणमा योगदान गर्न सक्ने सक्षमतासहितको नागरिक तयार गर्नु माध्यमिक शिक्षाको लक्ष्य रहेको छ । यही लक्ष्य पूर्तिका लागि विद्यालय शिक्षाको राष्ट्रिय पाठ्यक्रम प्रारूप, २०७६ को मार्गदर्शनअनुरूप विकास भएको माध्यमिक शिक्षा (कक्षा ९-१०) पाठ्यक्रमअनुसार तयार पारिएको कक्षा ९ को गणित विषयको यस पाठ्यपुस्तकलाई देशका विभिन्न विद्यालयमा परीक्षण गरी प्राप्त पृष्ठपोषण समेटी यो नमुना पाठ्यपुस्तक तयार पारिएको हो ।

यस पाठ्यपुस्तकको लेखन तथा परिमार्जन कार्य श्री गणेश सापकोटा, श्री नरहरि आचार्य, श्री शक्तिप्रसाद आचार्य, श्री विनोदप्रसाद पन्त, श्री गोमा श्रेष्ठ, श्री विमलप्रसाद भट्टराई, श्री रामचन्द्र ढकाल र श्री जगन्नाथ अधिकारीबाट भएको हो । पाठ्यपुस्तकलाई यस रूपमा ल्याउने कार्यमा केन्द्रका महानिर्देशक श्री अणप्रसाद न्यौपाने, श्री इम नारायण श्रेष्ठ, प्रा. डा. रामजीप्रसाद पण्डित, श्री केशवराज फुलारा, श्री प्रमिला बखती, डा. श्याम प्रसाद आचार्य, श्री राम हाडा, श्री निर्मला गौतम, श्री सुस्मिता शर्मा, श्री पूर्णबहादुर बरामलगायत सरोकारवालाको विशेष योगदान रहेको छ। यसको भाषा सम्पादन डा. गणेशप्रसाद भट्टराई, चिनाकुमारी निरौला र इन्दु खनालबाट भएको हो। यस पाठ्यपुस्तकको लेआउट डिजाइन श्री जयराम कुइँकेल र श्री नवराज पुरीबाट भएको हो । यस पुस्तकको विकास कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्छ ।

पाठ्यपुस्तकलाई शिक्षणसिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ । यसबाट विद्यार्थीले पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न मदत पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ। यस पाठ्यपुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी, अनुभवकेन्द्रित, उद्देश्यमूलक र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ। सिकाइ र विद्यार्थीको जीवन्त अनुभवबिच तादात्म्य कायम गर्दै यसको सहज प्रयोग गर्न शिक्षकले सहजकर्ता, उत्प्रेरक, प्रवर्धक र खोजकर्ताका रूपमा भूमिकाको अपेक्षा गरिएको छ । पाठ्यपुस्तकलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्छ ।

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि. सं. २०८१

विषयसूची

पाठ	शीर्षक	पृष्ठसङ्ख्या
१	समूह (Sets)	१ – २४
२	कर (Tax)	२५ – ४९
३	कमिसन र लाभांश (Commission and Dividend)	५० – ५९
४	घरायसी अङ्कगणित (Household Arithmetic)	६० – ८७
५	क्षेत्रफल (Area)	८८ – १३०
६	प्रिज्म (Prism)	१३१ – १४६
७	बेलना र गोला (Cylinder and Sphere)	१४७ – १६९
८	अनुक्रम र श्रेणी (Sequence and Series)	१७० – १८३
९	खण्डीकरण (Factorization)	१८४ – १९६
१०	महत्तम समापवर्तक र लघुत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor and Lowest Common Multiple)	१९७ – २१४
११	रेखीय समीकरण (Linear Equation)	२१५ – २३६
१२	घाताङ्क (Indices)	२३७ – २५१
१३	त्रिभुज (Triangle)	२५२ – २७३
१४	चतुर्भुज (Quadrilateral)	२७४ – २८३
१५	रचना (Construction)	२८४ – २९५
१६	वृत्त (Circle)	२९६ – ३०५
१७	तथ्याङ्कको वर्गीकरण र प्रस्तुतीकरण (Classification and Presentation of Data)	३०६ – ३२५
१८	केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापन (Measures of Central Tendency)	३२६ – ३४६
१९	सम्भाव्यता (Probability)	३४७ – ३६३
२०	त्रिकोणमिति (Trigonometry)	३६४ – ३८०

पाठ 1 समूह (Sets)

1.0 पुनरवलोकन (Review)

कक्षा 9 का चार जना विद्यार्थीसँग उनीहरूको खेतबारीमा लगाइएका बालीनालीहरूका बारेमा छलफल गर्दा यसप्रकार जानकारी प्राप्त भयो :

(क) एन्जलको खेतबारीमा लगाएका बाली : धान, गहुँ, कोदो, तोरी, काउली, केराउ, रायो

(ख) बिमलाको खेतबारीमा लगाएका बाली : गहुँ, फापर, तोरी, गोलभेँडा, भन्टा, खुर्सानी, जौ, आलु, सिमी

(ग) पेम्बाको खेतबारीमा लगाएका बाली : फापर, जौ, आलु, सिमी, मकै

(घ) रामविलासको खेतबारीमा लगाएका बाली : गहुँ, तोरी, धान, मकै, केरा, उखु, बन्दा

माथिका जानकारीका आधारमा तलका प्रश्नहरूमा छलफल गरी प्राप्त निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(अ) माथिका प्रत्येक तथ्यहरूलाई जनाउने समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् ।

(आ) एन्जलको खेतबारीमा र पेम्बाको खेतबारीमा लगाइएका बालीका समूहहरू कस्ता समूहहरू होलान् ?

(इ) बिमलाको खेतबारीमा लगाइएका बाली र रामविलासको खेतबारीमा लगाएका बालीका समूहहरू कस्ता समूहहरू होलान् ?

(ई) बिमलाको खेतबारीमा र एन्जलको खेतबारीमा लगाइएका बालीका समूहहरू कस्ता समूहहरू होलान् ?

(उ) रामविलासको खेतबारीका बालीबाट निम्नानुसार उपसमूहहरू निर्माण गर्नुहोस् र कस्ता समूहहरू भए सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् ।

- अन्नबालीको समूह
- फलफूलको समूह
- तरकारीको समूह

1.1 समूहका क्रियाहरू (Operation of sets)

क्रियाकलाप 1

दुई दुई जनाको समूहमा प्रत्येकले विभिन्न रङका फूलहरू सङ्कलन गर्नुहोस् र जम्मा गरेका फूलका रङअनुसार समूहहरू निर्माण गर्नुहोस्, जस्तै :

सुप्रियाले जम्मा गरेका फूलका रङहरूको समूह (S) = {रातो, पहेँलो, निलो, गुलाफी }

एन्जिलाले जम्मा गरेका फूलका रङहरूको समूह (A) = {पहेँलो, सेतो, निलो, प्याजी, सुन्तला, रातो}

माथिका समूहहरूका आधारमा तलका समूहहरू निर्माण गर्नुहोस् :

(क) सुप्रिया अथवा, एन्जिला वा दुवैले सङ्कलन गरेका फूलका रङहरूको समूह

(ख) सुप्रिया र एन्जिला दुवैले सङ्कलन गरेका फूलका साझा रङहरूको समूह

(ग) एन्जिलाले मात्र सङ्कलन गरेका फूलका रङहरूको समूह

(घ) सुप्रियाले सङ्कलन गरेका फूलका रङ्हरू बाहेकका रङहरूको समूह ।

यसरी निर्माण गरिएका समूहहरू कस्ता समूहहरू होलान् ?

1.1.1 **समूहहरूको संयोजन** (Union of sets)

माथिका समूहहरूमा,

सुप्रियाले जम्मा गरेका फूलका रङहरूको समूह (S)

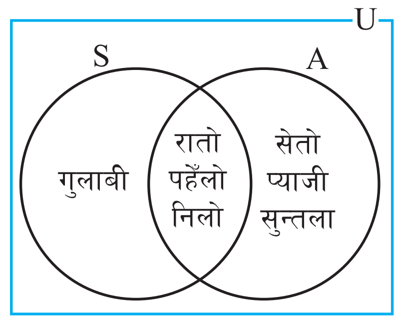
= {रातो, पहेँलो, निलो, गुलाफी}

एन्जिलाले जम्मा गरेका फूलका रङहरूको समूह (A)

= {पहेँलो, सेतो, निलो, प्याजी, सुन्तला, रातो}

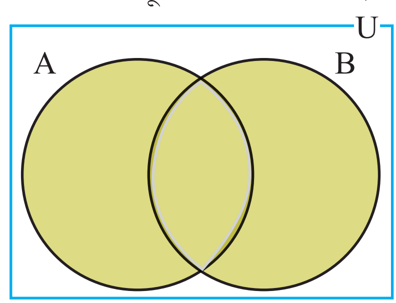
दुबैले अलग अलग जम्मा गरेका फूलहरूलाई एकै ठाउँमा मिसाउँदा जम्मा भएका फूलका रङहरूको समूह

= {रातो, पहेँलो, निलो, गुलाफी, सेतो, प्याजी, सुन्तला}



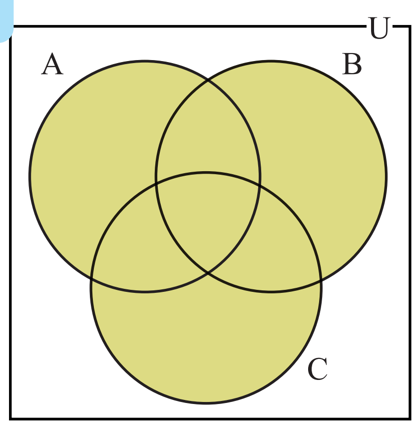
यसरी बनेको समूहलाई दुबैले अलग अलग सङ्कलन गरेका फूलका रङहरूको समूहको संयोजन भनिन्छ ।

समूहहरू A र B सर्वव्यापक समूह U का उपसमूह हुन् भने समूहहरू A र B को संयोजन लाई $A \cup B$ ले जनाइन्छ । $A \cup B$ लाई A संयोजन B (A union B) भनेर पढिन्छ । $A \cup B$ मा समूह A मा पर्ने वा समूह B मा पर्ने सदस्यहरू पर्छन् । समूह निर्माण विधिअनुसार, $A \cup B = \{x : x \in A$ वा $x \in B\}$ लेखिन्छ । दिइएको भेन चित्रमा छाया पारिएको भागले समूह $(A \cup B)$ लाई जनाउँछ ।



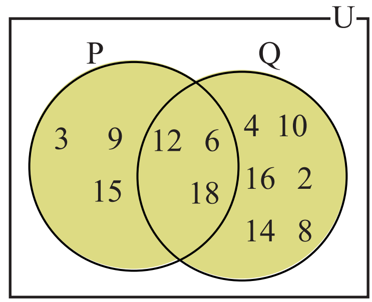
त्यसैगरी $(A \cup B \cup C) = \{x : x \in A$ वा $x \in B$ वा $x \in C\}$ लेखिन्छ । दिइएको भेन चित्रमा छाया पारिएको भागले $(A \cup B \cup C)$ लाई जनाउँछ ।

समूहहरूको संयोजन गर्दा दिइएका समूहका साझा सदस्यहरूलाई नदोहोऱ्याइकन बाँकी सबै सदस्यहरूलाई लिएर समूहको रूपमा लेख्नुपर्छ ।



उदाहरण 1

यदि P = {20 भन्दा साना 3 का अपवर्त्यहरू} र Q = {20 भन्दा साना 2 का अपवर्त्यहरू} हुन् भने P ∪ Q पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



समाधान

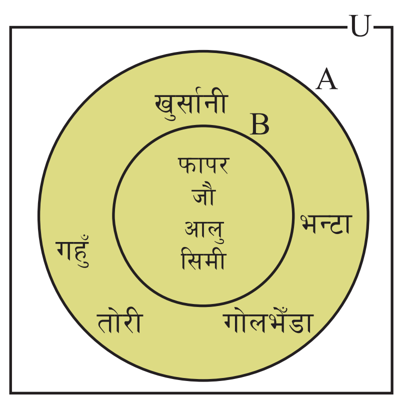
यहाँ, P = {20 भन्दा साना 3 का अपवर्त्यहरू}
= {3, 6, 9, 12, 15, 18}
Q = {20 भन्दा साना 2 का अपवर्त्यहरू}
= {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}

अब, P ∪ Q
= {3, 6, 9, 12, 15, 18} ∪ {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}
= {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18}
भेनचित्रमा छाया पारेको भागले P ∪ Q लाई जनाउँछ ।

उदाहरण 2

यदि A = {गहुँ, फापर, तोरी, गोलभेँडा, भन्टा, खुर्सानी, जौ, आलु, सिमी} र B = {फापर, जौ, आलु, सिमी} छन् भने, A ∪ B पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान



यहाँ, A = {गहुँ, फापर, तोरी, गोलभेँडा, भन्टा, खुर्सानी, जौ, आलु, सिमी}
B = {फापर, जौ, आलु, सिमी}

अब, A ∪ B
= {गहुँ, फापर, तोरी, गोलभेँडा, भन्टा, खुर्सानी, जौ, आलु, सिमी} ∪ {फापर, जौ, आलु, सिमी}
= {गहुँ, फापर, तोरी, गोलभेँडा, भन्टा, खुर्सानी, जौ, आलु, सिमी} = A

सँगैको भेनचित्रमा छाया पारेको भागले A ∪ B लाई जनाउँछ ।

क्रियाकलाप 2

यदि दुईओटा समूहहरू आपसमा अलग्गिएका छन् भने त्यो अवस्थामा तिनीहरूको संयोजन के होला ? आपसमा छलफल गरी भेनचित्रसमेत बनाएर प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

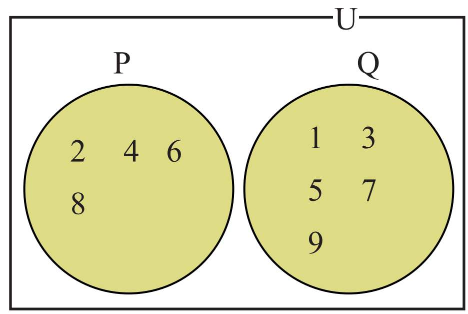
नोटः दुई समूहमध्ये एउटा समूह अर्को समूहको उपसमूह छ भने तिनीहरूको संयोजन ठुलो समूह नै हुन्छ । यदि दुईओटा समूह आपसमा अलग्गिएका छन् भने तिनीहरूको संयोजन ती समूहका सबै सदस्यहरू मिलेर बनेको समूह हुन्छ ।

उदाहरण 3

यदि P = {10 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरू} र Q = {10 भन्दा साना बिजोर सङ्ख्याहरू} भए, $P \cup Q$ पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, P = {10 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरू}
= {2, 4, 6, 8}
Q = {10 भन्दा साना बिजोर सङ्ख्याहरू}
= {1, 3, 5, 7, 9}
$P \cup Q$ = {2, 4, 6, 8} $\cup$ {1, 3, 5, 7, 9}
= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}



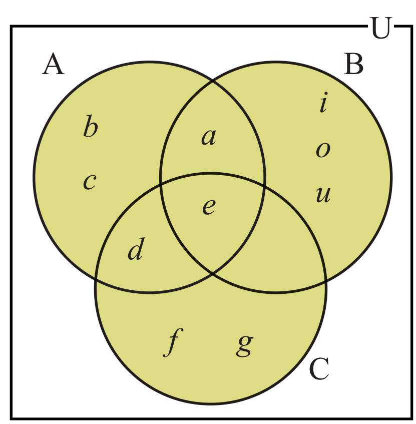
नोट : भेनचित्रमा छाया पारेको भागले $P \cup Q$ लाई जनाउँछ ।

उदाहरण 4

यदि A = {a, b, c, d, e}, B = {a, e, i, o, u}, C = {d, e, f, g} भए, $A \cup B \cup C$ पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A = {a, b, c, d, e}, B = {a, e, i, o, u},
C = {d, e, f, g}
अब, $(A \cup B \cup C)$
= {a, b, c, d, e} $\cup$ {a, e, i, o, u} $\cup$ {d, e, f, g}
$\therefore (A \cup B \cup C)$ = {$a, b, c, d, e, f, g, i, o, u$}



सँगैको भेनचित्रमा छाया पारेको भागले $(A \cup B \cup C)$ लाई जनाउँछ ।

1.1.2 समूहहरूको प्रतिच्छेदन (Intersection of sets)

कक्षा 9 का विद्यार्थीमध्ये विज्ञान मन पराउने र गणित मन पराउने विद्यार्थीहरू निम्नानुसार रहेछन् :

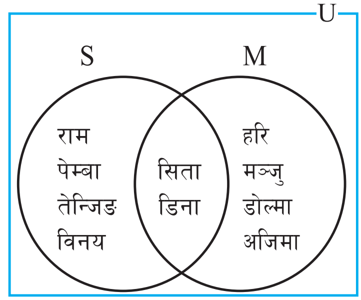
विज्ञान मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह (S)

= {राम, सीता, पेम्बा, तेन्जिङ, डीना, विनय}

गणित मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह (M)

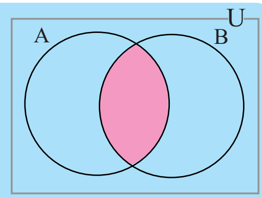
= {हरि, सीता, मञ्जु, डोल्मा, डीना, अजिमा}

माथिका समूहलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,

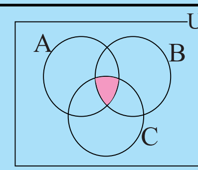


सँगैको भेनचित्रमा, विज्ञान र गणित दुवै मन पराउने विद्यार्थीको समूह {सीता, डीना} हो । यो नै विज्ञान मन पराउने र गणित मन पराउने विद्यार्थीका समूहहरूको प्रतिच्छेदन (Intersection of sets) हो ।

यदि A र B दुबै खाली समूहहरू होइनन् भने A र B दुवै समूहका साझा सदस्यहरूबाट बनेको समूहलाई समूह A र B को प्रतिच्छेदन भनिन्छ, यसलाई $A \cap B$ ले जनाइन्छ । $A \cap B$ लाई A प्रतिच्छेदन B (A Intersection B) भनेर पढिन्छ । समूह निर्माण विधिअनुसार, $A \cap B = \{x : x \in A$ र $x \in B\}$ लेखिन्छ । यसलाई भेनचित्रको प्रयोग गरी निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ । सँगैको भेनचित्रमा छाया पारेको भागले समूह A र B को प्रतिच्छेदनलाई जनाउँछ ।



त्यसैगरी $(A \cap B \cap C) = \{x : x \in A$ र $x \in B$ र $x \in C\}$ लेखिन्छ । दिइएको भेनचित्रमा छाया पारिएको भागले $(A \cap B \cap C)$ लाई जनाउँछ ।



उदाहरण 5

यदि P = {20 भन्दा साना 3 का अपवर्त्यहरू} र Q = {20 भन्दा साना 2 का अपवर्त्यहरूका समूह} हुन् भने समूह $P \cap Q$ पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

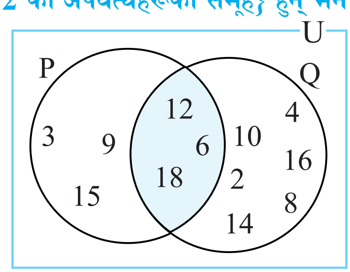
समाधान

यहाँ, P = {20भन्दा साना 3 का अपवर्त्यहरू}

= {3, 6, 9, 12, 15, 18}

Q = {20भन्दा साना 2 का अपवर्त्यहरू}

= {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}



अब, $P \cap Q$

= {3, 6, 9, 12, 15, 18} ∩ {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18} = {6, 12, 18}

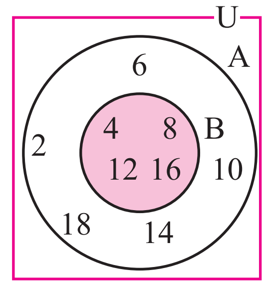
सँगैको भेनचित्रमा छाया पारेको भागले $P \cap Q$ लाई जनाउँछ ।

उदाहरण 6

यदि A = {20 भन्दा साना 2 का अपवर्त्यहरू} र B = {20 भन्दा साना 4 का अपवर्त्यहरू} हुन् भने A ∩ B पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A = {20 भन्दा साना 2 का अपवर्त्यहरू}
= {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}
B = {20 भन्दा साना 4 का अपवर्त्यहरू} = {4, 8, 12, 16}
अब, A ∩ B = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18} ∩ {4, 8, 12, 16}
= {4, 8, 12, 16}
भेनचित्रमा छाया पारेको भागले A ∩ B लाई जनाउँछ ।



दुई समूहमध्ये एउटा समूह अर्को समूहको उपसमूह छ भने तिनीहरूको प्रतिच्छेदन उपसमूह नै हुन्छ ।

क्रियाकलाप 3

यदि दुईओटा समूहहरू आपसमा अलग्गिएका छन् भने त्यो अवस्थामा तिनीहरूको प्रतिच्छेदन के होला ? आपसमा छलफल गरी प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

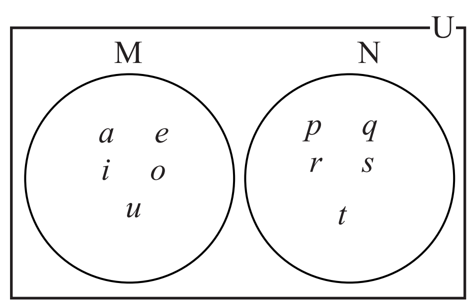
यदि दुईओटा समूहहरू आपसमा अलग्गिएका छन् भने तिनीहरूका प्रतिच्छेदन खाली समूह हुन्छ ।

उदाहरण 7

यदि M = {*a, e, i, o, u*} र N = {*p, q, r, s, t*} छन् भने M ∩ N पत्ता लगाई भेनचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ M = {*a, e, i, o, u*}, N = {*p, q, r, s, t*}
M ∩ N = {*a, e, i, o, u*} ∩ {*p, q, r, s, t*}
∴ M ∩ N = { } वा ϕ

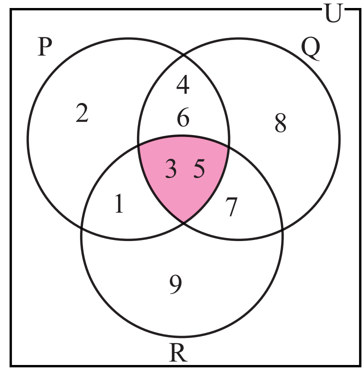


साझा सदस्य नभएकाले भेनचित्रमा देखाउँदा कुनै पनि समूहमा छाया पारिँदैन ।

उदाहरण 8

यदि $P=\{1,2,3,4,5,6\}$, $Q=\{3,4,5,6,7,8\}$ र $R=\{1,3,5,7,9\}$ छ भने $P \cap Q \cap R$ पत्ता लगाई भेनचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान



यहाँ $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$Q = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$R = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

अब $P \cap Q \cap R$

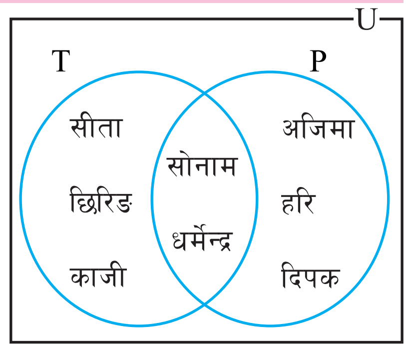
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$= \{3, 5\}$

$\therefore P \cap Q \cap R = \{3, 5\}$

1.1.3 समूहहरूको फरक (Difference of sets)

क्रियाकलाप 4



दिइएको भेनचित्र अध्ययन गर्नुहोस् । टेलिभिजन हेर्न मन पराउने विद्यार्थीको समूह (T) = {सीता, छिरिङ, काजी, सोनाम, धर्मेन्द्र},

पत्रिका पढ्न मन पराउने विद्यार्थीको समूह (P) = {अजिमा, हरि, दिपक, सोनाम, धर्मेन्द्र}

टेलिभिजन मात्रै हेर्न मन पराउने विद्यार्थीको समूह र पत्रिका मात्र पढ्न मन पराउने विद्यार्थीको समूह लेख्नुहोस् ।

यहाँ, पत्रिका मात्र पढ्न मन पराउनेले टेलिभिजन हेर्न मन पराउँदैनन् । तसर्थ यसलाई पत्रिका पढ्न र टेलिभिजन हेर्न मन पराउने समूहको फरक भनिन्छ ।

त्यस्तै, टेलिभिजन हेर्नमात्र मन पराउनेले पत्रिका पढ्न मन पराउँदैनन् । तसर्थ यसलाई टेलिभिजन हेर्न र पत्रिका पढ्न मन पराउने समूहको फरक भनिन्छ ।

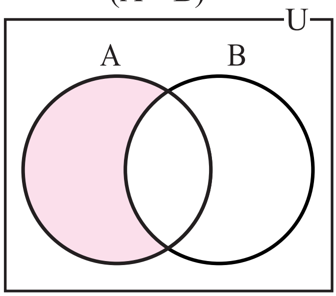
समूह A र समूह B सर्वव्यापक समूह U का उपसमूहहरू हुन् । समूह A मा पर्ने तर समूह B मा नपर्ने समूह A का बाँकी सदस्यहरूको समूहलाई A र B को फरक (A difference B) भनिन्छ, यसलाई $A - B$ लेखिन्छ र पढ्दा A र B को फरक अथवा, A difference B भनेर पढिन्छ । यसरी नै समूह B मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको समूहलाई B र A को फरक अथवा, B difference A भनिन्छ । यसलाई $B - A$ लेखिन्छ र पढ्दा B र A को फरक अथवा, B difference A भनेर पढिन्छ । समूह निर्माण विधि (Set builder method) अनुसार,

$A - B = \{x : x \in A$ र $x \notin B\}$ र $B - A = \{x : x \in B$ र $x \notin A\}$ लेखिन्छ ।

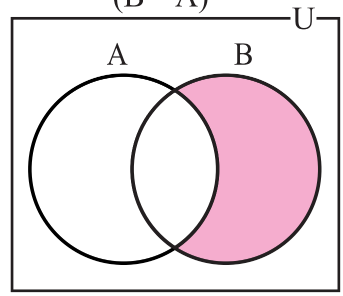
भेनचित्रमा A फरक B र B फरक A

(क) यदि समूह A र समूह B खप्टिएका समूह हुन् भने,

(A – B)

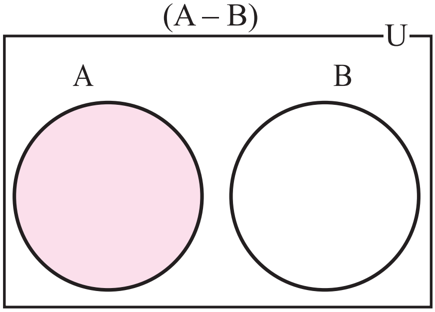


(B – A)

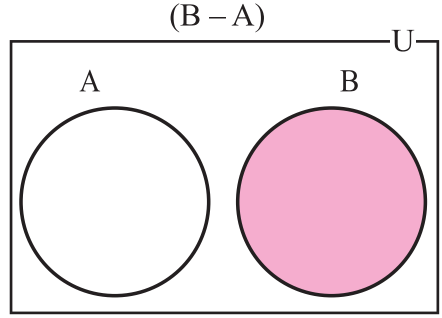


(ख) यदि समूह A र समूह B अलग्गिएका समूह हुन् भने,

(A – B)

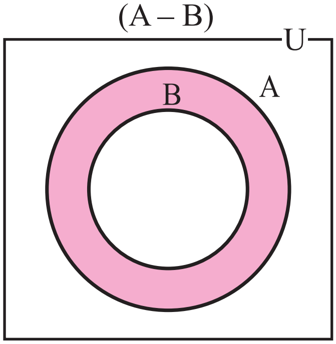


(B – A)



(ग) यदि समूह B समूह A को एउटा उपयुक्त उपसमूह हो भने,

(A – B)



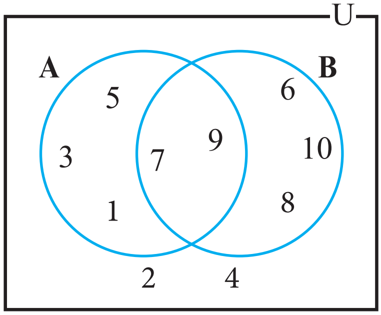
- यदि समूह A र समूह B बराबर समूह हुन् भने, $A - B = B - A = \phi$
- यदि समूह A बाट खाली समूहको फरक निकाल्ने हो भने, $A - \phi = A$
- यदि खाली समूहबाट समूह A को फरक निकाल्ने हो भने, $\phi - A = \phi$
- यदि समूह A समूह B को उपसमूह हो भने, $A - B = \phi$

नोट : (A – B) र (B – A) को संयोजनलाई सममितीय फरक (Symmetric diference) भनिन्छ । यसलाई $A \Delta B$ ले जनाइन्छ । $(A \Delta B)$ लाई A र B को सममितीय फरक (A symmetric difference B) भनेर पढिन्छ । $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ लेखिन्छ ।

उदाहरण 9

दिइएको भेनचित्रबाट निम्नलिखित समूहहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् :

(क) A (ख) B (ग) A – B (घ) B – A



समाधान

यहाँ,

(क) A = {1, 3, 5, 7, 9}

(ख) B = {6, 7, 8, 9, 10}

(ग) A – B = {1, 3, 5}

(घ) B – A = {6, 8, 10}

उदाहरण 10

यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 2, 3, 4, 5} र B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} भए A – B र B – A पत्ता लगाई भेनचित्रमा छाया पारेर प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A – B

= {1, 2, 3, 4, 5}– {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

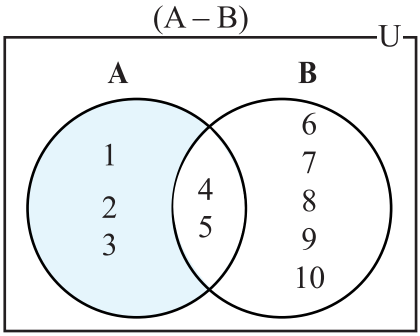
= {1, 2, 3} र

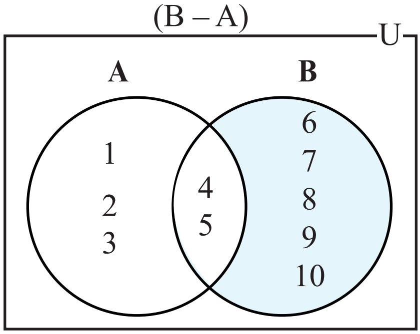
B – A

= {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} – {1, 2, 3, 4, 5}

= {6, 7, 8, 9, 10}

सँगैको भेनचित्रमा A – B र B – A लाई छाया पारेर देखाइएको छ ।





उदाहरण 11

यदि $U = \{x : x \leq 30$, x ले प्राकृतिक सङ्ख्या जनाउँछ$\}$,

A = {x : x ले 15 भन्दा ठुलो र 30 भन्दा सानो एउटा प्राकृतिक सङ्ख्या जनाउँछ} र

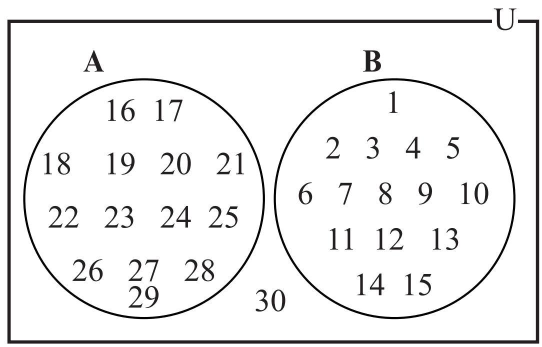
B = {x : x ले 1 देखि 15 सम्मको एउटा प्राकृतिक सङ्ख्या जनाउँछ} भने, A – B र B – A पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, U = {1, 2, 3, 4, ..., 28, 29, 30}

A = {16, 17, 18, ..., 27, 28, 29} र

B = {1, 2, 3, 4, ..., 13, 14, 15}



तसर्थ,

A – B = {16, 17, 18, ..., 27, 28, 29} – {1, 2, 3, 4, ..., 13, 14, 15}

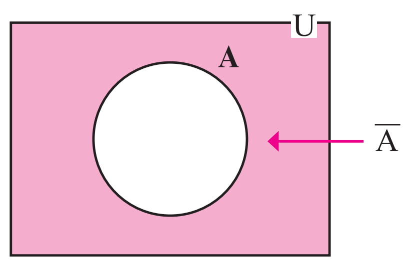
= {16, 17, 18, ..., 27, 28, 29} = A र

B – A = {1, 2, 3, 4, ..., 13, 14, 15} – {16, 17, 18, ..., 27, 28, 29}

= {1, 2, 3, 4, ..., 13, 14, 15} = B

यदि A र B अलग्गिएका (Disjoint) समूहहरू भएमा A – B = A र B – A = B नै हुन्छ ।

1.1.4 **समूहको पुरक** (Complement of a set)



मानौँ, समूह A कुनै सर्वव्यापक समूह U को उपसमूह हो । जहाँ समूह A माभन्दा समूह U मा A का सबै सदस्यहरूसहित केही थप सदस्यहरू हुन्छन् । यस्ता सर्वव्यापक समूह U मा मात्र हुने तर समूह A मा नहुने सदस्यहरूको समूहलाई समूह A को पूरक समूह (Complement of set A) भनिन्छ । यसलाई A' अथवा, $\overline{A}$ अथवा, A^c द्वारा जनाइन्छ ।

अर्को शब्दमा कुनै सर्वव्यापक समूह U र त्यसको उपसमूह A को फरक (Difference) लाई त्यो उपसमूह A को पूरक भनिन्छ । यसलाई सङ्केतमा $\overline{A} = U - A$ लेखिन्छ ।

समूह निर्माण विधिअनुसार,

$\overline{A} = \{x : x \in U$ तर $x \notin A\}$ लेखिन्छ ।

$\overline{A}$ लाई भेनचित्रमा देखाउँदा सँगैको चित्रमा जस्तै छाया पारेर देखाउन सकिन्छ ।

A र $\overline{A}$ को संयोजन U हुन्छ । अतः A र $\overline{A}$ लाई एकअर्काका पूरक भनिन्छ ।
$A \cup \overline{A} = U$ र $\overline{\overline{A}} = A$ हुन्छ ।

$A \cap \overline{A}$ के होला ? समूहमा छलफल गरी लेख्नुहोस् :

उदाहरण 12

यदि $U = \{1, 2, 3, ..., 18, 19, 20\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ र $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ भए निम्नलिखित समूहहरूका सदस्यहरूको सूची तयार पार्नुहोस् ।

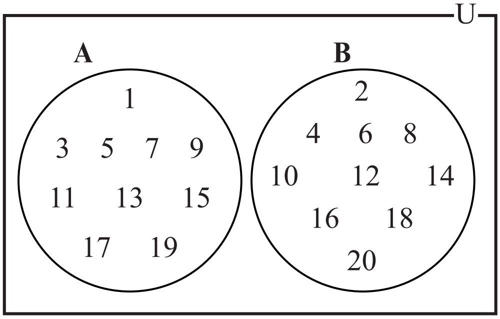
(क) $\overline{A}$ (ख) $\overline{B}$ (ग) $\overline{A} \cup \overline{B}$ (घ) $\overline{A} \cap \overline{B}$

समाधान

यहाँ, $U = \{1, 2, 3, ..., 18, 19, 20\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$



(क) $\overline{A} = U - A$

$= \{1, 2, 3, ..., 18, 19, 20\} - \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

(ख) $\overline{B} = U - B$

$= \{1, 2, 3, ... ,18, 19, 20\} - \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

(ग) $\overline{A} \cup \overline{B}$

$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$= \{1, 2, 3, 4, ..., 18, 19, 20\}$

(घ) $\overline{A} \cap \overline{B}$

$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$= \{\ \}$

उदाहरण 13

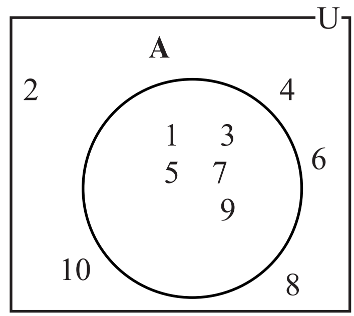
यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} र A = {1, 3, 5, 7, 9} भए निम्नलिखित समूहहरूका सदस्यहरू सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् :

(क) $\overline{A}$ (ख) $A \cup \overline{A}$ (ग) $A \cap \overline{A}$ (घ) $\overline{\overline{A}}$

समाधान

यहाँ, U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} र

A = {1, 3, 5, 7, 9}



(क) $\overline{A} = U - A$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$= \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(ख) $A \cup \overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = U$

(ग) $A \cap \overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \phi$

(घ) $\overline{\overline{A}} = U - \overline{A}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$

उदाहरण 14

यदि U = {*a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k*}, A = {*a, b, c, d, i, j*}, B = {*c, d, e, f, g, h, i*} र C = {*d, e, f, g, h, i, j, k*} भए निम्नलिखित सदस्यहरूको सूची तयार पार्नुहोस् :

(क) $\overline{(A \cup B) \cap C}$ (ख) $\overline{A} \cup \overline{B}$ (ग) $A \cap \overline{B}$

(घ) $(A \cap \overline{C}) \cup \overline{A}$ (ङ) $(\overline{A} \cap C) \cup \overline{B}$

समाधान

(क) $\overline{(A \cup B) \cap C}$

$(A \cup B) = \{a, b, c, d, i, j\} \cup \{c, d, e, f, g, h, i\}$

$= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

$(A \cup B) \cap C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} \cap \{d, e, f, g, h, i, j, k\}$

$= \{d, e, f, g, h, i, j\}$

फेरि, $\overline{(A \cup B) \cap C}$

$= U - \{(A \cup B) \cap C\}$

$= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\} - \{d, e, f, g, h, i, j\}$

$= \{a, b, c, k\}$

(ख) $\overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A} = U - A$

$= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\} - \{a, b, c, d, i, j\}$

$= \{e, f, g, h, k\}$

$\overline{B} = U - B$

$= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\} - \{c, d, e, f, g, h, i\}$

$= \{a, b, j, k\}$

फेरि, $\overline{A} \cup \overline{B}$

$= \{e, f, g, h, k\} \cup \{a, b, j, k\}$

$= \{a, b, e, f, g, h, j, k\}$

(ग) $A \cap \overline{B}$

$= \{a, b, c, d, i, j\} \cap \{a, b, j, k\}$

$= \{a, b, j\}$

(घ) $\overline{C} = U - C$

$= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\} - \{d, e, f, g, h, i, j, k\}$

$= \{a, b, c\}$

अब, $A \cap \overline{C}$

$= \{a, b, c, d, i, j\} \cap \{a, b, c\}$

$= \{a, b, c\}$

फेरि, $(A \cap \overline{C}) \cup \overline{A}$

$= \{a, b, c\} \cup \{e, f, g, h, k\}$

$= \{a, b, c, e, f, g, h, k\}$

(ङ) $(\overline{A} \cap C)$

$= \{e, f, g, h, k\} \cap \{d, e, f, g, h, i, j, k\}$

$= \{e, f, g, h, k\}$

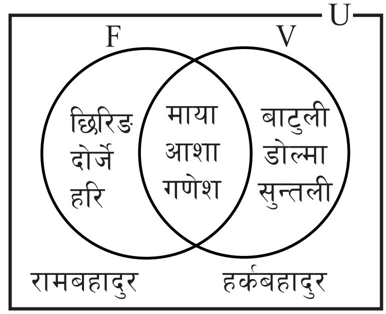
$(\overline{A} \cap C) \cup \overline{B}$

$= \{e, f, g, h, k\} \cup \{a, b, j, k\}$

$= \{a, b, e, f, g, h, j, k\}$

अभ्यास 1

1. दिइएको भेनचित्रमा F ले फुटबल मन पराउने र V ले भलिबल मन पराउने विद्यार्थीको समूह जनाउँछ । भेनचित्रको अध्ययन गरी निम्नानुसारका समूहहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् :



(क) F (ख) V (ग) $F \cup V$ (घ) $F \cap V$ (ङ) U

2. यदि U = {*a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k*}, A = {*a, c, e, f, g, i, k*} र B = {*b, d, i, j, k, h*} भए निम्न समूहका सदस्यहरू पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) $(A \cap B)$ (ख) $(B \cup A)$ (ग) $A - B$ (घ) $B - A$

3. यदि U = {*x* : *x* ले 1 देखि 30 सम्मका पूर्ण सङ्ख्या जनाउँछ}, A = {*x* : *x* ले 1 देखि 30 सम्मका 3 का अपवर्त्य जनाउँछ } र B = {*x* : *x* ले 1 देखि 30 सम्मका 4 का अपवर्त्य जनाउँछ} र C = {*x* : *x* ले 1 देखि 30 सम्मका 5 का अपवर्त्य जनाउँछ} भने निम्नलिखित समूहहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् र भेनचित्रमा देखाउनुहोस् :

(क) $(A - B)$ (ख) $(B - A)$ (ग) $(A - C)$ (घ) $(B - C)$
(ङ) $(A \cup B)$ (च) $A \cup B \cup C$ (छ) $A \cap B \cap C$ (ज) $(\overline{B \cup C})$

4. यदि U = {*a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k* }, A = { *a, c, d, f* }, B = { *g, h, i*} भए,

(क) निम्न समूहहरू निर्माण गर्नुहोस् :

(अ) $\overline{A}$ (आ) $\overline{B}$ (इ) $\overline{A} \cup \overline{B}$
(ई) $\overline{A} \cap \overline{B}$ (उ) $\overline{A \cup B}$ (ऊ) $(\overline{A \cap B})$

(ख) प्रश्न न. (क) मा बनाइएका समूहहरू कुन कुन बराबर समूहहरू हुन्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. यदि U = {1 देखि 12 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह}, E = {1 देखि 12 सम्मका जोर सङ्ख्याहरूको समूह}, O = {1 देखि 12 सम्मका बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह} र P = {1 देखि 12 सम्मका रूढ सङ्ख्याहरूको समूह} भए, निम्नलिखित समूहहरू पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

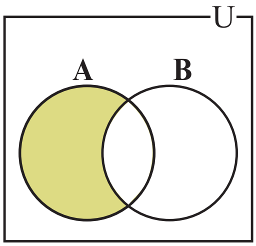
(क) $\overline{E}$ (ख) $\overline{O}$ (ग) $\overline{P}$ (घ) $(\overline{E \cup P})$
(ङ) $\overline{P \cap O}$ (च) $\overline{P - O}$ (छ) $P \cap E$ (ज) $(\overline{E \cup O \cup P})$
(झ) $(\overline{E \cap O \cap P})$ (ञ) $(\overline{E \cup P}) - (P \cap O)$ (ट) $\overline{P} \cup (E \cap O)$

6. यदि U = {*m, n, o, p, q, r, s, t, u, v*}, A = {*q, r, s, t, u, v*}, B = {*n, o, p, q, r*} र C = {*m, u, s, t, q, r*} भए, निम्न सम्बन्धहरूको समूह पत्ता लगाई भेनचित्रमा देखाउनुहोस् :

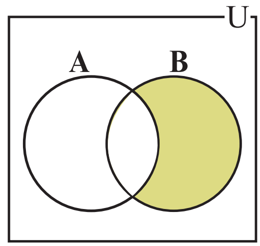
(क) $(A \cap B)$ (ख) $(A \cup B) \cap C$ (ग) $(A \cup B \cup C)$ (घ) $(A \cap B \cap C)$
(ङ) $(A - B)$ (च) $(\overline{A \cup B \cup C})$ (छ) $\overline{A \cap B}$ (ज) $\overline{A}$ (झ) $(A \cap C) \cup B$

7. तलका भेनचित्रहरूमा छाया पारिएको भागले कुन समूह जनाउँछ, सङ्केतमा उत्तर लेख्नुहोस् :

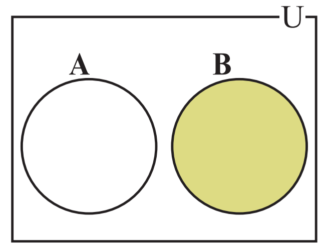
(क)



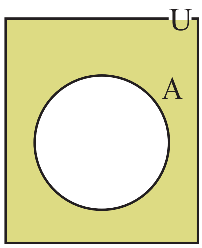
(ख)



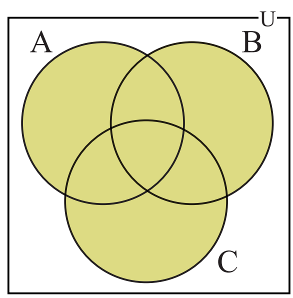
(ग)



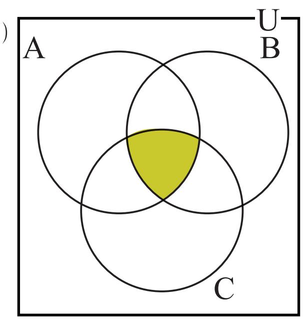
(घ)



(ङ)



(च)



8. यदि P र Q सर्वव्यापक समूह U का प्रतिच्छेदित उपसमूहहरू भए निम्नलिखित समूहहरूलाई भेनचित्रमा देखाउनुहोस् :

(क) $P - Q$ (ख) $Q - P$ (ग) $(P - Q) \cup P$ (घ) $P \cap (Q - P)$

9. कुनै एउटा सर्वव्यापक समूह U र त्यसका दुईओटा उपसमूहहरू X र Y बनाउनुहोस् । त्यसपछि निम्नलिखित समूहहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् :

(क) $(\overline{X} \cup \overline{Y})$ (ख) $(X \cap \overline{Y})$ (ग) $\overline{\overline{X}}$ (घ) $\overline{X} \cap \overline{Y}$

10. तपाईँ पढ्ने कक्षामा भएका विद्यार्थीबाट निम्नलिखित समूहहरू बनाउनुहोस् :

(क) सबै विद्यार्थीको समूह

(ख) छात्रहरूको समूह

(ग) छात्राहरूको समूह

यी समूहहरूमध्ये कुन समूह सर्वव्यापक समूह र कुन कुन समूहहरू यसका उपसमूह हुन् ? उपयुक्त सङ्केतसहित लेख्नुहोस् । त्यसपछि यी सबै समूहका पूरक समूहहरू निकाल्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) {छिरिङ, दोर्जे, हरि, माया, आशा, गणेश}

(ख) {बाटुली, डोल्मा, सुन्तली, माया, आशा, गणेश}

(ग) {छिरिङ, दोर्जे, हरि, बाटुली, डोल्मा, सुन्तली, माया, आशा, गणेश}

(घ) {माया, आशा, गणेश }

(ङ) {छिरिङ, दोर्जे, हरि, बाटुली, डोल्मा, सुन्तली, माया, आशा, गणेश, रामबहादुर, हर्कबहादुर}

2. (क) $\{i, k\}$ (ख) U ग) $\{a, c, e, f, g\}$ (घ) $\{b, d, j, h\}$

3. (क) {3, 6, 9, 15, 18, 21, 27, 30} (ख) {4, 8, 12, 16, 20, 28}

(ङ) {3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30}, भेनचित्रहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

(च) {3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30}

(छ) { }

(ज) {1, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 26, 27, 29}

4. (क) (अ) $\{ b, e, g, h, i, j, k \}$ (आ) $\{a, b, c, d, e, f, j, k \}$

(इ) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k \}$ (ई) $\{b, e, j, k\}$

(उ) $\{b, e, j, k\}$ (ऊ) U

(ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5. (क) {1, 3, 5, 7, 9, 11} (ख) {2, 4, 6, 8, 10, 12}

(ग) {1, 4, 6, 8, 9, 10, 12} (घ) {1, 9} (ङ) {1, 2, 4, 6, 8, 9, 12}

(च) {1,3,4,5,6,7,8,10,11,12} (छ) {2} (ज) ϕ or {}

(झ) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} (ञ) {1, 9} (ट) {1, 4, 6, 8, 9, 10, 12}

6. (क) $\{q, r\}$ (ख) $\{u, s, t, q, r\}$ (ग) $\{m, n, o, p, q, r, s, t, u, v\}$

(घ) $\{q, r\}$ (ङ) {u, s, t, q, r} (च) { } (छ) $\{m, n, o, p, s, t, u, v \}$

(ज) $\{m, n, o, p\}$ (झ) $\{q, r, s, t, u, n, o, p\}$

7. (क) $(A - B)$ (ख) $(B - A)$ (ग) $\overline{B}$ वा $B - A$

(घ) $\overline{A}$ वा $U - A$ (ङ) $(A \cup B \cup C)$ (च) $(A \cap B \cap C)$

8 - 10 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

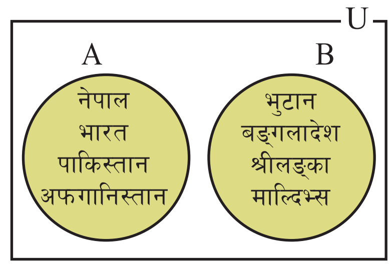
1.2 **समूहको गणनात्मकता** (Cardinality of sets)

कुनै पनि समूहमा भएका जम्मा सदस्यहरूको सङ्ख्यालाई नै त्यस समूहको गणनात्मकता (Cardinality of set) भनिन्छ । जस्तै समूह $A = \{m, a, t, h\}$ मा जम्मा सदस्य सङ्ख्या 4 छ, त्यसैले समूह A को गणनात्मकता 4 हो । यसलाई सङ्केतमा $n(A) = 4$ लेखिन्छ । n(A) लाई समूह A को गणनात्मकता (Cardinal number of set A) भनेर पढिन्छ ।

यदि कुनै समूह खाली समूह हो भने उक्त समूहको गणनात्मकता 0 (शून्य) हुन्छ ।

जस्तै : B = {9 कक्षामा अध्ययन गर्ने 1 वर्षभन्दा कम उमेरका विद्यार्थीहरूको समूह} । यस समूहमा एक जना पनि सदस्य नहुने वा सदस्यको सङ्ख्या शून्य हुने भएकाले $n(B) = 0$ लेखिन्छ ।

क्रियाकलाप 1



(क) यदि,

U = {सार्क राष्ट्रहरूको समूह}

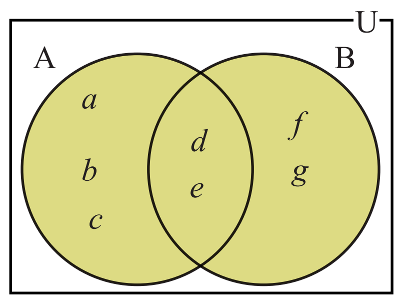
A = {नेपाल, भारत, पाकिस्तान, अफगानिस्तान}

B = {भुटान, बङ्गलादेश, श्रीलङ्का, माल्दिभ्स} भए,

$n(A \cup B)$ कति हुन्छ ?

यहाँ समूह A र B मा साझा सदस्य नभएकोले यी अलग्गिएका समूहमा $n(A \cup B) = 8$ भयो ।

फेरि $n(A) = 4$, $n(B) = 4$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 4 = 8$ हुन्छ ।



(ख) यदि $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ छन् भने,

$(A \cup B) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ र $(A \cap B) = \{d, e\}$

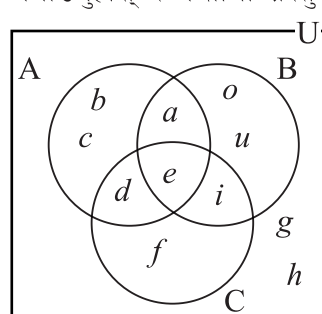
त्यसैले $n(A \cup B) = 7$ र $n(A \cap B) = 2$ हुन्छ,

∴ यदि कुनै दुईओटा समूहहरू प्रतिच्छेदित समूहहरू भए

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

दिइएको भेन चित्रको आधारमा तलका समूहका गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत् गर्नुहोस् :



(क) $n(A)$ (ख) $n(B)$ (ग) $n(C)$

(घ) $n(A \cup B \cup C)$ (ङ) $n(\overline{A \cup B \cup C})$

यहाँ भेनचित्रबाट,

$A = \{a, b, c, d, e\}$ ∴ $n(A) = 5$

$B = \{a, e, i, o, u\}$ ∴ $n(B) = 5$

$C = \{d, e, f, i\}$ $\therefore\ n(C) = 4$

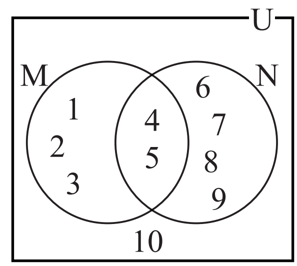
$(A \cup B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, i, o, u\}$ $\therefore\ n(A \cup B \cup C) = 9$

$(\overline{A \cup B \cup C}) = \{g, h\}$ $\therefore\ n(\overline{A \cup B \cup C}) = 2$

क्रियाकलाप 3

कुनै दुई समूहहरू M र N खप्टिएका (Overlapping) समूहहरू हुन् भने समूह M को मात्र सदस्य सङ्ख्यालाई $n_o(M)$ र समूह N को मात्र सदस्य सङ्ख्यालाई $n_o(N)$ ले जनाइन्छ ।

दिइएको भेनचित्रमा, $n_o(M) = 3$ हुन्छ ।



त्यसैले $n_o(M) = n_o(M - N)$ हुन्छ ।

यसलाई $n_o(M) = n(M) - n(M \cap N)$ पनि लेख्न सकिन्छ ।

त्यसैगरी $n_o(N) = 4$

त्यसैगरी $n_o(N) = n(N - M) = n(N) - n(M \cap N)$ हुन्छ ।

यहाँ $n(M) = 5, n(N) = 6, n_o(M) = 3, n_o(N) = 4,$

$n(M \cup N) = 9$ र $n(M \cap N) = 2$ हुन्छ ।

अत: $n(M \cup N) = n_o(M) + n_o(N) + n(M \cap N)$ हुन्छ ।

कुनै दुई समूहमध्ये एउटा समूह अर्को समूहको उपयुक्त उपसमूह (Proper subset) भए, अर्थात् $A \subset B$ भए $n(A \cup B) = n(B)$ र $n(A \cap B) = n(A)$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ र $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $n(A \cup B) = n(B)$ (ख) $n(A \cap B) = n(A)$

समाधान

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ र $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ छन् ।

(क) $n(A \cup B) = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore\ n(A \cup B) = 5$

$\therefore\ n(A \cup B) = n(B)$

(ख) $n(A \cap B) = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$= \{1, 2, 3\}$

$\therefore\ n(A \cap B) = 3$

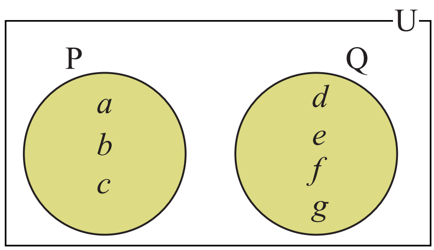
$A = \{1, 2, 3\}$

$\therefore n(A) = 3$

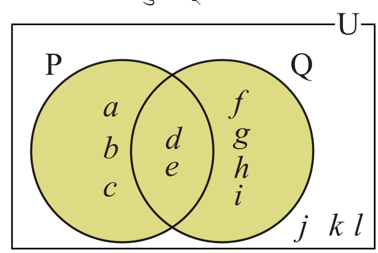
$\therefore\ n(A \cap B) = n(A)$

समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउने तरिका

तल दिइएका भेनचित्रहरू अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :



चित्र न. 1



चित्र न. 2

(क) $n(U) = ?$ (ख) $n(P) = ?$ (ग) $n(Q) = ?$ (घ) $n(P \cup Q) = ?$

(ङ) $n(P \cap Q) = ?$ (च) $n(\overline{P \cup Q}) = ?$

यहाँ चित्र न. 1 मा समूह P र Q अलग्गिएका समूह हुन् ।

$U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$n(U) = 7$

$P = \{a, b, c\}$

$n(P) = 3$

$Q = \{d, e, f, g\}$

$n(Q) = 4$

$(P \cup Q) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$n(P \cup Q) = 7$

$(P \cap Q) = \{\ \}$

$n(P \cap Q) = 0$

$(\overline{P \cup Q}) = \{\ \}$

$n(\overline{P \cup Q}) = 0$

$\therefore n(U) = n(P \cup Q)$

यहाँ चित्र न. 2 मा समूह P र Q खप्टिएका समूह हुन् ।

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$

$n(U) = 12$

$P = \{a, b, c, d, e\}$

$n(P) = 5$

$Q = \{d, e, f, g, h, i\}$

$n(Q) = 6$

$(P \cup Q) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$n(P \cup Q) = 9$

$(P \cap Q) = \{d, e\}$

$n(P \cap Q) = 2$

$(\overline{P \cup Q}) = \{j, k, l\}$

$n(\overline{P \cup Q}) = 3$

$\therefore n(U) = n(P \cup Q) + n(\overline{P \cup Q})$

समूहको गणनात्मकता (Cardinality) लाई निम्न सूत्रमा लेख्न सकिन्छ :

(क) यदि A र B दुईओटा अलग्गिएका समूह भए, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ हुन्छ ।

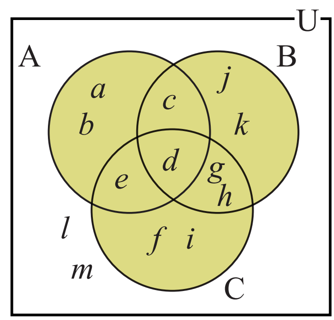
(ख) यदि A र B दुईओटा खप्टिएका समूह भए, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ । अथवा, $n(A \cup B) = n_o(A) + n_o(B) + n(A \cap B)$ हुन्छ ।

(ग) U भित्र A र B का मात्र सदस्य भए $n(U) = n(A \cup B)$ हुन्छ ।

(घ) U भित्र A र B का सदस्यहरू बाहेक अन्य सदस्यहरू पनि भए $n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$ हुन्छ । त्यस्तै $n(U) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B})$ हुन्छ ।

(ङ) खप्टिएका समूहमा $n_o(A) = n(A) - n(A \cap B)$ र $n_o(B) = n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ ।

उदाहरण 2



दिइएको भेनचित्र अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नको जबाफ दिनुहोस् :

(क) n(A) (ख) $n(B)$ (ग) $n(C)$

(घ) $n(A \cap B)$ (ङ) $n(A \cap B \cap C)$

(च) $n(A \cup B \cup C)$ (छ) $n(\overline{A \cup B \cup C})$

(ज) $n_o(A)$ (झ) $n_o(A \cap B)$ (ञ) $n(A - B)$

समाधान

दिइएको भेनचित्रलाई अध्ययन गर्दा

(क) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$\therefore\ n(A) = 5$

(ख) $B = \{c, d, g, h, j, k\}$

$\therefore\ n(B) = 6$

(ग) $C = \{e, d, f, g, h, i\}$

$\therefore\ n(C) = 6$

(घ) $A \cap B = \{c, d\}$

$\therefore\ n(A \cap B) = 2$

(ङ) $A \cap B \cap C = \{d\}$

$\therefore\ n(A \cap B \cap C) = 1$

(च) $(A \cup B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$

$\therefore\ n(A \cup B \cup C) = 11$

(छ) $(\overline{A \cup B \cup C}) = \{l, m\}$

$\therefore\ n(\overline{A \cup B \cup C}) = 2$

(ज) $A - (B \cup C) = \{a, b\}$

$\therefore\ n_o(A) = 2$

(झ) $(A \cap B) - (A \cap B \cap C) = (A \cap B) - C$

$= \{c\}$

$\therefore\ n_o(A \cap B) = 1$

(ञ) $A - B = \{a, b, e\}$

$\therefore\ n(A - B) = 3$

अभ्यास 1.2

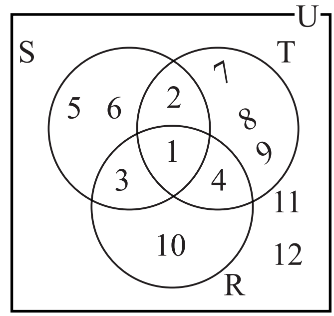
1.(a) दिइएको भेनचित्र अध्ययन गरी निम्न समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $n(S)$ (ख) $n(T)$ (ग) $n(U)$

(घ) $n(S \cap T)$ (ङ) $n(R \cup T)$ (च) $n(S \cap R \cap T)$

(छ) $n(S \cup R \cup T)$ (ज) $n(\overline{S \cup R \cup T})$

(झ) $n_o(S)$ (ञ) $n_o(S \cap R)$ (ट) $n(\overline{R})$

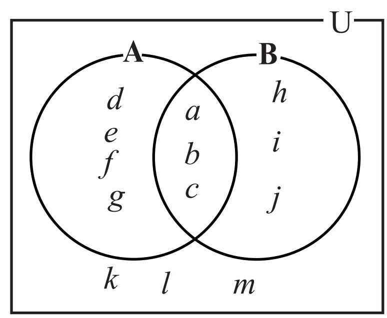


(b) यदि A र B अलग्गिएका समूह हुन् र $n(A) = 30$, $n(B) = 35$ भए $n(A \cup B)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

2.(a) दिइएको भेनचित्रको प्रयोग गरी तलका समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $n(A)$ (ख) $n(B)$ (ग) $n(A \cup B)$

(घ) $n(A \cap B)$ (ङ) $n_o(A)$ (च) $n_o(B)$



(b) यदि $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{c, d, e, f\}$, $B = \{a, b, e, f\}$ र $C = \{d, e, f, g\}$ भए तलका समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $n(A - B)$ (ख) $n(B - C)$ (ग) $n(A - C)$ (घ) $n(\overline{A})$

(ङ) $n(\overline{A \cup B})$ (च) $n\{(A \cup B) - (A \cap B)\}$ (छ) $n\{(A - B) \cup (B - A)\}$

3.(a) यदि U = {20 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरू}, A = {20 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरू}, B = {20 भन्दा साना रुढ सङ्ख्याहरू} र C = {20 भन्दा साना वर्ग सङ्ख्याहरू} भए तलका समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $n(U)$ (ख) $n(C)$ (ग) $n(A \cap B)$ (घ) $n(B - C)$

(ङ) $n(\overline{A})$ (च) $n(A \cup C)$ (छ) $n(\overline{A \cap B})$

(b) यदि $U = \{x : x$ एउटा 20 सम्मको प्राकृतिक सङ्ख्या हो$\}$

$A = \{y : y$ एउटा रुढ सङ्ख्या हो$\}$, $B = \{z : z$ एउटा 18 को गुणनखण्ड हो$\}$

C = {p : p एउटा 20 भन्दा सानो 3 को अपवर्त्य हो} भने भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी निम्न समूहहरूको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् ।

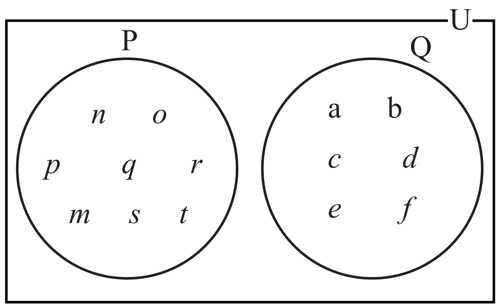
(क) $n(A \cup B)$ (ख) $n(B \cup C)$ (ग) $n(A \cup B \cup C)$

(घ) $n(A \cap B \cap C)$ (ङ) $n_o(A)$ (च) $n_o(A - B)$

(छ) $n(\overline{A \cap B})$ (ज) $n(\overline{C})$

4. **दिइएको भेनचित्रको प्रयोग गरी निम्नलिखित समूहहरूको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $n(P \cup Q)$ (ख) $n(P \cap Q)$ (ग) $n(\overline{P \cup Q})$ (घ) $n(\overline{P \cap Q})$



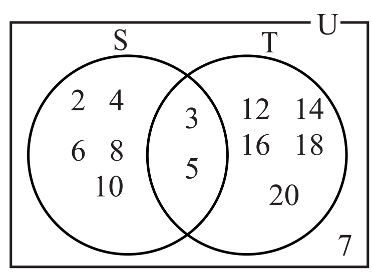
5. **दिइएको भेनचित्रको प्रयोग गरी तलका समूहहरू पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $n(S)$ (ख) $n(T)$ (ग) $n(S \cap T)$

(घ) $n(S \cup T)$ (ङ) $n_o(T)$ (च) $n_o(S)$

(छ) $n(\overline{T})$ (ज) $n(\overline{S \cup T})$

(झ) $n(\overline{S \cap T})$ (ञ) $n(U)$



6. **दिइएको भेनचित्रको अध्ययन गरी तलका समूहका गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् :**

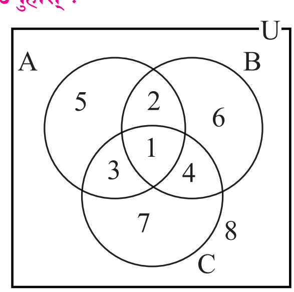
(क) $n(A)$ (ख) $n(B)$

(ग) $n(C)$ (घ) $n(A \cup B)$

(ङ) $n(A \cup B \cup C)$ (च) $n(A \cap B \cap C)$

(छ) $n(\overline{A \cup B \cup C})$ (ज) $n_o(A)$

(झ) $n_o(C)$ (ञ) $n(U)$



7. **सँगैको चित्रबाट तलका सम्बन्धहरू देखाउनुहोस् :**

(क) $n(\overline{A}) = n(\cup - A)$

(ख) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

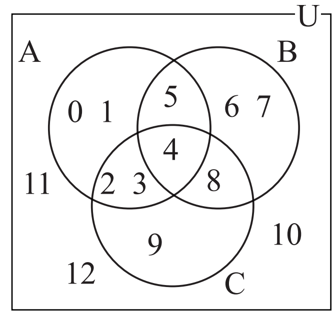
(ग) $n_o(A) = n(A - B)$

(घ) $n(A \cup B) = n_o(A) + n(B)$

(ङ) $n(A \cup C) = n_o(A) + n(C)$

(च) $n(B \cup C) = n_o(B) + n(C)$

(छ) $(\overline{A \cup B \cup C}) = U - (A \cup B \cup C)$



परियोजना कार्य

1. स्याउ र सुन्तलामध्ये तपाईंलाई कुन फलफूल मन पर्छ भनी कम्तीमा 20 जना मानिसलाई सोध्नुहोस् । स्याउ मन पराउने मानिसहरूको समूहलाई A र सुन्तला मन पराउने मानिसहरूको समूहलाई O ले जनाउनुहोस् । प्राप्त प्रतिक्रियाअनुसार स्याउ मन पराउने, सुन्तला मन पराउने, दुवै फल मन पराउने, स्याउ मात्रै मन पराउने, सुन्तला मात्रै मन पराउने तथा स्याउ र सुन्तला कुनै पनि फलफूल मन नपराउने मानिसहरूको समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । उक्त जानकारीबाट तलका समूहहरू निर्माण गरी भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) A (ख) O (ग) $A \cup O$ (घ) $\overline{A}$

(ङ) $A - O$ (च) $O - A$ (छ) $(O - A) \cup (A - O)$

2. तपाईंको कक्षामा अध्ययन गर्ने सबै विद्यार्थीलाई फुटबल, क्रिकेट र बास्केटबल खेलमध्ये तपाईंलाई कुन खेल मन पर्छ भनी सोध्नुहोस् । फुटबल मन पर्नेलाई F, क्रिकेट मन पर्नेलाई C र बास्केटबल मन पराउनेलाई B ले जनाउनुहोस् । प्राप्त प्रतिक्रियाअनुसार फुटबल मन पर्ने, क्रिकेट मन पर्ने र बास्केटबल मन पर्ने, कुनै दुईओटा खेल मन पराउने, तीनओटै खेल मन पराउने, कुनै एक खेल मात्र मन पराउने र कुनै पनि खेल मन नपराउने समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । उक्त जानकारीका आधारमा तलका समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) $n(F)$ (ख) $n(C)$ (ग) $n(B)$ (घ) $n(F \cap B)$

(ङ) $n(B \cap C)$ (च) $n(F \cap C \cap B)$ (छ) $n(F \cup C \cup B)$ (ज) $n(\overline{F \cup B})$

(झ) $n(\overline{B \cup C})$ (ञ) $n(\overline{C})$ (ट) $n_o(F)$ (ठ) $n_o(F \cap C)$

(ड) $n(F - B)$

उत्तर

1.	(a) (क) 5	(ख) 6	(ग) 12	(घ) 2	(ङ) 8	(च) 1		
	(छ) 10	(ज) 2	(झ) 2	(ञ) 1	(ट) 8	(b) 65		
2.	(a) (क) 7	(ख) 6	(ग) 10	(घ) 3	(ङ) 4	(च) 3		
	(b) (क) 2	(ख) 2	(ग) 1	(घ) 3	(ङ) 1	(च) 4	(छ) 4	
3.	(a) (क) 19	(ख) 4	(ग) 1	(घ) 8	(ङ) 10	(च) 11	(छ) 18	
	(b) (क) 12	(ख) 8	(ग) 14	(घ) 1	(ङ) 6	(च) 6	(छ) 18	(ज) 14
4.	(क) 14	(ख) 0	(ग) 0	(घ) 14				
5.	(क) 7	(ख) 7	(ग) 2	(घ) 12	(ङ) 5	(च) 5		
	(छ) 5	(ज) 6	(झ) 1	(ञ) 11	(ट) 13			
6.	(क) 4	(ख) 4	(ग) 4	(घ) 6	(ङ) 7	(च) 1		
	(छ) 1	(ज) 1	(झ) 1	(ञ) 8				

7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास

१. दिइएका दुईओटा शब्दहरू SUSTAINABILITY र URBANIZATION का आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) दुबै शब्दमा भएका अक्षरहरूलाई (letter) समूह निर्माण विधिबाट लेख्नुहोस् ।

(ख) प्रश्न 'क' मा बनेका समूहहरूलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) दुबै समूहमा पर्ने अक्षरहरूको समूह लेख्नुहोस् ।

(घ) एउटा मात्र समूहमा पर्ने अक्षरहरूको समूह सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) $U = \{a, b, c, ..., z\}$ भएमा दुबै समूहमा नपर्ने अक्षरहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

२. यदि U = {1 देखि 25 सम्मका पूर्णाङ्कहरू}

A = {1 देखि 25 सम्मका 3 का अपवर्त्यहरू}

B = {1 देखि 25 सम्मका 4 का अपवर्त्यहरू}

C = {1 देखि 25 सम्मका 5 का अपवर्त्यहरू}

(क) माथिका सबै समूहहरूलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् ।

(ख) तीनओटै समूहहरूको सम्बन्धलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) तीनओटै समूहमा पर्ने सदस्यहरूको समूह लेख्नुहोस् ।

(घ) तीनओटै समूहमा पर्ने र नपर्नेको जम्मा सदस्य सङ्ख्या कति होला ?

पाठ 2 कर (Tax)

2.0 पुनरवलोकन (Review)

विद्यार्थीहरू उपयुक्त सङ्ख्याका समूहहरूमा बसी तलका अवस्थाहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) विशालले आफ्नो मासिक तलबमा 1% घटाएर पाए ।

(ख) कमलाले एउटा मोबाइल किन्दा मोबाइलको मूल्यमा 13% थप रकम तिरिन् ।

(ग) एउटा उद्योगले आफूले वर्षभरि कमाएको केही प्रतिशत रकम सरकारलाई बुझायो ।

(घ) प्रधानाध्यापकले एउटा कार्यक्रमको प्रतिबैठक भत्ताबापत रु. 600 मध्ये जम्मा रु. 510 मात्र प्राप्त गर्नुभयो ।

(ङ) शक्तिले यातायात व्यवस्था सेवा कार्यालय, बाग्मती प्रदेश अन्तर्गत दर्ता भएको आफ्नो मोटरसाइकलको ब्लुबुक आ.व. 2078/2079 का लागि नवीकरण गर्दा रु. 300 तिरे ।

माथिका अवस्थामा थप गरिएका र कट्टी गरिएका रकम करबापतका रकम हुन् । फरक फरक शीर्षकमा फरक फरक करको दर कानुनमा उल्लेख गरिएको हुन्छ ।

2.1 कर (Tax)

क्रियाकलाप 1

हाम्रो देशमा प्रत्येक आर्थिक वर्षको सुरुमा प्रस्तुत गरिने बजेट वक्तव्यमा समावेश गरिएको करसम्बन्धी व्यवस्थालाई आधार मानी निम्नलिखित प्रश्नहरूमा साथीहरूबिच छलफल गर्नुहोस् :

(क) सरकारले राज्यको प्रशासनिक खर्च र विकास खर्च कसरी जुटाउँछ होला ?

(ख) सरकारले राष्ट्रसेवक कर्मचारीलाई दिने तलब भत्ता कसरी व्यवस्थापन गर्छ होला ?

(ग) गाउँ टोलमा वर्षैपिच्छे खानेपानी ट्याङ्की निर्माण तथा मर्मत, सडक निर्माण तथा स्तरोन्नति र विकास निर्माणका कामहरू जस्तै : सिपमूलक कार्यक्रम आदिका लागि बजेट निकासा हुने गरेको सुन्नु भएकै होला, यस्ता खर्चहरू कहाँबाट जुटाइन्छ ?

कर भनेको कुनै व्यक्ति, फर्म वा कम्पनीले कानुनबमोजिम सरकारलाई तिर्नुपर्ने अनिवार्य भुक्तानी हो । राज्यको आम्दानीको मुख्य स्रोत कर हो । सरकारले देशको नियमित, आकस्मिक र विकासात्मक गतिविधि यही करका माध्यमबाट प्राप्त हुने आम्दानीअनुसार सञ्चालन गरेको हुन्छ । त्यसैले हामी सबैले अनिवार्य रूपमा कर तिर्नुपर्छ । कर तिर्नु असल नागरिकको कर्तव्य पूरा गर्नु हो । नेपालमा प्रचलनमा रहेका करहरूमा सवारी कर, घरबहाल कर, भन्सार कर, आयकर, मूल्य अभिवृद्धि कर, सम्पत्ति कर, सामाजिक सुरक्षा कर आदि हुन् । करलाई प्रतिशत (%) मा व्यक्त गरिन्छ ।
उदाहरण : विदेश अध्ययन गर्न जाने विद्यार्थीले मुद्रा सटही सुविधा लिँदा सटही रकममा 1% कर लाग्छ ।

2.1.1 **आयकर** (Income tax)

क्रियाकलाप 2

दिइएका आयकर सीमा र प्रश्नहरूका सम्बन्धमा आफ्ना साथीहरूबिचमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् र कक्षाकोठामा निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् :

आय वर्ष 2079/080 का लागि
प्राकृतिक व्यक्तिका लागि लागु हुने करको दर

रोजगारीको आय मात्र हुनेका लागि			
एकल व्यक्तिका लागि		**दम्पतीका लागि**	
शीर्षक	करको दर	शीर्षक	करको दर
रु. 5 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	1%	रु. 6 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	1%
5 लाखभन्दा बढी तर 7 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	10%	6 लाखभन्दा बढी तर 8 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	10%
7 लाखभन्दा बढी तर 10 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	20%	8 लाखभन्दा बढी तर 11 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	20%
10 लाखभन्दा बढी तर 20 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	30%	11 लाखभन्दा बढी तर 20 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	30%
20 लाखभन्दा बढीको करयोग्य आयमा	36%	20 लाखभन्दा बढीको करयोग्य आयमा	36%

एकलौटी फर्मका रूपमा व्यवसाय मात्र हुनेका लागि			
एकल व्यक्तिका लागि		**दम्पतीका लागि**	
शीर्षक	कर प्रतिशत	शीर्षक	कर प्रतिशत
रु. 5 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	कर नलाग्ने	रु. 6 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	कर नलाग्ने
5 लाखभन्दा बढी तर 7 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	10%	6 लाखभन्दा बढी तर 8 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	10%
7 लाखभन्दा बढी तर 10 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	20%	8 लाखभन्दा बढी तर 11 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	20%
10 लाखभन्दा बढी तर 20 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	30%	11 लाखभन्दा बढी तर 20 लाखसम्मको करयोग्य आयमा	30%
20 लाखभन्दा बढीको करयोग्य आयमा	36%	20 लाखभन्दा बढीको करयोग्य आयमा	36%

(क) आयकर भनेको के हो ?

(ख) कानुन बनाएर हाम्रो आम्दानीमध्ये निश्चित प्रतिशत रकम सरकारले उठाउँछ, किन होला ?

(ग) नेपालमा आयकर व्यवस्थापन गर्ने निकाय कुन हो ?

(घ) आन्तरिक राजस्व विभागले निर्धारण गरेको हरेक आर्थिक वर्षका लागि आयकरसम्बन्धी सीमाहरू, प्रावधानहरू कहाँबाट कसरी सजिलै अध्ययन गर्न सकिन्छ ? कस्ता कस्ता प्रावधानहरू उल्लेख गरिएको रहेछ ?

व्यक्तिगत वा संस्थागत (उद्योग, कम्पनी आदि) ले गरेको आम्दानीमा लाग्ने करलाई आयकर (Income tax) भनिन्छ । मूलतः आय, पारिश्रमिक तथा नाफामा लाग्ने कर नै आयकर हो । सरकारको आम्दानीको स्रोतमध्ये आयकर पनि एक हो । आयकरलाई प्रतिशतमा गणना गरिन्छ। व्यक्तिगत आयकरदर पेसा, व्यवसाय र वैवाहिक स्थितिअनुसार फरक फरक हुने गरेको पाइन्छ। आयकर ऐन 2058अनुसार आयका चार शीर्षक (क) रोजगारी (ख) व्यवसाय (ग) लगानी (घ) आकस्मिक लाभ तोकिएको छ । नेपालमा आयकरको व्यवस्थापन गर्ने जिम्मेवारी आन्तरिक राजस्व विभागलाई तोकिएको छ। आन्तरिक राजस्व विभागले हरेक वर्ष आयकर गणना कार्यविधि बनाउने गरिएको हुन्छ, जसको विवरण विभागको वेबसाइट http://www.ird.gov.np बाट हेर्न सकिन्छ ।

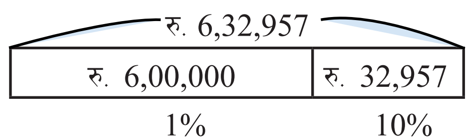
आयकरमा छुट हुने अवस्थाहरू		
	शीर्षक	**सीमा**
(क)	कर्मचारी सञ्चय कोषमा जम्मा गरिएको रकममा र नागरिक लगानी कोषमा जम्मा गरिएको रकममा	निर्धारण योग्य आयको एकतिहाइ र तीन लाख रुपियाँमा जुन कम हुन्छ सो बराबरको रकममा
(ख)	जीवन बिमाबापत तिरेको प्रिमियम खर्चमा	वार्षिक प्रिमियममा वा रु. 40,000 मा जुन कम हुन्छ सो रकमसम्म (दम्पतीसमेत)
(ग)	धार्मिक कार्यका लागि गरेको खर्च तथा चन्दा दिइएको रकममा	समायोजित करयोग्य आयको 5% र रु. 1,00,000 मा जुन कम हुन्छ सो बराबरको रकममा
(घ)	दुर्गम क्षेत्रमा कार्यरत व्यक्तिको करयोग्य आयमा (दुर्गम क्षेत्रका आधारमा)	'क' वर्गका क्षेत्रमा रु. 50,000, 'ख' वर्गका क्षेत्रमा रु. 4,00,000, 'ग' वर्गका क्षेत्रमा रु. 30,000 , 'घ' वर्गका क्षेत्रमा रु. 20,000 र 'ङ' वर्गका क्षेत्रमा रु. 10,000
(ङ)	वैदेशिक भत्ताको 75% रकममा	नेपालको विदेशस्थित कुटनीतिक नियोगमा कार्यरत कर्मचारीका लागि
(च)	औषधी उपचारमा लागेको खर्चमा	स्वीकृत औषधी उपचार खर्च वापत बिलबमोजिमको वास्तविक खर्च रकम १५% र रु. ७५० मा जुन रकम कम हुन्छ सो रकममा

(ज)	अपाङ्गता भएका व्यक्तिले पाउने छुट सुविधा	तोकिएको सीमामा थप पचास प्रतिशत थप रकममा
(झ)	स्वास्थ्य बिमाबापत तिरेको प्रिमियम	वार्षिक प्रिमियम वा रु. 20,000 मा जुन कम हुन्छ सो रकममा
(ञ)	सामाजिक सुरक्षा कोषमा योगदान गरेको रकममा	वार्षिक अधिकतम रु. 5,00,000 सम्म
(ट)	रोजगारीको आय मात्र भएका महिलाका हकमा	आयकर रकममा 10% छुट
(ठ)	सामाजिक सुरक्षाको रूपमा दिइने सबै प्रकारका भत्तामा	
(ड)	दाइजो छात्रवृत्ति, अपुताली, इच्छापत्रबापत प्राप्त रकममा	
(ढ)	आफ्नो स्वामित्त्वमा रहेको निजी भवनको बिमाबापत तिरेको प्रिमियम रकममा	वार्षिक प्रिमियम वा रु. 5,000 मा जुन कम हुन्छ सो रकममा
(ण)	निवृत्तिभरण आयमा	तोकिएको सीमामा 25% थप रकममा
(त)	एकलौटी फर्म दर्ता भएका कर दाताको हकमा	निवृत्तिभरणबापतको आय, निवृत्तिभरण कोष र योगदानमा आधारित सामाजिक सुरक्षा कोषमा योगदान गर्ने प्राकृतिक व्यक्तिको आयमा 1% को कर लाग्ने छैन ।

उदाहरण 1

एक जना विवाहित शिक्षकको मासिक तलब रु. 48,689 छ । आय वर्ष 2079/080 को आयकर दरअनुसार शिक्षकले प्राप्त गर्ने चाडपर्व खर्चसहितको 13 महिनाको आम्दानी हिसाब गर्दा वार्षिक कति आयकर तिर्नुपर्ने रहेछ ?

समाधान



यहाँ मासिक तलब = रु.48,689

वार्षिक आय = 13 × 48,689

= रु.6,32,957

अब करयोग्य रकम रु. 6,32,957 लाई आयकरदरका आधारमा निम्नानुसार लेख्दा,

रु. 6,32,957 = रु.6,00,000 + रु.32,957

↓ 1% ↓ 10%

वार्षिक आयकर = रु. 6,00,000 को 1% + रु.32,957 को 10%

$$= \text{रु. } 6,00,000 \times \frac{1}{100} + 32,957 \times \frac{10}{100}$$

= 6,000 + 3295.7

= रु. 9295.70

उदाहरण 2

एउटा बैङ्कमा काम गर्ने अविवाहित महिला कर्मचारीको मासिक तलब रु. 40,000 छ। आम्दानीमध्ये वार्षिक रु. 5,00,000 सम्ममा सामाजिक सुरक्षा कर 1% का दरले र रु. 5,00,000 भन्दा माथिको आयमा 10% का दरले आयकर तिर्नुपर्छ। उक्त कर्मचारीले एक वर्षमा 15 महिना बराबर तलब पाउँछ भने वार्षिक जम्मा कति आयकर तिर्नुपर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ कर्मचारीको मासिक आम्दानी = रु. 40,000

वार्षिक आम्दानी = 15 × रु. 40,000

= रु. 6,00,000

यहाँ कुल वार्षिक आम्दानी रु. 6,00,000 लाई दिइएको आयकर सीमाअनुसार निम्नानुसार लेख्दा,

रु. 6,00,000 = रु. 5,00,000 + रु. 1,00,000

↓ 1% ↓ 10%

∴ जम्मा वार्षिक आयकर = रु. 5,00,000 को 1% + रु. 1,00,000 को 10%

$$= 5,00,000 \times \frac{1}{100} + 1,00,000 \times \frac{10}{100}$$

$= 5,000 + 10,000$

= रु. 15,000

महिला भएकाले आयकरमा 10% ले छुट पाउने हुँदा,

छुट रकम = रु. 15,000 को 10%

= रु. 1500

निज कर्मचारीले तिर्नुपर्ने वार्षिक कर = रु. 15,000 – रु. 1500

= रु. 13,500

उदाहरण 3

नेपालमा रु. 2,000 महँगी भत्तासहित मासिक रु. 45,689 कमाउने एक जना विवाहित पुरुष कर्मचारीले वार्षिक रु. 23,500 प्रिमियम तिर्ने गरी जीवन बिमा गरेका छन्। उनले प्राप्त गर्ने चाडपर्व खर्चसहितको 13 महिना बराबर एक वर्षको आम्दानीको गणनामा महँगी भत्ता र चाडपर्व खर्चबाहेकको आम्दानीमध्ये 10% कर्मचारी सञ्चय कोषमा छुट्याइसकेपछि बाँकी आयमा जम्मा कति आयकर तिर्नुपर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्। (यहाँ अगाडि पृष्ठमा उल्लिखित आयकर सीमाअनुसार गणना गरिएको छ।)

समाधान

यहाँ मासिक तलब = रु. 45,689 – रु. 2,000 = रु. 43,689

बार्षिक तलब = रु. 43,689 × 12 = रु. 5,24,268

महँगी भत्ता = 2,000 × 12 = रु. 24,000

दसैँ खर्च = रु. 43,689

कर्मचारी सञ्चय कोष थप = $5,24,268 \times \frac{10}{100}$ = रु. 52,426.80

अब निर्धारण योग्य आय = रु. 5,24,268 + रु. 24,000 + रु. 43,689 + रु. 52,426.80

= रु. 6,44,383.80

करमुक्त आय हिसाब गर्दा,

(i) कर्मचारी सञ्चय कोषमा जम्मा हुने रकम

रु. 52,426.80 + रु. 52,426.80 = रु. 1,04,853.60

(ii) बिमा प्रिमियम = रु. 23,500

जम्मा रु. 1,28,353.60

अब निर्धारण योग्य आयको एक तिहाइले हुने रकम

= रु. $6,44,383.80 \times \frac{1}{3}$

= रु. 2,14,794.60

निर्धारण योग्य आयको एक तिहाइभन्दा कर्मचारी सञ्चय कोषमा जम्मा गरेको रकम कम भएकाले र विमा प्रिमियम रकम रु. 40,000 भन्दा कम भएकोले,

वास्तविक कर छुट रकम = रु. 1,28,353.60

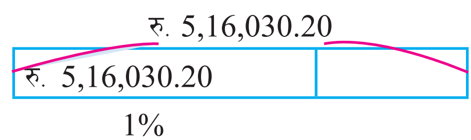
कर योग्य आय = 6,44,383.80 – 1,28,353.60 = रु. 5,16,030.20

विवाहित कर्मचारी भएकाले,

तिर्नुपर्ने आयकर रकम = रु. 5,16,030.20 को 1%

= रु. $5,16,030.20 \times \frac{1}{100}$

= 5,160.30



तसर्थ उक्त कर्मचारीले वार्षिक रूपमा जम्मा रु. 5,160.30 आयकर तिर्नुपर्छ ।

उदाहरण 4

यदि कुनै व्यवसायीको वार्षिक आयमध्ये रु.4,50,000 सम्म आयकर छुट, रु. 4,50,001 देखि रु. 5,50,000 सम्म 10% र रु. 5,50,001 देखि रु.7,00,000 सम्म 20% का दरले आयकर लाग्छ भने वार्षिक रु.6,75,000 आम्दानी गर्ने व्यवसायीले जम्मा कति आयकर तिर्नुपर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ कुल वार्षिक आम्दानी रु. 6,75,000 लाई दिइएको आयकर सीमाअनुसार निम्नानुसार टुक्रयाएर लेख्दा,

रु. 6,75,000 = रु. 4,50,000 + रु. 1,00,000 + रु. 1,25,000

↓ आयकर छुट ↓ 10% ↓ 20%

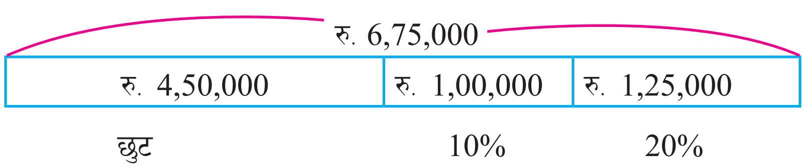
∴ जम्मा वार्षिक आयकर = रु. 1,00,000 को 10% + 1,25,000 को 20%

$$= 1,00,000 \times \frac{10}{100} + 1,25,000 \times \frac{20}{100}$$

$$= 10,000 + 25,000$$

= रु. 35,000

नमुना चित्रण विधिबाट,



जम्मा वार्षिक आयकर = रु. 1,00,000 को 10% + रु. 1,25,000 को 20%

$$= 1,00,000 \times \frac{10}{100} + 1,25,000 \times \frac{20}{100}$$

$$= 10,000 + 25,000$$

= रु. 35,000

∴ उक्त व्यवसायीले वार्षिक रु. 35,000 आयकर तिर्नुपर्छ ।

उदाहरण 5

धनबहादुरले रु. 35,000 को 4 वर्षमा 10% प्रति वर्षका दरले साधारण ब्याज पाउने गरी एउटा सहकारी संस्थामा मुद्दती बचतमा जम्मा गरेछन् । यदि उनले सो बचतमा पाउने ब्याजमा 5% कर लाग्छ भने उनले कर कट्टीपछि कति ब्याज प्राप्त गर्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ दिइएको,

सावाँ (P) = रु. 35,000

समय (T) = 4 वर्ष

साधारण ब्याजदर (R) = 10%

करदर = 5%

साधारण ब्याज = ?

कर कट्टीपछि प्राप्त हुने ब्याज = ?

ब्याजबापतको आयमा लाग्ने कर = ?

सूत्रबाट,

$$I = \frac{P \times T \times R}{100}$$

$$= \frac{35,000 \times 4 \times 10}{100}$$

= रु. 14,000

∴ साधारण ब्याज = रु.14,000, यहाँ यसरी प्राप्त ब्याज रकम धनबहादुरको लगानीबाट प्राप्त आयको रूपमा गणना हुन्छ ।

फेरि आयकर = रु. 14,000 को 5%

= रु. $14,000 \times \frac{5}{100}$

= रु. 700

∴ ब्याजबापतको आयमा लाग्ने कर = रु. 700

∴ कर कट्टीपछिको ब्याज = रु. 14,000 – रु. 700

= रु. 13,300

सम्बन्धित सहकारी संस्थाले नै 5% ले हुने ब्याजमा लाग्ने कर कट्टी गरी बचतकर्ता धनबहादुरलाई रु. 13,300 मात्र प्रदान गर्छन् ।

अभ्यास 2.1

1. नेपालमा मासिक रु. 60,490 कमाउने र वार्षिक रु. 35,500 को जीवन बिमा गरेका एक जना अधिकृत तहमा कार्यरत विवाहित कर्मचारीले प्राप्त गर्ने चाडपर्व खर्चसहितको 13 महिना बराबर एक वर्षको आम्दानी हिसाब गर्दा वार्षिक कति रुपियाँ आयकर तिर्छन्, पत्ता लगाउनुहोस्। *(अगाडि पेजमा उल्लिखित आयकर सीमाअनुसार हिसाब गर्नुहोस् ।)*

2. कुनै एउटा संस्थामा काम गर्ने एक जना कर्मचारीले उसको आम्दानीमध्ये रु. 6,00,000 सम्म 1%, रु. 6,00,000 भन्दा माथि रु. 8,00,000 सम्म 10%, रु. 8,00,000 भन्दा माथि रु. 11,00,000 सम्म 20%, रु. 11,00,000 भन्दा माथि रु. 20,00,000 सम्म 30% का दरले आयकर तिनुपर्छ भने मासिक रु. 72,082 कमाउने उक्त कर्मचारीले चाडपर्व खर्च सहितको 13 महिना बराबरको एक वर्षको आम्दानी हिसाब गर्दा करबापतको कति रकम सरकारलाई बुझाउनुपर्छ ? हिसाब गर्नुहोस् ।

3. **तलको तालिकामा एकलौटी फर्मका रूपमा व्यवसाय हुने व्यवसायीका लागि उल्लिखित आयकर सीमा अध्ययन गर्नुहोस् :**

वार्षिक आम्दानी (रु.)	**करदर**
1 - 5,00,000	आयकर छुट
5,00,000 - 7,00,000	10%
7,00,000 - 10,00,000	20%
10,00,000 - 20,00,000	30%
20,00,000 भन्दा माथि	36%

अब आयकर सीमाअनुसार निम्नबमोजिमको वार्षिक आम्दानी गर्ने एक जना व्यवसायीले कति आयकर तिर्नुपर्छ, हिसाब गर्नुहोस् :

(क) वार्षिक आम्दानी = रु. 6,30,000

(ख) वार्षिक आम्दानी = रु. 9,25,000

(ग) वार्षिक आम्दानी = रु. 17,88,000

(घ) वार्षिक आम्दानी = रु. 22,25,000

4. बैङ्कमा जम्मा गरेको रु.10 लाखको 4 वर्षमा 8.5% साधारण ब्याजका दरले हिसाब हुँदा कुल ब्याज कति हुन्छ ? यदि उक्त ब्याजमा 5% आयकर लाग्छ भने खुद साधारण ब्याज कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । (यसरी ब्याजमा तिरिएको आयकरले लगानीबाट भएको आयमा तिरिएको करलाई बुझाउँछ ।)

परियोजना कार्य

(क) आफ्नो विद्यालयमा कार्यरत माध्यमिक शिक्षकको सञ्चय कोष, नागरिक लगानी कोष, बीमा जस्ता विषयहरूलाई समेटी तलबको वास्तविक विवरण लिनुहोस् र प्रत्येक शिक्षकले वार्षिक आयमा कति कति रुपियाँ कर तिर्नुपर्ने रहेछ ? हिसाब गर्नुहोस् ।

(ख) विद्यार्थीको आआफ्नो घर परिवारका सदस्यहरूको नोकरी भएमा वा व्यवसायबाट आम्दानी गर्ने भएमा निजहरूबाट आम्दानी गरेको हिसाब किताब गरी वास्तविक विवरण लिनुहोस् र वार्षिक कति रकम करबापत तिर्नुपर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. रु. 21,087   2. रु. 53,413.20

3. (क) रु. 13,000   (ख) रु. 65,000   (ग) रु. 3,16,400   (घ) रु. 4,61,000

4. रु. 3,40,000 र रु. 3,23,000

2.1.2 मूल्य अभिवृद्धि कर (Value added tax)

क्रियाकलाप 1

दिइएको बिल अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नका सम्बन्धमा छलफल गर्नुहोस् :

ABC Electronics
Kathmandu

Invoice No. 883 **TAX INVOICE** Date: 2077-11-15

VAT No × × × × × × × × ×
M/s ....
Address : ....
Buyers VAT No. : × × × × × × × × × Mode of Payment: Cash/Cheque/Others

S.N.	Particulars	Quantity	Rate	Amount	
1.	Refrigerator			Rs.	Ps.
	C,LD 201 ALLB	1	27,876.10	27,876	10
Amount in Words: Thirty One Thousand Five hundred only.		Total		27,876	10
		.... Discount		—	
		Taxable Amount		27,876	10
		13% VAT		3,623	90
		Grand Total		31,500	00

----------------------- ------------------------
Customer's Sign For. ABC Electronics

(क) दिइएको बिलमा रेफ्रिजेरेटरको बिक्री दर कति रहेछ ?
(ख) उक्त रेफ्रिजेरेटर खरिदकर्ताले छुट पाएको रहेछ कि रहेनछ ?
(ग) खरिदकर्ताले तोकिएको बिक्रीदरभन्दा बढी रकम तिरेर खरिद गरिएको देखिन्छ, किन यस्तो भएको होला ?

(घ) उक्त बिलअनुसार बिक्री दरमा रु. 3,623.90 थप रकम तिरेको देखिन्छ । यसरी किन थप रकम तिर्नुपरेको होला ?

(ङ) के हामीले जुनसुकै सामग्री खरिद गर्दा पनि तोकिएको मूल्यमा यसरी नै थप रकम तिर्नुपर्छ ?

(च) यहाँ खरिदकर्ताले तिरेको मूल्य रु. 31,500 ले रेफ्रिजेरेटरको कुन मूल्यलाई बुझाउँछ ?

क्रियाकलाप 2

मूल्य अभिबृद्धि कर गणना सम्बन्धी तलको घटना अध्ययन गर्नुहोस् :

एक जना आयातकर्ताले एउटा कुलर रु. 20,000 मा आयात गरेको थियो । उक्त कुलर आयात गर्दा मूल्य अभिबृद्धि कर तिरेको थिएन । उक्त सामान उपभोक्तामा पुग्नु अघि होलसेलर र खुद्रा बिक्रेता गरी दुई तहमा बिक्री गरिएको थियो । आयात कर्ता, होलसेलर र रिटेलरहरूले रु. 400 थप खर्च र लागत मूल्यमा 5% मुनाफा समावेश गरेको थियो ।

(क) उपभोक्ताको लागत मूल्य कति होला ?

(ख) आयात कर्ता, होलसेलर र रिटेलरले सङ्कलन गर्ने मु.अ.क. रकम कति कति होला ?

समाधान

आयात कर्ताले आयात गरेको मूल्यअभिबृद्धि कर बाहेकको खरिद रकम रु. 20,000

विवरण	बिक्रीका तहहरू		
	आयातकर्ताबाट होलसेलरलाई	होलसेलबाट रिटेलरलाई	रिटलरबाट उपभोक्तालाई
मूल्य अभिबृद्धि कर बाहेकको लागत मूल्य	20,000	21,420	22,911
मूल्य अभिबृद्धि	400+1020 = 1420	400+1091 = 1491	400+1165.55 = 1,565.55
मूल्य अभिबृद्धि कर बाहेकको बिक्री मूल्य	21,420	22,911	24,476.55
मूल्य अभिबृद्धि कर 13%	2784.60	29,78.43	3,181.95
मूल्य अभिबृद्धि कर सहितको बिक्री मूल्य	24204.60	25,889.43	27,658.50
तिर्नुपर्ने मूल्य अभिबृद्धि कर	2784.60	193.83	203.52
सरकारलाई तिर्नुपर्ने क्युमुलेटिभ मूल्य अभिबृद्धि कर	2784.60+0= 2784.60	2784.60+193.83 = 2978.43	2978.43+203.52 = 3181.95

अतः (क) उपभोक्ताको लागि बिक्री मूल्य रु. 27,658.50

(ख) आयातकर्ताले रु. 2784.60, हालसेलरले रु. 193.83 रिटेलरले रु. 203.52 गरी सरकारलाई जम्मा रु. 3181.95sss प्राप्त गर्छ ।

मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT)

मूल्य अभिवृद्धि कर वस्तु तथा सेवामा लाग्ने एक किसिमको अप्रत्यक्ष कर हो । वस्तु वा सेवाको उत्पादनदेखि वितरणसम्मका विभिन्न तह/चरणमा वृद्धि भएको मूल्यमा लाग्ने कर नै मूल्य अभिवृद्धि कर हो । हाल नेपालको सन्दर्भमा मूल्य अभिवृद्धि करको दर 13% राखिएको छ ।

जस्तैः एउटा टेलिभिजन निर्माण गर्ने कम्पनीले एउटा टेलिभिजनको निर्माण खर्च र नाफा जोडी मूल्य रु. 10,000 कायम गऱ्यो । उसले निर्माण गरेको टेलिभिजन डिलर, होलसेलर, रिटेलर हुँदै उपभोक्तासम्म आइपुग्दा निम्नानुसार प्रक्रिया पूरा हुन्छ :

निर्माणकर्ता कम्पनीले डिलरलाई बिक्री गर्दा	डिलरले होलसेलरलाई बिक्री गर्दा
एउटा टेलिभिजनको मूल्य = रु. 10,000 मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13% बिक्री मूल्य = रु. 10,000 + 10,000 को 13% $= 10,000 + 10,000 \times \frac{13}{100}$ = 10,000 + 1,300 = रु. 11,300	क्रय मूल्य = मूल्य अभिबृद्धि कर बाहेकको मूल्य = रु. 10,000 थप खर्च र नाफा गरी रु. 2,500 जोडी एउटा टेलिभिजनको मूल्य = रु. 12,500 मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13% बिक्री मूल्य = रु. 12,500 + रु. 12,500 को 13% = रु. 12,500 + रु. 1,625 = रु. 14,125
होलसेलरले रिटेलरलाई बिक्री गर्दा	**रिटेलरले उपभोक्तालाई बिक्री गर्दा**
क्रय मूल्य = डिलरको मूल्य अभिबृद्धि कर बाहेकको बिक्री मूल्य = रु. 12,500 थप खर्च र नाफा गरी रु. 2500 जोडी एउटा टेलिभिजनको मूल्य = रु. 15,000 मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13% बिक्री मूल्य = रु. 15,000 + 15,000 को 13% = 15,000 + 1,950 = रु. 16,950	क्रय मूल्य = होलसेलको मूल्य अभिबृद्धि कर बाहेकको बिक्री मूल्य = रु. 15,000 थप खर्च र नाफा गरी रु. 3,000 जोडी एउटा टेलिभिजनको मूल्य = रु. 18,000 मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13% बिक्री मूल्य = रु. 18,000 + रु. 18,000 को 13% = रु. 18,000 + रु. 2340 = रु. 20,340

यहाँ उपभोक्ताले रु. 2,340 मूल्य अभिवृद्धि कर तिर्नुपर्छ । उक्त रकम सरकारी कोषमा जम्मा हुँदा,

उत्पादक मार्फत = रु. 1,300

डिलरमार्फत = (1,625 – 1,300) = रु. 325

होलसेलरमार्फत = (1,950 – 1,625) = रु. 325

रिटेलरमार्फत = (2,340 – 1,950) = रु. 390

जम्मा = 1,300 + 325 + 325 + 390) = रु. 2,340

अब प्रत्येक तहमा बढेको मूल्यका आधारमा

उत्पादकले = रु. 10,000 को 13%

$= 10,000 \times \frac{13}{100} = 1,300$

डिलरले = रु. (12,500 – 10,000) को 13%

$= 2500 \times \frac{13}{100}$

= रु. 325

होलसेलरले = रु. (15,000 – 12,500) को 13%

$= 2500 \times \frac{13}{100}$

= रु. 325

रिटेलरले = रु. (18,000 – 15,000) को 13%

$= 3,000 \times \frac{13}{100}$

= रु. 390

जम्मा मूल्य अभिवृद्धि कर = रु. 1,300 + रु. 325 + रु. 325 + रु. 390

= रु. 2,340

उदाहरण 1

दिइएका अवस्थामा मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) रकम पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको मूल्य = रु. 7,000 र मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13%

(ख) मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको मूल्य = रु.10,000 र मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13%

समाधान

(क) यहाँ मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको मूल्य = रु. 7,000

मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13%

मूल्य अभिवृद्धि कर रकम = ?

अब मूल्य अभिवृद्धि कर रकम = रु.7,000 को 13%

$= 7,000 \times \frac{13}{100}$

= रु. 910

∴ मूल्य अभिवृद्धि कर रकम = रु. 910

(ख) यहाँ मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको मूल्य = रु.10,000

मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13%

मूल्य अभिवृद्धि कर रकम = ?

मूल्य अभिवृद्धि कर रकम = रु. 10,000 को 13%

$= 10,000 \times \frac{13}{100}$

= रु. 1300

∴ मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) रकम = रु. 1,300

उदाहरण 2

एउटा मोबाइल सेटको मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको अङ्कित मूल्य रु. 15,000 राखिएको थियो । उक्त मोबाइल सेटमा 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाउँदा सोको मूल्य कति पुग्यो होला ? हिसाब गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ मोबाइलको मूल्य अभिवृद्धिकरबाहेकको अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 15,000

मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13%

मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य = ?

मोबाइलको अभिवृद्धि कर लाग्ने मूल्य = रु. 15,000

मूल्य अभिवृद्धि कर रकम = रु. 15000 को 13%

$= 15000 \times \frac{13}{100}$

= रु. 1950

∴ मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य = 15000 + 1950

= रु. 16,950

वैकल्पिक तरिका

समाधान

मोबाइलको मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 15000

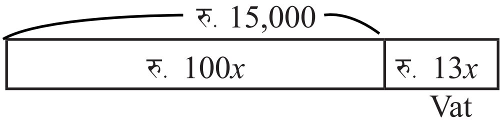
13% मू.अ.क.लगाएपश्चात,

मू.अ.क.सहितको मूल्य $= $ रु. 15,000 को 113%

$= $ रु. $15,000 \times \dfrac{113}{100}$

$= $ रु. 16,950

नमुना चित्रण विधिबाट,



अब $100x = $ रु. 15,000

अथवा, $x = \dfrac{15,000}{100} = $ रु. 150

$13x = $ रु. 150×13

$= $ रु. 1950

$\therefore$ मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य $= $ रु. 15,000 + रु. 1950

$= $ रु. 16,950

उदाहरण 3

एउटा सामानको मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको मूल्यमा 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाउँदा खरिदकर्ताले रु. 57630 तिर्नुपर्छ भने उक्त सामानको अङ्कित मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मानौँ मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको अङ्कित मूल्य (MP) = रु. x

मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13%

मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य = रु. 57,630

प्रश्नअनुसार मु.अ.क. रकम = रु. x को 13%

$= $ रु. $x \times \dfrac{13}{100} = \dfrac{13x}{100}$

मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य $= x + \dfrac{13x}{100} = \dfrac{113x}{100}$

प्रश्नअनुसार,

$$\frac{113x}{100} = 57630$$

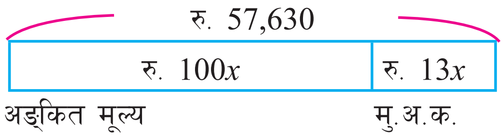
अथवा, $113x = 5763000$

अथवा, $x = \left(\frac{5763000}{113}\right)$

अथवा, $x = 51,000$

अतः अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 51,000

नमुना चित्रण विधिबाट,



अब $113x =$ रु. 57,630

or, $x = 510$

अङ्कित मूल्य $100x = 510 \times 100$

= रु. 51,000

∴ अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 51,000

वैकल्पिक तरिका

मानौँ मूल्य अभिबृद्धि करबाहेकको अङ्कित मूल्य (MP) = रु. x

मूल्य अभिबृद्धि करको दर = 13%

मूल्य अभिबृद्धि कर सहितको मूल्य = रु. 57,630

मूल्य अभिबृद्धि कर सहितको मूल्य = x को (100 + 13)%

= x को 113%

$= x \times \frac{13x}{100}$

$= \frac{113x}{100}$

प्रश्नअनुसार,

$रु.\ 57,630 = \frac{113x}{100}$

अथवा, $113x - 57,63,000$

अथवा, $x = \frac{57,63,000}{113}$

अथवा, $x = 51,000$

अतः अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 51,000

उदाहरण 4

एउटा पसलेले एउटा साइकल मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक रु. 5,800 मा किनेर ल्याएको रहेछ । उसले क्रय मूल्यको 40% बढाएर अङ्कित मूल्य कायम गरेछ । अब 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाउँदा उपभोक्ताले कति मूल्य तिर्नुपर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ साइकलको मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको क्रय मूल्य (CP) = रु. 5,800

बढेको मूल्य = 40%

मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13%

मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य = ?

प्रश्नबाट,

साइकलको अङ्कित मूल्य (MP) = रु. 5,800 को (100 + 40)%

$= रु.\ 5,800 \times \frac{140}{100}$

= रु. 8,120

अब मूल्य अभिवृद्धि कर रकम = रु.8120 को 13%

$= रु.8120 \times \frac{13}{100}$

= रु. 1055.60

∴ मूल्य अभिवृद्धि करसहितको साइकलको मूल्य = रु. 8120 + 1055.6

= रु. 9175.6

तसर्थ उपभोक्ताले रु. 9175.6 तिर्नुपर्छ ।

उदाहरण 5

पसलेले मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक रु. 2,000 मा किनेको एउटा घडीमा रु. 200 थप खर्च र लागत मूल्यमा 25% नाफा लिएर बेच्छ भने 13% मूल्य अभिवृद्धि कर पछि बिलमा उपभोक्ताले तिर्नुपर्ने रकम कति हुन्छ होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ घडीको क्रय मूल्य (CP) = रु. 2,000

थप खर्च = रु. 200

नाफादर = 25%

मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13%

उपभोक्ताले तिर्नुपर्ने रकम (VAT सहितको मूल्य) = ?

जम्मा लागत मूल्य = रु. 2000 + रु. 200

= रु. 2,200

नाफा = रु. 2,200 को 25%

$= 2200 \times \frac{25}{100}$

= रु. 550

∴ मूल्य अभिवृद्धि कर लाग्ने मूल्य = रु. (2200 + 550)

= रु. 2,750

मूल्य अभिवृद्धि कर रकम = रु. 2750 को 13%

$= 2750 \times \frac{13}{100}$

= रु. 357.50

∴ उपभोक्ताले तिर्नुपर्ने रकम = रु. 2750 + रु. 357.50

= रु. 3107.50

उदाहरण 6

खेलकुद सामग्रीको डिलरले आयातकर्ताबाट एउटा टेबल टेनिस बोर्ड मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक रु. 25,000 मा किनेर ल्याएछ । उसले ढुवानी खर्च र नाफासमेत जोडी उक्त टेबलटेनिस बोर्डलाई मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक रु. 30,000 मा खुद्रा व्यापारीलाई बेचेछ । उक्त खुद्रा व्यापारीले सो बोर्डलाई मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक रु. 37,000 मा विक्कीलाई बेचेछ । प्रत्येक तहमा मूल्य अभिवृद्धि करको दर 13% भएको आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) डिलरको मु.अ.क. सहितको क्रय मूल्य कति रहेछ ?

(ख) खुद्रा व्यापारीको मु.अ.क. सहितको क्रय मूल्य कति रहेछ ?

(ग) विक्कीले कति रुपियाँ तिरेर किनेका रहेछन् ?

(घ) टेबल टेनिसको बिक्रीबाट मूल्य अभिवृद्धि करबापत कति रकम सरकारको कोषमा जम्मा हुन्छ ?

(ङ) डिलर र खुद्रा व्यापारीले मूल्य अभिवृद्धि करबापत कति कति रकम सरकारी कोषमा जम्मा गर्नुपर्छ ?

समाधान

आयातकर्ताले कायम गरेको मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको बिक्री मूल्य = रु 25,000

मूल्य अभिवृद्धि करको दर = 13%

(क) डिलरलाई मु.अ.क.सहित परेको मूल्य = 25,000 + 25,000 को 13%

$= 25,000 + 25,000 \times \frac{13}{100}$

$= 25,000 + 3,250$

= रु. 28,250

यहाँ डिलरले नाफा र अन्य खर्चसमेत जोडी मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको,

बिक्री मूल्य = रु. 30,000

(ख) खुद्रा व्यापारीलाई मु.अ.क.सहित परेको मूल्य = 30,000 + 30,000 को 13%

$= 30,000 + 30,000 \times \frac{13}{100}$

$= 30,000 + 3,900$

= रु. 33,900

यहाँ खुद्रा व्यापारीले नाफा र अन्य खर्चसमेत जोडी मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको,
बिक्री मूल्य = रु. 37,000

(ग) अब विक्कीको मु.अ.क. सहितको मूल्य = रु. 37,000 + रु. 37,000 को 13%

$= $ रु. $37,000 + 37,000 \times \frac{13}{100}$

$= $ रु. $37,000 + 4,810$

$= $ रु. 41,810

(घ) मूल्य अभिवृद्धि करबापत सरकारको कोषमा जम्मा हुने रकम = रु. 4,810

(ङ) डिलरले मूल्य अभिवृद्धि करबापत सरकारी कोषमा जम्मा गर्नु पर्ने रकम निकाल्दा,

पहिलो तरिका	दोस्रो तरिका
उसले उठाएको मुअक = रु. 3,900 उसले तिरेको मुअक = रु. 3,250 सरकारी कोषमा जम्मा गर्नु पर्ने रकम = रु. 3,900 – रु. 3,250 = रु. 650	सरकारी कोषमा जम्मा गर्नु पर्ने रकम . (रु. 30,000 – रु. 25,000) को 13% $= 5,000 \times \frac{13}{100}$ = रु. 650

खुद्रा व्यापारीले मूल्य अभिवृद्धि करबापत सरकारी कोषमा जम्मा गर्नु पर्ने रकम निकाल्दा,

पहिलो तरिका	दोस्रो तरिका
उसले उठाएको मुअक = रु. 4,810 उसले तिरेको मुअक = रु. 3,900 सरकारी कोषमा जम्मा गर्नु पर्ने रकम = रु. 4,810 – रु. 3,900 = रु. 910	सरकारी कोषमा जम्मा गर्नु पर्ने रकम . (रु. 37,000 – रु. 30,000) को 13% $= 7,000 \times \frac{13}{100}$ = रु. 910

अभ्यास 2.2

1. दिइएको तालिकाका आधारमा मूल्य अभिवृद्धि कर रकम पत्ता लगाउनुहोस् :

क्र.स.	मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको मूल्य	मूल्य अभिवृद्धि करको दर	मूल्य अभिवृद्धि कर रकम
(क)	रु. 300	13%	?
(ख)	रु. 750	13%	?
(ग)	रु. 6,000	13%	?
(घ)	रु. 3,75,000	13%	?
(ङ)	रु. 20,27,000	13%	?

2. दिइएको तालिकाका आधारमा मूल्य अभिवृद्धि कर नलगाउँदाको मूल्य हिसाब गर्नुहोस् :

क्र.स.	मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको मूल्य	मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य	मूल्य अभिवृद्धि करको दर
(क)	?	रु. 3,616	13%
(ख)	?	रु. 30,510	13%
(ग)	?	रु. 3,390	13%
(घ)	?	रु. 57,630	13%
(ङ)	?	रु. 1,19,328	13%

3. तल दिइएको मूल्य व्यापारीको मू.अ.क. बाहेकको क्रयमूल्य हो। यसको आधारमा ग्राहकले तिर्ने मू.अ.क. सहितको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) VAT बाहेकको अङ्कित मूल्य
मूल्य = रु. 35,000
नाफा = 10%
मू.अ.क = 13%

(ख) VAT बाहेकको अङ्कित मूल्य
= रु. 6,500
नाफा = 15%
मू.अ.क = 13%

(ग) मूल्य = रु. 25,700
नाफा = 20%
मू.अ.क = 13%

(घ) मूल्य = रु.1,450
नाफा = 25%
मू.अ.क = 13%

4. दिइएको तालिकाका आधारमा सामानको वास्तविक मूल्य हिसाब गर्नुहोस् : (मू.अ.क.को दर 13%)

क्र.स.	मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको अङ्कित मूल्य	थप खर्च रु.	नाफा (लागतको)	मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य
(क)	घडी रु. 2,000	100	10%	?
(ख)	साइकल रु. 7,000	300	13%	?
(ग)	मोबाइल रु. 27,000	500	15%	?
(घ)	मोबाइल रु. 20,525	450	10%	?
(ङ)	ल्याप्टप रु. 1,81,500	1500	15%	?

5. एउटा पसलेले एलइडी टेलिभिजन सेटको मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक रु. 37,500 मा किनेछ । उक्त पसलेले थप खर्च रु. 500 जोडि लागत मूल्यमा 12% नाफा राखि 13% VAT लगाउँदा सो टेलिभिजनलाई उपभोक्ताले कति तिर्नुपर्छ ? हिसाब गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. दिइएको तालिकाका आधारमा अङ्कित मूल्य निकाल्नुहोस् :

क्र.स.	मूल्य अभिवृद्धि करबाहेकको अङ्कित मूल्य	थप खर्च	नाफा (लागतको)	मूल्य अभिवृद्धि करको दर	मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य
(क)	?	रु. 300	10%	13%	रु. 4,518.30
(ख)	?	रु. 500	8%	13%	रु. 15,132.96
(ग)	?	रु. 600	12%	13%	रु. 57,584.80
(घ)	?	रु. 100	15%	13%	रु. 2,079.20
(ङ)	?	रु. 1500	20%	13%	रु. 2,40,012

7. यदि एउटा विद्युतीय पानी तताउने जगको मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक कायम गरिएको मूल्यमा 15% नाफा लिई 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाउँदा रु. 2,573.01 हुन्छ भने सो जगको अङ्कित मूल्य कति होला ? नाफा र मू.अ.क. रकम कति कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एक जना पसलेले मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक रु. 27,500 मा किनेको एउटा सामान बिक्री गर्ने क्रममा नाफा जोडी मूल्य रु. 35,000 कायम गरेछन् । 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाई बेच्दा,

(क) मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य कति हुन्छ ?

(ख) यस कारोबारमा व्यापारीले कति प्रतिशत नाफा गरेको रहेछ ?

(ग) यदि बिक्री मूल्य रु. 33,000 कायम गरेको भए कति प्रतिशत नाफा कम हुन्छ ?

9. एक जना व्यापारीले मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक रु. 4,000 मा किनेर ल्याएको घडी बिक्रीका लागि 25% मूल्य बढाएर अङ्कित मूल्य निर्धारण गरेछ । उक्त घडीमा 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाउँदा,

(क) उपभोक्ताले मूल्य अभिवृद्धि करबापत कति रकम बुझाउनुपर्छ ?

(ख) यदि 20% नाफा राखी मूल्य बढाएको भए मूल्य अभिबृद्धि करमा कति रकम घटबढ हुने थियो ?

10. एक जना थोक बिक्रेताले लुगा धुने मेसिन (Washing Machine) रु. 67,000 मा 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाएर खुद्रा पसलेलाई बिक्री गऱ्यो । खुद्रा पसलेले सो मेसिन थप खर्च रु. 3,000 र लागतमा रु. 5,000 नाफासहित उपभोक्ताका घरमा पुऱ्याइदियो भने

(क) खुद्रा पसलेले कति रकम मु.अ.क. वापत तिर्नुपर्छ ?

(ख) उपभोक्ताले मूल्य अभिवृद्धि करबापत हालको दरमा कति रकम तिऱ्यो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. घडीको होलसेल पसलेले डिलरबाट एउटा घडी मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक रु. 12,000 मा किनेछ । होलसेल पसलेले मूल्य अभिवृद्धि करसहित उक्त घडी खुद्रा व्यापारीलाई रु. 16,950 मा बेचेछ । प्रत्येक तहमा मूल्य अभिवृद्धि करको दर 13% भएको आधारमा,

(क) खुद्रा व्यापारीले उक्त घडीलाई मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक कति रुपियाँ तिरेको रहेछ ?

(ख) खुद्रा व्यापारीले मूल्य अभिवृद्धि करबापत कति रकम तिरेको रहेछ ?

(ग) होलसेल पसलेले कति रकम नाफा राखेको रहेछ ?

12. होलसेलरले प्रति कुर्सी मु.अ.क. बाहेक रु. 9,000 का दरले रिटेलरलाई 15 ओटा कुर्सी बिक्री गऱ्यो । रिटेलरले उक्त कुर्सीलाई मु.अ.क. बाहेक रु. 11,500 का दरले उपभोक्तालाई सबै कुर्सी बिक्री गऱ्यो भने 15 ओटा कुर्सीको कारोबारमा 13% भ्याटका दरले,

(क) रिटेलरले कति रकम भ्याटबापत होलसेलरलाई बुझाएको रहेछ ?

(ख) रिटेलरले भ्याटबापत कति रकम उपभोक्ताबाट लिन्छन् ?

(ग) रिटेलरले सरकारलाई भ्याटबापत कति रकम जम्मा गर्नुपर्छ ?

13. होलसेलरले प्रति कुर्सी मु.अ.क. सहित रु. 10,170 का दरले रिटेलरलाई 10 ओटा कुर्सी बिक्री गऱ्यो । रिटेलरले उक्त कुर्सीलाई मु.अ.क.बाहेक रु. 11,500 का दरले उपभोक्तालाई सबै कुर्सी बिक्री गऱ्यो भने 10 ओटा कुर्सीको कारोबारमा 13% भ्याटका दरले,

(क) रिटेलरले कति रकम मु.अ.क. बापत होलसेलरलाई बुझाएको रहेछ ? उक्त कुर्सीको मु.अ.क. बाहेकको मूल्य कति रहेछ ?

(ख) रिटेलरले मु.अ.क.बापत कति रकम उपभोक्ताबाट लिन्छन् ?

(ग) रिटेलरले सरकारलाई मु.अ.क.बापत कति रकम जम्मा गर्नुपर्छ ?

14. होलसेलरले प्रति टेबुल मु.अ.क. सहित रु. 10,170 का दरले रिटेलरलाई 30 ओटा टेबुल बिक्री गऱ्यो । रिटेलरले उक्त टेबुललाई मु.अ.क.सहित रु. 12,995 का दरले उपभोक्तालाई सबै टेबुल बिक्री गऱ्यो भने 30 ओटा टेबुलको कारोबारमा 13% भ्याटका दरले,

(क) रिटेलरले कति रकम मु.अ.क.बापत होलसेलरलाई बुझाएको रहेछ ? रिटेलरले उक्त टेबुलहरूलाई मु.अ.क.बाहेक कति मूल्यमा किनेको रहेछ ?

(ख) रिटेलरले मु.अ.क.बापत कति रकम उपभोक्ताबाट लिन्छन् ? उक्त टेबुलहरूको मु.अ.क.बाहेकको मूल्य कति रहेछ ?

(ग) रिटेलरले सरकारलाई मु.अ.क.बापत कति रकम जम्मा गर्नुपर्छ ?

15. एउटा फ्रिजको मूल्य कम्पनीले रु. 30,000 कायम गरेको छ। उक्त फ्रिज कम्पनीले डिलरलाई बेच्छ, फेरि डिलरले रु. 5,000 थप गरी खुद्रा पसलेलाई बेच्छ। खुद्रा पसलेले पुनः रु. 5,000 थप गरी ज्ञान बहादुरलाई बेच्यो । 13% मूल्य अभिवृद्धि कर प्रत्येक तहमा लगाउँदा सरकारलाई कति रुपियाँ कर प्राप्त हुन्छ ?

16. एक जना डिलरले वासिङ मेसिनको मूल्य मु.अ.क. बाहेक रु. 56,000 कायम गऱ्यो । उनले उक्त वासिङ मेसिन 13% करसहित होलसेलरलाई बिक्री गरेछन् । होलसेलरले 13% भ्याटसहित उक्त मेसिन रु. 74,580 मा रिटेलरलाई बेचेछन् ।

(क) होलसेलरले कति रकम मु.अ.क.बापत तिर्नुपर्छ ?

(ख) यदि डिलरले उक्त वासिङ मेसिन किन्दा मु.अ.क.बापत रु. 6,500 तिरेको भए उसले कति रकम मु.अ.क.बापत सरकारलाई बुझाउनुपर्छ ?

(ग) रिटेलरले उपभोक्तालाई कति रुपियाँमा बेचेमा मूल्य अभिवृद्धि करबापत रु. 9,360 प्राप्त गर्न सक्छन् ।

(घ) माथिको कारोवारमा कसले सबैभन्दा बढी मु.अ.क. रकम उठाउँछन् ?

परियोजना कार्य

विद्यार्थी उपयुक्त समूहमा विभाजन हुनुहोस् । प्रत्येक समूहले अहिलेको आर्थिक वर्षको बजेट वक्तव्यको अध्ययन गर्नुहोस् र उक्त बजेट वक्तव्यबाट निम्नानुसारका सूचनाहरू सङ्कलन गरी समूहमा प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् :

(क) बजेटको आकार
(ख) बजेटमा लगाइएका विभिन्न प्रकारका कर
(ग) मूल्य अभिवृद्धि करको दर
(घ) कर छुट हुने सामान तथा सेवा
(ङ) मूल्य अभिवृद्धि कर लाग्ने वस्तु
(च) अन्य आयकर

उत्तर

1. (क) रु. 39 (ख) रु. 97.50 (ग) रु. 780 (घ) रु. 48,750
   (ङ) रु. 2,63,510
2. (क) रु. 3,200 (ख) रु. 27,000 (ग) रु. 3,000 (घ) रु. 51,000
   (ङ) रु. 1,05,600
3. (क) रु. 43,505 (ख) रु. 8,446.75 (ग) रु. 34,849.20 (घ) रु. 2,048.13
4. (क) रु. 2,610.30 (ख) रु. 9,321.37 (ग) रु. 35,736.25 (घ) रु. 26,071.93
   (ङ) रु. 2,37,808.50
5. रु. 48,092.80
6. (क) रु. 3,335 (ख) रु. 11,900 (ग) रु. 44,900
   (घ) रु. 1,500 (ङ) रु. 1,75,500
7. रु. 297 र रु. 296.01
8. (क) रु. 39,500 (ख) 27.27% (ग) 26.67%
9. (क) रु. 650 (ख) रु. 26 कम हुनेथियो ।
10. (क) रु. 8,710 (ख) रु. 9,750
11. (क) रु. 15,000 (ख) रु. 1,950 (ग) रु. 3,000
12. (क) रु. 17,550 (ख) रु. 22,425 (ग) रु. 4,875
13. (क) रु. 11,700 र रु. 9,000 (ख) रु. 14,950 (ग) रु. 3,250
14. (क) रु. 35,100 र रु. 2,70,000 (ख) रु. 44,850 र रु. 3,45,000
    (ग) रु. 9,750
15. रु. 5,200
16. (क) रु. 7,280 (ख) रु. 780 (ग) रु. 72,000
    (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 3

कमिसन र लाभांश
(Commission and Dividend)

3.1 कमिसन (Commission)

क्रियाकलाप 1

कक्षाका साथीहरूमध्येबाट तीनओटा समूह बनाउनुहोस् । समूहहरूमध्ये पहिलो समूहको नेतृत्व गर्नेलाई बिक्रीकर्ताका रूपमा जग्गाधनी (नाम : धनिराम), दोस्रो समूहको नेतृत्व गर्नेलाई खरिदकर्ताका रूपमा जग्गा लिने व्यक्ति (नाम : आदिनाथ) र तेस्रो समूहको नेतृत्व गर्नेलाई मध्यस्थकर्ताका रूपमा एजेन्ट (नाम : सविना) बनाई अभिनय गर्नुहोस् ।

कुनै वस्तु वा सेवाको बिक्रीकर्ता र खरिदकर्ताका बिचमा मध्यस्थकर्ताको भूमिका निर्वाह गर्ने व्यक्तिलाई एजेन्ट (Agent) भनिन्छ । यसरी मध्यस्थकर्ताको भूमिका निर्वाह गरेबापत नियमबमोजिम बिक्री मूल्यको निश्चित प्रतिशतका दरले एजेन्टले पाउने रकमलाई कमिसन भनिन्छ । एजेन्टले त्यस्तो रकम खरिदकर्ता वा बिक्रीकर्ता वा दुवैबाट लिन सक्छ । कमिसन लिँदा दिँदा बिक्री मूल्यलाई आधार मानिन्छ । कमिसनलाई प्रतिशतमा व्यक्त गरिन्छ । जग्गाको कारोबारमा, बैङ्क तथा बित्तीय संस्थाहरूमा, बिमा कम्पनीहरूमा, सामान किनमेल आदि जस्ता आर्थिक कारोबार हुने व्यवसायहरूमा कमिसनको गणना गरिन्छ ।

उदाहरण 1

एजेन्टले रु. 25,00,000 मा जग्गा बेचिदिएबापत 5% कमिसन पाउँछन् भने,

(क) एजेन्टले कमिसनबापत कति रकम पाउने रहेछन् ?

(ख) कमिसनपछि जग्गाधनीका हातमा कति रकम पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ जग्गाको बिक्री मूल्य = रु. 25,00,000

कमिसन दर = 5%

(क) कमिसनबापतको रकम = ?

(ख) जग्गाधनीले पाउने रकम = ?

(क) हामीलाई थाहा छ,

कमिसन रकम = रु. 25,00,000 को 5%

$= रु.\ 25,00,000 \times \frac{5}{100}$

$= रु.\ 1,25,000$

∴ कमिसनबापतको रकम = रु.1,25,000

(ख) जग्गाधनीले पाउने रकम = कमिसनपछिको मूल्य = बिक्री मूल्य – कमिसन रकम

= 25,00,000 – 1,25,000

∴ जग्गाधनीले पाउने रकम = रु. 23,75,000

उदाहरण 2

एउटा कम्पनीले एजेन्टलाई दिने कमिसन दर निम्नानुसार उल्लेख गरिएको छ :

रु. 15,00,000 सम्मको बिक्रीमा 0.5%

रु. 15,00,000 भन्दा माथि रु. 25,00,000 सम्मको बिक्रीमा 1%

रु. 25,00,000 भन्दा माथि रु. 40,00,000 सम्मको बिक्रीमा 1.5%

रु. 40,00,000 भन्दा माथिको बिक्रीमा 2%

माथिको कमिसनको दरअनुसार रु. 60 लाखको बिक्रीमा एजेन्टले कमिसनबापत जम्मा कति रकम पाउँछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ बिक्री मूल्य रु.60,00,000 लाई कमिसनको सीमाअनुसार टुक्र्याएर लेख्दा,

रु.60,00,000 = रु.15,00,000 + रु.10,00,000 + रु.15,00,000 + रु.20,00,000

↓ 0.5% ↓ 1% ↓ 1.5% ↓ 2%

जम्मा कमिसन रकम = रु.15,00,000 को 0.5% + 10,00,000 को 1% + रु. 15,00,000 को 1.5% + रु. 20,00,000 को 2%

$$= रु.\left(15,00,000 \times \frac{0.5}{100}\right) + \left(10,00,000 \times \frac{1}{100}\right) + \left(15,00,000 \times \frac{1.5}{100}\right) + \left(20,00,000 \times \frac{2}{100}\right)$$

= 7,500 + 10,000 + 22,500 + 40,000

∴ जम्मा कमिसन रकम = रु. 80,000

उदाहरण 3

एउटा निर्माण सामग्री पसलमा काम गर्ने कर्मचारीको मासिक तलब रु. 12,000 छ । उनले सामान बिक्री गरेबापत कमिसन पनि पाउँछन् । उनले एक महिनामा रु. 4,75,000 को निर्माण सामग्री बिक्री गरेछन् । यदि उनले उक्त महिनामा कमिसनसहित रु.19,125 कमाएछन् भने कमिसनबापत मात्र कति प्रतिशत आम्दानी गरेका रहेछन् ? निकाल्नुहोस् ।

समाधान

बिक्री मूल्य = रु. 4,75,000

पसलका कर्मचारीको मासिक तलब = रु. 12,000

कर्मचारीको कमिसनसहितको मासिक आम्दानी = रु. 19,125

∴ कमिसन रकम = रु. 19,125 – रु. 12,000

= रु. 7,125

अब कमिसन दर $= \dfrac{\text{कमिसन रकम}}{\text{बिक्री मूल्य}} \times 100\%$

$= \dfrac{7,125}{4,75,000} \times 100\%$

$= 1.5\%$

उदाहरण 4

एउटा पुस्तक पसलमा काम गर्ने व्यक्तिको मासिक तलब रु. 16,000 छ । उनले महिनामा रु. 5,00,000 भन्दा बढीको पुस्तक बिक्री गर्न सकेमा उनलाई 2% कमिसन दिने गरिन्छ । यदि उक्त पसलको वैशाख महिनाको जम्मा बिक्री रु. 7,25,000 भए, काम गर्ने व्यक्तिको उक्त महिनाको जम्मा आम्दानी कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ कर्मचारीको मासिक तलब = रु. 16,000

वैशाख महिनाको बिक्री रकम = रु. 7,25,000

कमिसनको दर = 2%

कर्मचारीको मासिक आम्दानी = ?

जम्मा बिक्री रकम रु.7,25,000 लाई कमिसन सीमाअनुसार लेख्दा,

रु. 7,25,000 = रु. 5,00,000 + रु. 2,25,000

कमिसन = 2%

अब कमिसन रकम = रु. 250000 को 2%

$= 2,50,000 \times \frac{2}{100}$

= रु.5,000

तसर्थ उक्त कर्मचारीको वैशाख महिनाको जम्मा आम्दानी = रु. (16,000 + 5000)

= रु. 21,000

अभ्यास 3.1

1. दिइएको तालिकाका आधारमा कमिसन रकम पत्ता लगाउनुहोस् :

क्र.स.	विवरण	जम्मा बिक्री मूल्य	कमिसनको दर
(क)	जग्गा	रु. 1 करोड 50 लाख	5%
(ख)	घर	रु. 2 करोड	3%
(ग)	फोटोकपी मेसिन	रु. 4 लाख	7.5%
(घ)	सेयर कारोबार	रु. 5 करोड 25 लाख	2%

2. एजेन्टले रु. 1,40,00,000 को घर बेचिदिएबापत 5% कमिसन पाउँछ भने

(क) एजेन्टले पाउने कमिसन रकम कति होला ? हिसाब गर्नुहोस् ।

(ख) घरधनीले पाउने रकम कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा मोटरसाइकल सोरुममा रु. 20,000 मासिक हिसाबले तलब पाउने 10 जना कर्मचारी छन् । उनीहरूले मासिक कुल बिक्रीको 0.25% का दरले कमिसन पाउने रहेछन् । यदि असोज महिनामा जम्मा रु. 1,35,00,000 को कारोबार भएछ भने

(क) उक्त सोरुमले कमिसनबापत कर्मचारीलाई जम्मा कति रुपियाँ दिनुपर्ने रहेछ ? हिसाब गर्नहोस् ।

(ख) एक जना कर्मचारीको आम्दानी उक्त महिनाको तलबभन्दा कति प्रतिशतले बढी भएछ ?

4. एउटा प्लास्टिकजन्य सामान उत्पादक कम्पनीले रु. 6,00,000 सम्मको बिक्रीमा 1%, रु. 6,00,000 लाखभन्दा बढी रु. 10,00,000 सम्मको बिक्रीमा 1.5% र रु. 10,00,000 भन्दा माथिको बिक्रीमा 2% कमिसन दिने रहेछ भने तल दिइएका बिक्री रकममा विक्रेताले प्राप्त गर्ने कमिसन निकाल्नुहोस् :

(क) रु. 4,45,600 (ख) रु. 7,25,000 (ग) रु. 15,75,000

5. एउटा कस्मेटिक पसलमा काम गर्ने कर्मचारीको मासिक तलब रु. 17,000 छ। उसले जम्मा बिक्री रकममा केही प्रतिशत कमिसन पाउँछ। यदि मङ्सिर महिनामा रु. 10,00,000 बिक्री गरेर उसले तलबसहित जम्मा रु. 30,000 आम्दानी गरेछ भने पसलबाट कति प्रतिशत कमिसन पाएको रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

नजिकैको एउटा कम्पनी वा पसलमा जानुहोस् । त्यहाँका कर्मचारीहरूसँग वा सञ्चालकसँग निम्नलिखित कुराका बारेमा सोधपुछ गर्नुहोस् र प्रतिवेदन तयार गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) बिक्रीका प्रावधान

(ख) कर्मचारीका लागि बिक्रीबापतको थप सुविधाको योजना

उत्तर

1. (क) रु. 7,50,000	1. (ख) रु. 6,00,000	1. (ग) रु.30,000	1. (घ) रु.10,50,000
2. (क) रु.7,00,000	2. (ख) रु.1,33,00,000	3. (क) रु.33,750	(ख) 16.88%
4. (क) रु.4,456	4. (ख) रु.7,875	4. (ग) रु.23500	5. 1.3%

3.2 बोनस (Bonus)

क्रियाकलाप 1

24 पुस 2077 को नयाँ पत्रिका दैनिकमा प्रकाशित "कर्मचारीलाई 6 करोड बोनस वितरण गर्दै आयल निगम" शीर्षकको समाचारको सम्पादित अंश यसप्रकार छ :

> नेपाल आयल निगमले कर्मचारीलाई बोनस वितरण गर्ने भएको छ । नाफा भएको वर्ष बोनस वितरण गर्ने कानुनी प्रावधानलाई टेकेर निगम व्यवस्थापनले कर्मचारीलाई बोनस वितरण गर्ने निर्णय गरेको हो । कर्मचारीलाई बोनस खुवाउन निगमले सरकारको अनुमति लिनुपर्छ ।
>
> आयल निगमले दुई आर्थिक वर्ष (2075/076 र 2076/077) को बोनसबापत छुट्याएको 29 करोड 9 लाख 86 हजार रुपियाँबाट करिब 6 करोड रुपियाँ कर्मचारीलाई वितरण गर्न लागेको हो । निगमको आधिकारिक ट्रेड युनियनका अध्यक्ष गोपाल राईकाअनुसार सहायकस्तरका कर्मचारीलाई 2 महिना 15 दिनको र अधिकृत वा सोभन्दा माथिल्लो स्तरका कर्मचारीलाई 2 महिनाको तलब बराबरको रकम बोनस वितरण गर्ने निर्णय भएको छ । कर्मचारीलाई बोनस (Bonus) वितरण गर्न सके कार्यसम्पादन झन प्रभावकारी हुने विश्वास लिएका छौँ, उनले भने, "अर्थले यस पटक स्वीकृति दिनेमा आशावादी छौँ ।"
>
> बोनस ऐनले खुद नाफाको 1 प्रतिशत हुन आउने रकम सार्वजनिक संस्थानका कर्मचारीलाई बोनसबापत वितरण गर्न पाउने व्यवस्था गरेको छ । ऐनले अधिकतम 3 महिनाको तलब बराबरको रकम एक आर्थिक वर्षमा कर्मचारीले बोनसबापत पाउने व्यवस्थासमेत गरेको छ । निगमले बोनसबाट छुट्याएको रकमबाट कर्मचारीलाई वितरण गरी बाँकी रकमको 80% सरकारी कोषमा र 20% निगमको कल्याणकारी कोषमा जम्मा गर्नुपर्ने छ । दुवै कोषमा 22 करोड रुपियाँभन्दा बढी रकम निगमले जम्मा गर्ने छ ।

माथिको समाचारको अंश अध्ययन गरी तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) कम्पनीले बोनस किन दिन्छ होला ?

(ख) केलाई आधार मानी बोनस वितरण गरिएको हुन्छ होला ?

(ग) के कम्पनीले मुनाफा कमाउन नसक्दा पनि बोनस वितरण गर्छ ?

> कुनै कर्मचारीले आफू कार्यरत संस्थाबाट नियमित रूपमा पाउने पारिश्रमिक (तलब) का अतिरिक्त उक्त कर्मचारीले आफू कार्यरत संस्थाले नाफा कमाउन सकेको कारणले कार्यरत कर्मचारीलाई उक्त नाफाको निश्चित प्रतिशत रकम वार्षिक रूपमा एकमुष्ट प्रोत्साहन स्वरूप प्रदान गरिने रकमलाई बोनस (Bonus) भनिन्छ । नेपालको सन्दर्भमा हेर्ने हो भने नेपाल विद्युत् प्राधिकरण, नेपाल टेलिकम, नेपाल आयल निगम, नेपाल खानेपानी संस्थान, विभिन्न बैङ्कलगायत अन्य निजी संस्थानहरूले मुनाफा गरेमा त्यस्ता संस्थानहरूमा काम गर्ने कर्मचारीहरूले ऐन नियमअनुसार वार्षिक रूपमा एकमुष्ट बोनस (Bonus) पाउने गर्छन् ।

उदाहरण 1

एउटा उद्योगले एक वर्षमा रु. 40,00,000 मुनाफा गरेछ । मुनाफा गरेको रकमको 60% रकम त्यस उद्योगमा कार्यरत 80 जना कर्मचारीलाई बोनस स्वरूप बराबर रकम वितरण गर्ने निर्णय गरेछ भने प्रत्येक कर्मचारीले उक्त वर्ष कति रकम बोनसबापत प्राप्त गर्ने रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

जम्मा मुनाफा गरेको रकम = रु. 40,00,000

वितरण गरिने बोनस रकम = रु. 40,00,000 को 60%

$= 40,00,000 \times \frac{60}{100}$

= रु. 24,00,000

जम्मा कर्मचारी सङ्ख्या = 80 जना

एक जना कर्मचारीले पाउने बोनस = रु. $\frac{24,00,000}{80}$

= रु.30,000

अतः प्रत्येक कर्मचारीले उक्त वर्षमा तलब बाहेक रु.30,000 बोनस रकम प्राप्त गर्छन् ।

उदाहरण 2

एउटा होटलले एक वर्षमा रु. 50,00,000 मुनाफा गरेछ । मुनाफाको केही प्रतिशत सो होटलमा कार्यरत 55 जना कामदारलाई बराबर रु. 50,000 का दरले बोनस वितरण गरेछ भने सो होटलले मुनाफाको कति प्रतिशत लाभांश वितरण गरेको होला, हिसाब गर्नुहोस् ।

समाधान

होटलको जम्मा वार्षिक मुनाफा = रु.50,00,000

प्रति कर्मचारी वितरण गरिएको बोनस = रु.50,000

जम्मा कर्मचारी सङ्ख्या = 55 जना

बोनस स्वरूप वितरण गरिएको जम्मा रकम = 55 × रु.50,000

= रु.27,50,000

∴ वितरण गरिएको लाभांश प्रतिशत = रु. $\frac{27,50,000}{50,00,000} \times 100\%$

= 55%

3.3 डिभिडेन्ड (Dividend)

क्रियाकलाप 2

वि.सं. 2077 चैत्र 14 गते गोरखापत्र अनलाइनमा प्रकाशित 'टेलिकमको लाभांश पारित' शीर्षकको समाचारको सम्पादित अंश यस प्रकार छ :

> नेपाल दुरसञ्चार कम्पनीले आर्थिक वर्ष 2076/77 को मुनाफाबाट प्रति सेयर 40 रुपियाँका दरले सेयरधनीलाई नगद लाभांश वितरण गर्ने प्रस्ताव पारित गरेको छ ।

माथिको समाचार अंश अध्ययन गरी तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) सेयर भनेको के हो ?

(ख) तपाईं अथवा, तपाईंको परिवारमा कुनै सदस्यले कुनै कम्पनीको सेयर खरिद गर्नुभएको छ ?

(ग) डिभिडेन्ड भनेको के हो ? केलाई आधार मानी कम्पनीले डिभिडेन्ड वितरण गर्छ ?

(घ) कम्पनीले प्रत्येक वर्ष गरेको मुनाफाको केही हिस्सा सेयर धनीहरूलाई वितरण गर्ने गर्छ, तपाईंले वा तपाईंको परिवारले त्यस्तो रकम प्राप्त गर्नुभएको छ ?

> कुनै कम्पनी वा नाफामूलक संस्थामा सेयर लगानी गरेका आधारमा संस्थाले कमाएको नाफा रकमको केही प्रतिशत रकम सेयरधनी (Share holder) लाई प्रदान गरिन्छ भने उक्त रकमलाई डिभिडेन्ड (Dividend) भनिन्छ । डिभिडेन्ड वितरण गर्दा संस्थानको खुद नाफामध्ये छुट्याइएको निश्चित प्रतिशत रकमलाई सेयर सङ्ख्याले भाग गरेर वितरण गरिन्छ । यस्तो डिभिडेन्ड (Dividend) दुई किसिमको हुन्छ :
>
> (क) नगद डिभिडेन्ड (Cash dividend) र
>
> (ख) सेयर डिभिडेन्ड (Share dividend)। बोनस र डिभिडेन्ड दुवै लाभांश हुन् ।

उदाहरण 3

यदि एउटा लघुवित्त कम्पनीमा रु.100 का दरले 6,00,000 कित्ता सेयर रहेछ र उक्त संस्थाले एक वर्षमा रु. 40,00,000 मुनाफा गरेछ । यदि संस्थाले मुनाफाको 20% नगद डिभिडेन्ड (Cash dividend) सेयर धनीहरूलाई वितरण गर्ने निर्णय गरेछ भने उक्त कम्पनीको 60 कित्ता सेयर हुने व्यक्तिले कति नगद डिभिडेन्ड (Cash dividend) प्राप्त गर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ जम्मा मुनाफा = रु. 40,00,000

वितरण गरिने जम्मा नगद डिभिडेन्ड = रु. 40,00,000 को 20%

$$= 40,00,000 \times \frac{20}{100}$$

= रु. 8,00,000

फेरि जम्मा शेयर कित्ता सङ्ख्या = 6,00,000

$$1 \text{ कित्ता सेयरको नगद डिभिडेन्ड} = \frac{8,00,000}{6,00,000}$$

= रु. 1.33

अत : 60 कित्ता सेयर हुने व्यक्तिले उक्त कम्पनीबाट प्राप्त गर्ने डिभिडेन्ड = 60 × रु. 1.33

= रु. 80

अभ्यास 3.2

1. दिइएको तालिकाका आधारमा लाभांश हिसाब गर्नुहोस् :

कम्पनी	मुनाफा	लाभांशको दर
(क)	रु.60 लाख	25%
(ख)	रु. 2 करोड 50 लाख	67.5%
(ग)	रु.80 लाख	48%
(घ)	रु.9 करोड	55%

2. एउटा कपडा उद्योगले वि.सं. 2076 सालमा रु. 5 लाख 60 हजार मुनाफा गरेछ । मुनाफा गरेको रकमको 60% रकम आफ्नो उद्योगमा काम गर्ने 105 जना कर्मचारीलाई बोनस स्वरूप वितरण गर्ने निर्णय गरेछ भने प्रत्येक कर्मचारीले कति कति रकम प्राप्त गर्ने भएछन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा बिमा कम्पनीले मुनाफाको दुई तिहाइ रकम आफ्ना 150 जना कर्मचारीलाई बराबर हुनेगरी रु. 40,000 का दरले बोनस स्वरूप वितरण गर्ने निर्णय गरेछ भने त्यस वर्ष सो कम्पनीको जम्मा मुनाफा कति रहेछ ?

4. दिइएको तालिकाबाट कुल डिभिडेन्ड (Total dividend) र प्रतिसेयर कित्ता डिभिडेन्ड (Per share dividend) हिसाब गर्नुहोस् :

कम्पनी	जम्मा सेयर कित्ता	डिभिडेन्डको दर	खुद नाफा
(क)	4,50,000	40%	रु.50,00,000
(ख)	1,15,62,486	55.5%	रु.12,00,00,000
(ग)	3,28,50,000	23.5%	रु.5,20,60,000
(घ)	21,63,25,030	60%	रु.2,75,67,36,894

5. सूर्यलक्ष्मी सहकारी संस्थामा रु.100 का दरले 13,63,497 कित्ता सेयर थियो । ममताको उक्त सहकारी संस्थामा 350 कित्ता सेयर छ । संस्थाले एक वर्षमा रु. 1 करोड 20 लाख मुनाफा कमाएछ र सेयर धनीहरूलाई मुनाफाको 45% नगद डिभिडेन्ड दिने निर्णय गरेछ भने ममताले कति नगद डिभिडेन्ड (Dividend) पाउँछिन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. प्रति कित्ता रु. 100 पर्ने 22,39,440 कित्ता सेयर भएको एउटा बिमा कम्पनीले वार्षिक रु. 1,52,05,674 मुनाफा गरेछ । सो कम्पनीको सञ्चालक समितिबाट मुनाफाको 65% नगद डिभिडेन्ड (Cash dividend) दिने निर्णय भएछ भने 280 कित्ता सेयर भएको एक जना सेयर धनीले जम्मा कति नगद डिभिडेन्ड पाउँछन् होला, हिसाब गर्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

आफ्नो कक्षाकोठाका साथीहरूलाई 5 ओटा समूहमा विभाजन गरी विभिन्न 5 ओटा सार्वजनिक वा निजी संस्थानहरूले आफ्ना कर्मचारीलाई वितरण गर्ने बोनस र कुनै 5 ओटा कम्पनीको सेयरअनुसार वितरण हुने डिभिडेन्डलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) रु. 1,5,00,000 (ख) रु. 1,68,75,000 (ग) रु. 38,40,000
(घ) रु. 4,95,00,000

2. रु. 3,200

3. रु. 90,00,000

4. (क) रु. 20,00,000 र रु. 4.44 (ख) रु. 6,66,00,000 र रु. 5.76
(ग) रु. 1,22,34,100 र रु. 0.37 (घ) रु. 1,65,40,42,136.4 र रु. 7.65

5. रु. 1,386.14

6. रु. 1,235.77

पाठ 4

घरायसी अङ्कगणित (Household Arithmetic)

4.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गरी समाधान गर्नुहोस् :

(क) 25 ओटा कापीको मूल्य रु. 500 पर्छ भने एउटा कापीको मूल्य कति पर्छ ?

(ख) एक दर्जन कापीको मूल्य रु. 600 पर्छ भने 7 ओटा कापीको मूल्य कति पर्छ ?

(ग) आफूसँग भएको रु. 750 मा 10% रकम थप्ने हो भने कति रुपियाँ हुन्छ ?

(घ) रु. 500 को क्याल्कुलेटरमा 2% छुट दिँदा कति रकम छुट हुन्छ ? छुटपछिको मूल्य कति हुन्छ ?

ऐकिक नियम, छुट रकम, थप रकमसम्बन्धी हिसाब अगिल्ला कक्षामा अध्ययन गरिसकेका छौँ । जसको प्रयोगबाट हाम्रा दैनिक जीवनमा घरमा खपत गरिने बिजुली, पानी, टेलिफोन बिलको महसुल तिर्ने वेलामा गणितीय आधारभूत क्रियाहरूबाट हिसाब गर्न सहज हुन्छ ।

विद्युत् महसुल, पानीको महसुल, टेलिफोन महसुल, ट्याक्सी भाडा आदि जस्ता घरायसी खर्चहरू आफ्नो मोबाइलमा हुने एप्स वा कम्प्युटर सेटको प्रयोग गरेर अनलाइन (online) माध्यमबाट पनि भुक्तानी गर्न सकिन्छ । आजकाल सूचना प्रविधिले गर्दा विभिन्न महसुलहरू, शुल्कहरू भुक्तानी गर्न सम्बन्धित कार्यालयमा भौतिक रूपमा उपस्थित भई घन्टौँ पङ्क्तिमा रहनुपर्ने बाध्यात्मक अवस्थाको अन्त्य हुँदै गएको छ ।

4.1 बिजुलीको खपतसम्बन्धी घरायसी खर्चको हिसाब (Household expenses for use of electricity)

क्रियाकलाप 1

नेपाल विद्युत् प्राधिकरणले उपलब्ध गराउने विद्युत् सेवाबापत लाग्ने महसुल दर विद्युत् मिटर क्षमताअनुसार फरक फरक निर्धारण गरेको छ ।

मिति २०७८/७/८ मा बसेको विद्युत् नियमन आयोगको १४० औँ बैठकबाट निर्धारित

विद्युत् उपभोक्ता महसुल दर

किलोवाट-घण्टा (युनिट)	5 एम्पियर		15 एम्पियर		30 एम्पियर		60 एम्पियर	
	सेवा शुल्क (रु.)	इनर्जी शुल्क (रु.)	सेवा शुल्क (रु.)	इनर्जी शुल्क (रु.)	सेवा शुल्क (रु.)	इनर्जी शुल्क (रु.)	सेवा शुल्क (रु.)	इनर्जी शुल्क (रु.)
0 – 20	30	0	50	4.00	75	5	125	6
21 – 30	50	6.50	75	6.50	100	6.50	125	6.50
31 – 50	50	8.00	75	8.00	100	8.00	125	8.00
51 – 100	75	9.50	100	9.50	125	9.50	150	9.50
101 – 250	100	9.50	125	9.50	150	9.50	200	9.50
250 भन्दा माथि	150	11.00	175	11.00	200	11.00	250	11.00

नोट: 5 एम्पियरका ग्राहकको हकमा यदि मासिक 20 किलोवाट-घण्टा: युनिटभन्दा बढी खपत गरेमा 1 देखि 20 किलोवाट-घण्टा: युनिटसम्मको इनर्जी शुल्क रु. 3.00 प्रति युनिटका दरले लाग्ने छ ।

माथिको महसुल दर र सँगैको बिल अध्ययन गरी दिइएको प्रश्नहरू सम्बन्धमा कक्षाकोठामा साथीहरूबिच छलफल गर्नुहोस् :

नोट : किलोवाटलाई छोटकरीमा कि.वा. लेखिन्छ ।

(क) दिइएको बिजुलीको बिल कुन महिनाको हो ?

(ख) बिलअनुसार कति क्षमताको मिटर जडान गरिएको रहेछ ?

(ग) तपाईंको घरमा कुन क्षमताको मिटर जडान गरिएको छ ?

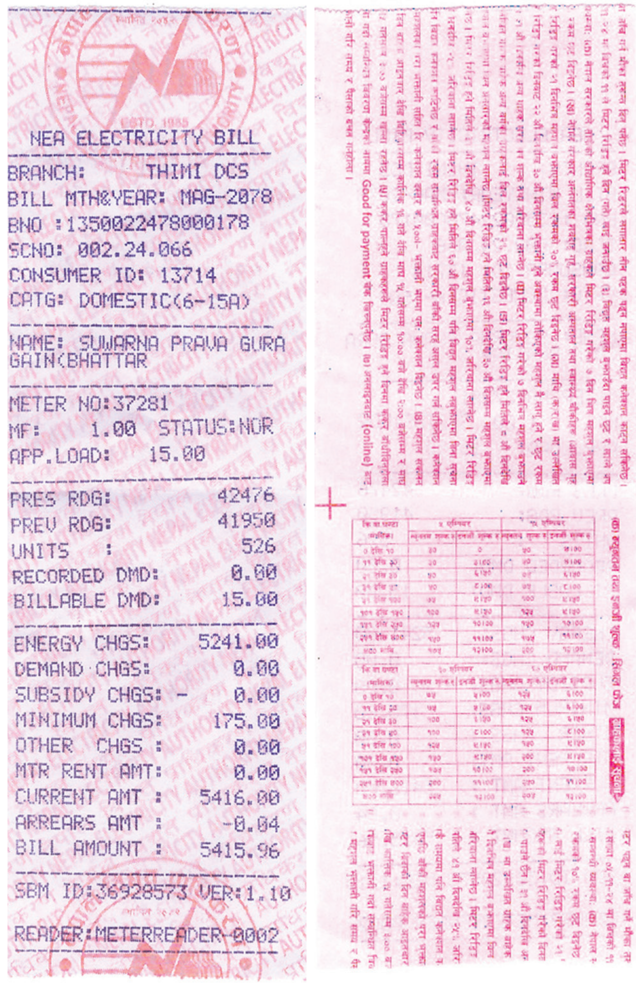
(घ) सो महिनामा यस बिलमा कति युनिट विद्युत खपत भएको देख्न सकिन्छ ?

(ङ) यस बिलअनुसार न्यूनतम शुल्कबापत कति तिर्नुपर्ने देखिन्छ ?

(च) तपाईंको घरमा जडान गरिएको मिटरको न्यूनतम महसुल कसरी हिसाब गर्नुहुन्छ ?

(छ) बिलमा इनर्जी शुल्क कति उठेछ ?

(ज) माथिको महसुल दर तालिकामा न्यूनतम शुल्क (Minimum charge) भन्नाले के बुझिन्छ ? इनर्जी शुल्क (energy charge) भन्नाले के बुझिन्छ ?



(झ) तपाईंलाई हाल प्रयोगमा ल्याइएको स्वचालित मेसिनबाट दिने विद्युत् बिलमा कुन कुन विवरण उल्लेख गरिएको हुन्छ ?

(ञ) तपाईंले मिटर रिडरबाट प्राप्त गर्नुभएको बिलमा उल्लिखित महसुल कसरी हिसाब गरिएको होला ?

(ट) यस बिलअनुसार कुन मितिमा मिटर रिडिङ भएको रहेछ ?

मिति २०७८/७/८ मा बसेको विद्युत् नियमन आयोगको १४० औँ बैठकबाट निर्धारित विद्युत् उपभोक्ता महसुल दरअनुसार गार्हस्थवर्ग (सिङ्गल फेज) विद्युत् खपत गरेबापतको शुल्क निम्नअनुसार बिलिङ गरिन्छ :

बिलिङ गर्ने तरिका (5 एम्पियरका लागि)			
सि.न.	**विद्युत खपत युनिट**	**दर (प्रति युनिट रु.)**	**बिलिङ गर्ने तरिका**
1.	0-20	0.00	न्यूनतम शुल्क रु. 30 लाग्ने र इनर्जी शुल्कबापतको महसुल नलाग्ने
2.	21 देखि 30 युनिटसम्म	6.50	**न्यूनतम शुल्क :** रु. 50 लाग्ने र **इनर्जी शुल्क :** 20 युनिटसम्म प्रति युनिट रु. 3 र 21 युनिटदेखि 30 युनिटसम्मको प्रतियुनिट रु. 6.50 का दरले महसुल लाग्ने
3.	31 देखि 50 युनिटसम्म	8.00	**न्यूनतम शुल्क** : रु. 50 लाग्ने र **इनर्जी शुल्क** : 20 युनिटसम्म प्रति युनिट रु. 3 ● 21 युनिटदेखि 30 युनिटसम्मको प्रतियुनिट रु. 6.50 ● 31 युनिटदेखि 50 युनिटसम्मको प्रतियुनिट रु. 8.00 का दरले महसुल लाग्ने
4.	51 देखि 100 युनिटसम्म	9.50	**न्यूनतम शुल्क** : रु. 75 लाग्ने र **इनर्जी शुल्क :** 20 युनिटसम्म प्रति युनिट रु. 3 ● 21 युनिटदेखि 30 युनिटसम्मको प्रतियुनिट रु. 6.50 ● 31 युनिटदेखि 50 युनिटसम्मको प्रतियुनिट रु. 8.00 ● 51 युनिटदेखि 100 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 9.50 का दरले लाग्ने
5.	101 देखि 250 युनिटसम्म	9.50	**न्यूनतम शुल्क** : रु. 100 लाग्ने र **इनर्जी शुल्क** : 20 युनिटसम्म प्रति युनिट रु. 3 ● 21 युनिटदेखि 30 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 6.50 ● 31 युनिटदेखि 50 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 8.00 ● 51 युनिटदेखि 250 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 9.50 का दरले महसुल लाग्ने

6.	250 भन्दा माथि	11.00	**न्यूनतम शुल्क** : रु. 150 लाग्ने र **इनर्जी शुल्क** : 20 युनिटसम्म प्रति युनिट रु. 3 ● 21 युनिटदेखि 30 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 6.50 ● 31 युनिटदेखि 50 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 8.00 ● 51 युनिटदेखि 250 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 9.50 ● 251 युनिटदेखि माथि रु. 11.00 का दरले महसुल लाग्ने
7.	400 युनिटभन्दा माथि	12.00	**न्यूनतम शुल्क** : रु. 175 लाग्ने र **इनर्जी शुल्क** : 1 देखि 20 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 3 ● 21 युनिटदेखि 30 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 6.50 ● 31 युनिटदेखि 50 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 8.00 ● 51 युनिटदेखि 150 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 9.50 ● 151 युनिटदेखि 250 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 10.00 ● 251 युनिटदेखि 400 युनिटसम्मको प्रति युनिट रु. 11.00 का दरले महसुल लाग्ने ● 400 युनिटदेखि माथिको खपतमा रु. 12.00 प्रति युनिटका दरले महसुल लाग्ने

नोट : यसै प्रकारले 15, 30 र 60 एम्पियरको बिलिङ गरिने छ ।

उक्त विनियमावलीमा ग्राहकले महसुल बुझाउँदा निम्नानुसार छुट तथा जरिवानाको व्यवस्था गरिएको छ :

1. मिटर रिडिङ गरेको मितिले 7 दिनभित्र महसुल बुझाएमा बिल रकमको 2% छुट हुने
2. मिटर रिडिङ गरेको मितिले 8 औँ दिनदेखि 15 औँ दिनभित्र महसुल बुझाएमा बिलअनुसार
3. मिटर रिडिङ गरेको मितिले 16 औँ दिनदेखि 30 औँ दिनसम्म विद्युत् महसुल बुझाएमा बिल रकमको 5% थप दस्तुर (जरिवाना) लाग्ने
4. मिटर रिडिङ गरेको मितिले 31 औँ दिनदेखि 40 औँ दिनसम्म विद्युत् महसुल बुझाएमा बिल रकमको 10% थप दस्तुर (जरिवाना) लाग्ने
5. मिटर रिडिङ गरेको मितिले 41 औँ दिन देखि 60 औँ दिनसम्म विद्युत् महसुल बुझाएमा बिल रकमको 25% थप दस्तुर (जरिवाना) लाग्ने
6. मिटर रिडिङ गरेको मितिले 60 औँ दिनसम्म पनि विद्युत् महसुल नबुझाएमा बिना सूचना जुनसुकै समयमा पनि विद्युत् काटिने । कनेक्सन र बाँकी रकम सम्बन्धित ग्राहकबाट सरकारी बाँकी सरह असूल उपर गरिने र रिकनेक्सन दस्तुर रु. 500 लाग्ने ।

आफ्नो घरमा जडान गरिएको मिटरको इनर्जी क्षमताअनुसार नेपाल विद्युत् प्राधिकरणको महसुल दर फरक फरक हुन्छ । बढी इनर्जी क्षमताको मिटर जडान गर्दा न्यूनतम महसुल पनि बढी नै बुझाउनु पर्छ । त्यस्तै जति बढी विद्युत् खपत गऱ्यो त्यति नै थप महसुल बुझाउनु पर्छ । महसुल हिसाब हुँदा सेवा प्रदायक संस्थाले पाउने शुल्क विद्युत् उपभोग गरेबापत लाग्ने शुल्क भन्ने बुझिन्छ । हाल नेपाल विद्युत् प्राधिकरणले मिटर रिडिङ गर्न र ग्राहकलाई विद्युत् महसुल भुक्तान गर्नका लागि सूचना प्रविधि (IT) को प्रयोगलाई बढी प्राथमिकतामा राखेको पाइन्छ ।

विद्युत् महसुल मिटर रिडिङ गरेको मितिले एक हप्ताभित्र बुझाएमा छुट पाइने, एक हप्ता नाघेर 15 दिनसम्ममा बुझाएमा छुट नपाइने अर्थात् बिलअनुसार हुने, 15 दिन पछि बुझाएमा जरिवाना लाग्ने तथा 60 दिनसम्म पनि महसुल नबुझाएमा विद्युत् प्राधिकरणले जुनसुकै वेला बिजुलीको लाइन काट्न सक्ने र पुनः जडान शुल्क लाग्ने व्यवस्था नियममा उल्लेख गरिएको छ ।

उदाहरण 1

5 एम्पियर इनर्जी क्षमताको मिटर जडान गरिएको रामवरणका घरको वि.सं. 2078 साल पुस महिनाको बिजुलीको बिलका निम्नानुसार दुईओटा विवरणका आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर हिसाब गरी पत्ता लगाउनुहोस् :

हालको अङ्क (PRESENT RDG) = 42973

साबिक अङ्क (PREVIOUS RDG) = 42828

यहाँ बिलमा RDG भन्नाले READING भन्ने बुझिन्छ ।

(क) रामवरणको घरको पुस महिनामा कति युनिट विद्युत् खपत भएछ ?

(ख) जम्मा महसुल कति लाग्ने भएछ ?

(ग) मिटर रिडिङ भएको मितिले 5 औँ दिनमा महसुल बुझाउने हो भने कति रुपियाँ छुट पाइन्थ्यो ?

(घ) यदि मिटर रिडिङ भएको मितिले 13 औँ दिनमा महसुल बुझाउने हो भने कति रुपियाँ आवश्यक पर्छ ?

(ङ) यदि मिटर रिडिङ भएको मितिले 22 औँ दिनमा महसुल बुझाएको भए रामवरण कति रुपियाँ जरिवानामा पर्ने थिए होलान् ?

(च) यदि उनले मिटर रिडिङ भएको मितिले 39 औँ दिनमा महसुल बुझाएका भए कति रकम जरिवाना तिर्नु पर्थ्यो ?

(छ) यदि मिटर रिडिङ भएको मितिले 50 औँ दिनमा महसुल बुझाउने हो भने अब थप दस्तुरसहित कति रकम नेपाल विद्युत् प्राधिकरणलाई बुझाउनु पर्ने हुन्छ ? हिसाब गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ हालको अङ्क = 42973

साबिक अङ्क = 42828

(क) रामवरणको घरको पुस महिनामा खपत भएको विद्युत् = (42973 – 42828) युनिट

= 145 युनिट

(ख) अगाडि पृष्ठमा उल्लिखित महसुल दर अध्ययन गरौँ,

यहाँ 145 युनिट विद्युत् खपत भएका कारणले 5 एम्पियर क्षमता भएको मिटरको लागि यो खपत युनिट भएको युनिटभन्दा माथि अर्थात् 101–150 युनिटसम्मको समूहमा पर्छ । सोही समूहअनुसार खपत 145 यूनिटलाई टुक्रयाउँदा,

145 युनिट = 20 युनिट + 10 युनिट + 20 युनिट + 95 युनिट

↓ ↓ ↓ ↓

रु.3 रु.6.50 रु.8.00 रु.9.50

न्यूनतम शुल्क = रु.100

जम्मा इनर्जी शुल्क = 20 × 3 + 10 × 6.50 + 20 × 8.00 + 95 × रु.9.50

= 60 + 65 + 160 + 902.50

= रु.1187.50

(101-150) समूहको न्यूनतम शुल्क = रु. 100

जम्मा महसुल = न्यूनतम शुल्क + जम्मा इनर्जी शुल्क

= रु.100 + रु.1187.50

= रु.1287.50

(ग) मिटर रिडिङ गरेको मितिले 7 दिनभित्र महसुल भुक्तान गरेमा बिल रकमको 2% छुट पाइन्छ ।

यहाँ यदि रामवरण 5 औँ दिनमा महसुल बुझाउन गएमा,

महसुलमा छुट रकम = रु. 1287.50 को 2%

$= \text{रु. } 1,287.50 \times \frac{2}{100}$

= रु. 25.75

(घ) नियमअनुसार, मिटर रिडिङ गरेको मितिले 8 औँ दिनदेखि 15 औँ दिनभित्र महसुल बुझाएमा बिलअनुसार हिसाब हुन्छ ।

यहाँ 13 औँ दिनमा रामवरणले विद्युत् महसुल भुक्तान गर्ने हो भने बिलअनुसारको रु. 1287.50 बुझाउनुपर्छ ।

(ङ) नियमअनुसार, मिटर रिडिङ गरेको मितिले 16 औँ दिनदेखि 30 औँ दिनसम्म महसुल बुझाएमा बिल रकमको 5% थप दस्तुर तिर्नुपर्छ ।

यहाँ रामवरणले 22 औँ दिनमा विद्युत् महसुल बुझाउने हो भने जरिवाना लाग्ने अवस्था छ ।

त्यसैले बुझाउनु पर्ने जरिबाना रकम = रु. 1,287.50 को 5%

$= \text{रु. } 1,287.50 \times \frac{5}{100}$

= रु. 64.38

(च) मिटर रिडिङ गरेको मितिले 31 औँ दिनदेखि 40 औँ दिनसम्ममा महसुल बुझाएमा बिल र कमको 10% थप दस्तुर तिर्नुपर्छ ।

यहाँ रामवरणले 39 औँ दिन महसुल बुझाउने अवस्था भएमा

तिर्नुपर्ने थप दस्तुर (जरिबाना रकम) = रु. 1287.50 को 10%

$= \text{रु. } 1,287.50 \times \frac{10}{100}$

= रु. 128.75

(छ) नियमअनुसार, मिटर रिडिङ भएको मितिले 40 औँ दिन सकिएपछि महसुल बुझाएमा बिल र कमको 25% थप दस्तुर लाग्छ ।

यहाँ यदि रामवरणले 50 औँ दिनमा विद्युत् महसुल बुझाउने हो भने,

जरिबानाबापत तिर्नुपर्ने रकम = रु. 1,287.50 को 25%

$= \text{रु. } 1,287.50 \times \frac{25}{100}$

= रु. 321.88

∴ जरिबानासहित बुझाउनु पर्ने जम्मा महसुल = रु. 1, 287.50 + रु.321.88

= रु. 1609.38

अभ्यास 4.1

1. दिइएको तालिकामा 5 एम्पियर इनर्जी क्षमताको मिटर जडान गरिएको डम्बरकुमारी तामाङको घरको वि.सं. 2078 कात्तिकदेखि फागुन महिनासम्मको मिटर रिडिङ दिइएको छ । यस तालिकाको अध्ययनबाट तल सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

महिना	कात्तिक	मङ्सिर	पुस	माघ	फागुन
मिटर रिडिङ (युनिट)	3528	3593	3700	3904	3980

(क) मङ्सिर महिनामा जम्मा कति युनिट विद्युत् खपत भएछ ?

(ख) डम्बरकुमारीको घरमा सबैभन्दा बढी र सबैभन्दा कम बिजुली कुन कुन महिनामा खपत भएछ ?

2. वर्तमान महसुल दरअनुसार निम्नलिखित अवस्थामा नेपाल विद्युत् प्राधिकरणलाई तिर्नुपर्ने महसुल हिसाब गर्नुहोस् :

(क) हालको अङ्क : 2575, साबिक अङ्क : 2472,
मिटर क्षमता : 5 एम्पियर
मिटर रिडिङ भएको मितिले चौथो दिनमा महसुल बुझाएमा

(ख) हालको अङ्क : 3036, साबिक अङ्क : 2831,
मिटर क्षमता : 15 एम्पियर
मिटर रिडिङ भएको मितिले 41औँ दिनमा महसुल बुझाएमा

(ग) हालको अङ्क : 3603, साबिक अङ्क : 3294,
मिटर क्षमता : 30 एम्पियर
मिटर रिडिङ भएको मितिले 39 औँ दिनमा महसुल बुझाएमा

(घ) हालको अङ्क : 4311, साबिक अङ्क : 3944,
मिटर क्षमता : 60 एम्पियर
मिटर रिडिङ भएको मितिले 14 औँ दिनमा महसुल बुझाएमा

(ङ) हालको अङ्क : 5555, साबिक अङ्क : 5107,
मिटर क्षमता : 30 एम्पियर
मिटर रिडिङ भएको मितिले 17 औँ दिनमा महसुल बुझाएमा

(च) हालको अङ्क : 6452, साबिक अङ्क : 6443,
मिटर क्षमता : 5 एम्पियर
मिटर रिडिङ भएको मितिले 57 औँ दिनमा महसुल बुझाएमा

परियोजना कार्य

आफ्नो घर तथा विद्यालयको कुनै 6 महिनाको बिजुलीको बिल सङ्कलन गरी स्वचालित मेसिनबाट महसुल निर्धारण भएको प्रक्रिया हिसाब गरी व्यक्तिगत रूपमा बिलसहित शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 65 युनिट (ख) सबैभन्दा बढी माघ र सबैभन्दा कम मङ्सिर
2. (क) रु. 870.73 (ख) रु. 2,378.13 (ग) रु. 3,381.40
   (घ) रु. 3,782 (ङ) रु. 4.833.15 (च) रु. 37.50

4.2 पानीको खपतसम्बन्धी घरायसी खर्चको हिसाब (Household expenses for use of water)

क्रियाकलाप 1

तल दिइएको $\frac{1}{2}$ इन्च पाइप जडान गरिएको खानेपानीको बिल र खानेपानी महसुल दर तालिका अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस्, जहाँ 1000 लिटर = 1 युनिट हुन्छ ।

(क) बिलमा कुन कुन विवरण उल्लेख गरिएका छन् ?

(ख) बिलमा जम्मा रकम कति छ ?

(ग) बिलमा कति रकम छुट दिइएको छ ?

(घ) बिलमा कति रकम जरिवानाबापत तिर्नुपरेको छ किन होला ?

(ङ) बिलमा बाँकी बक्यौता रकम (Arrears) कति रहेछ ?

(च) ढलसेवाबापतको (Sewerage) महसुल रकम कति रहेछ ?

(छ) यस बिलअनुसार बिल हिसाब गरिएको महिनामा कति युनिट पानी खपत भएको देखिन्छ ?

Kathmandu Upatyaka Khanepani Limited

Branch: Tripureshwor
PAN No. : 600041601

PAYMENT DUPLICATE-RECEIPT

Receipt No.	:	**1115117730000577**
Date	:	**2077-11-17**
Customer ID	:	**1115004313**
Connection No	:	20198
Area No.	:	14C-17-55
Name	:	Jana bikas pra.bi.
Payment Mode	:	Cash
Cheque No	:	
Arrears	:	**1083.00**
Water Charges	:	100.00
Sewerage Charges	:	50
Meter Rent Charges	:	0.00
Miscellanceous	:	0.00
Penalty	:	200.50
Rebate	:	13.95
Previous Balance	:	0.00
Bill Amount	:	1238.00
Total To Be Paid	:	1424.55
Total Amt Paid Rs.	:	**1425.00**
Payment Period	:	2077 Shrawan - 2077 Falgun
Advance	:	0.45
Advance Rebute	:	0.01
Balance (After Paid)	:	**0.46**
Received By	:	(rbhattarai - 3)

----- Computer Generated Receipt-----

काठमाडौँ उपत्यका खानेपानी लिमिटेड
मुख्य कार्यालय, त्रिपुरेश्वर
2070 श्रावण 1 बाट लागु भएको महसुल दर तालिका

पाइप साइज (इन्चमा)	न्यूनतम उपभोग (लिटरमा)	न्यूनतम युनिट	मिटर जडान भएका धाराहरूमा	
			न्यूनतम कायम गरिएको मूल्य (रु.)	बढी पानी प्रयोग हुँदा आयतनका आधारमा (प्रति 1000 लिटरमा) रु.
½"	10000	10	100	32
¾"	27000	27	1,910	71
1"	56000	56	3,960	71
1.5"	155000	155	10,950	71
2"	320000	320	22,600	71
3"	881000	881	62,240	71
4"	1810000	1810	1,27,865	71

नोटः उपयुक्त महसुलमा कम्पनीले लिँदै आएको ढल सेवाबापतको 50% थप महसुल कायम हुने छ ।

माथिको बिल निम्नानुसारको महसुल दरमा गणना गरिएको हो :
नियमअनुसार ½ इन्चको पाइपमा न्यूनतम 10000 लिटर अर्थात् 10 युनिट पानी (1 युनिट = 1000 लिटर) खपत गरिएको छ । ढल सेवाबापत 50% रकम थप गरेर महसुल हिसाब गरिएको छ ।

खानेपानीको महसुल भुक्तानीमा हुने छुट तथा जरिबाना (थप दस्तुर) तलको तालिकामा प्रस्तुत गरेबमोजिम हुने छ :

भुक्तानी (बिल वितरण भएको मितिले)	छुट/जरिबाना
पहिलो र दोस्रो महिनाभित्र	3% छुट
तेस्रो महिनाभित्र	बिलअनुसार
चौथो महिनाभित्र	10% जरिबाना
पाँचौँ महिनाभित्र	20% जरिबाना
पाँचौँ महिनाभन्दा बढी	50% जरिबाना

उदाहरण 1

½ इन्च साइजको पाइप जडान गरिएको सदीक्षाको घरमा चैत्र महिनाको पानीको मिटर रिडिङ गर्दा 3754 पाइयो । यदि फागुन महिनामा मिटर रिडिङ गर्दा 3727 थियो भने ढल सेवाबापतको 50% रकमसहितको चैत्र महिनाको महसुल कति हुन्छ ? दोस्रो महिनाभित्र महसुल बुझाएमा कति रुपियाँ तिर्नुपर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ हालको अङ्क (Present reading) = 3,754

साबिकको अङ्क (Previous reading) = 3,727

खपत पानी = 3754 – 3727

= 27 युनिट

न्यूनतम 10 युनिट (10000 लिटर) को मूल्य = रु. 100

यहाँ 27 युनिट = 10 यनिट + 17 युनिट

↓ न्यूनतम महसुल रु.100 ↘ प्रतियुनिट रु.32 का दरले

∴ जम्मा महसुल = 100 + 17 × 32

= 100 + 544

= रु.644

ढल सेवाबापतको महसुल = रु. 644 को 50%

$= 644 \times \frac{50}{100}$

= रु.322

जम्मा बिल रकम = 644 + रु.322

= रु.966

त्यसैले, सदीक्षाले घरमा पानी उपभोग गरेबापत चैत महिनाको बुझाउनुपर्ने महसुल = रु. 966

यदि सदीक्षाले बिल वितरण भएको दोस्रो महिनाभित्र महसुल भुक्तान गरेमा नियमअनुसार बिल रकमको 3% छुट हुने हुनाले,

छुट रकम = रु. 966 को 3%

$=$ रु. $966 \times \frac{3}{100}$

= रु.28.98

∴ सदीक्षाले दोस्रो महिनाभित्र महसुल बुझाउँदा तिर्नुपर्ने रकम = रु. 966 – रु. 28.98

= रु. 937.02

उदाहरण 2

एक इन्च साइजको पाइपबाट सेन्ट्रल कोलोनीमा कुनै महिनामा जम्मा 123 युनिट पानी खपत भएछ । बिल वितरण भएको चौथो महिनाभित्र महसुल बुझाउन गएमा जम्मा कति रुपियाँ जरिवाना लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

जम्मा खपत पानी = 123 युनिट

न्यूनतम 56 युनिट (56000 लिटर) पानी खपतबापतको महसुल = रु. 3,960

यहाँ 123 युनिट = 56 युनिट + (123 – 56) युनिट

= 56 युनिट + 67 युनिट

↓ ↓

न्यूनतम महसुल रु. 3960 प्रतियुनिट रु. 71 का दरले

∴ जम्मा महसुल = रु. 3960 + 67 × रु.71

= रु. 8717

50% ढल सेवाबापतको महसुल = 8,717 को 50%

$= 8717 \times \frac{50}{100}$

$= \frac{8717}{2}$

= रु. 4358.50

तसर्थ जम्मा बिल रकम = रु. 8717 + रु. 4358.50

= रु. 13,075.50

बिल वितरण भएको चौथो महिनाभित्र बिल (बुझाएमा बिल रकमको 10% थप दस्तुर (जरिवाना) लाग्छ ।

त्यसैले, जरिवाना रकम = रु. 13075.50 को 10%

$= 13{,}075.50 \times \frac{10}{100}$

= रु. 1,307.55

अभ्यास 4.2

1. **कोपिलाको घरमा ½ इन्च खानेपानीको पाइप लाइन जडान गरिएको छ । उनको घरमा साउन महिनामा मिटर रिडिङ गर्दा हालको अङ्क (Present reading) 4225 छ । यदि साबिक अङ्क (Previous reading) 4197 रहेछ भने अगाडि पृष्ठमा उल्लेखित महसुल तालिकाका आधारमा तलका प्रश्नहरू समाधान गर्नुहोस् :**

   (क) कोपिलाले उक्त महिनाको 50% ढल सेवाबापत कति महसुल तिर्नुपर्ने रहेछ ?

   (ख) जम्मा बिल रकम कति हुन्छ ?

   (ग) बिल वितरण भएको पहिलो र दोस्रो महिनाभित्र बिल बुझाएमा कोपिलाले कति महसुल बुझाउनुपर्छ ?

   (घ) बिल वितरण भएको तेस्रो महिनाभित्र महसुल बुझाएमा उनले कति रकम तिर्नुपर्छ ?

2. **एउटा होटलमा 1.5" को पाइप लाइनबाट खानेपानी वितरण गरिएकामा यदि कुनै एक महिनामा जम्मा 423 युनिट पानी खपत भएछ भने अगाडि पृष्ठमा दिइएको खानेपानी महसुल दर तालिकाका आधारमा तलका प्रश्न समाधान गर्नुहोस् ।**

   (क) उक्त महिनामा ढल सेवासहितको जम्मा महसुल कति हुने रहेछ ?

   (ख) यदि बिल वितरण भएको पाँचौँ महिनाभित्र उक्त महिनाको मात्र महसुल बुझाएमा कति रुपियाँ जरिबाना तिर्नुपर्छ ?

उत्तर

1.	(क) रु. 338	(ख) रु. 1,014	(ग) रु. 983.58	(घ) रु. 1,014
2.	(क) रु. 44,967	(ख) रु. 8,993.40		

4.3 टेलिफोनको प्रयोगसम्बन्धी घरायसी खर्चको हिसाब (Household expenses for use of telephone)

क्रियाकलाप 1

दिइएको बिल अध्ययन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

नेपाल टेलिकम
Nepal Telecom
(Nepal Doorsanchar Company Limited

TAX INVOICE

TPIN/PAN : 300044614

Transaction No 73414226817 Invoice No R210623414226817 Date (BS AD) (2078-03-9 23-Jun-2021) Time [illegible] AM

Customer Company's Name	....		
Regd. Account No	6001190372	Customer's TPIN/PIN	1
Subscription Number 's	015531957	Subscription Type	PSTN
Payment Type	PAYMENT/ADVANCE PAYMENT	Payment Mode	Cash

Bill of Baisakh Jestha of 2078 Chaitra of 2077

Charge Items	Charge(NPR)	TSC(NPR)	VAT(NPR)
Bill Amount	404.01	52.52	59.34
Fine	7.21	0.00	0.00
Maintenance	0.00	0.00	0.00
Rebate	0.0	0.00	0.00
Adjustment	0.00	0.00	0.00
Advance	1.92	0.00	0.00
OT	0.00	0.00	0.00
Sum Amount	413.14	52.52	59.34
Invoice Amount	525.00		

IPTV Cash Received 0.00
Total Receivable Amount 525.00

Tender Amount Rs 525.00 Return Amount : Rs 0.00 Total Received : Rs 525.00

Received Amount(In words) Five Hundred And Twenty Five Rupees Only
Counter Thecho Received By .... No. Of Copy: 1[Original]

Note In case of Deposit and Advance Payment, this invoice is considered as Receipt as well.IPTV Tax invoice is provided by NT Partner's Billing System

(क) बिलमा कुन कुन विवरण उल्लेख गरिएका छन् ?

(ख) बिलमा मूल्य अभिवृद्धि करबापत कति प्रतिशत रकम देखिएको छ ?

(ग) जम्मा महसुल कति छ ?

माथि उल्लिखित बिल local call tariff को हो । Local call को नियमअनुसार न्यूनतम 175 कलको महसुल रु. 200 र त्यसपछि प्रति कल रु.1 का दरले थप महसुल हिसाब हुन्छ । ग्राहकले जम्मा कलको आधारमा हिसाब भएको महसुल मध्येको 13% थप रकम सेवा शुल्क (सेवा उपलब्ध गराउने कम्पनीले पाउने शुल्क) तिर्नुपर्छ । सेवा शुल्कसहितको हिसाब भएको जम्मा महसुलको 13% मूल्य अभिवृद्धि कर बापतको रकम नेपाल सरकारलाई राजस्व स्वरूप बुझाउनुपर्छ ।

त्यसैले कुल महसुल (TC) = न्यूनतम महसुल + थप महसुल
सेवा शुल्क (TSC) = कुल महसुलको 13%
मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) *रकम = (TC + TSC) को 13%*
जम्मा महसुल = TC + TSC + VAT रकम

नेपाल टेलिकमको जी.एस.एम प्रिपेड (GSM Prepaid) सेवाको महसुल दर

क्र.स.	सेवाका प्रकार	शुल्क
1.	नेपाल टेलिकमको नेटवर्कभित्र फोन गर्दा (On-Net call)	रु. 1.50 प्रति मिनेट
	नेपाल टेलिकमको नेटवर्कबाहिर फोन गर्दा (off-Net call)	रु. 2 प्रति मिनेट
2.	एस.एम.एस. सेवा	रु. 1 प्रति एस.एम.एस.(टेलिकमको नेटवर्कभित्र एस.एम.एस गर्दा
		रु. 1.25 प्रति एस.एम.एस (अन्य नेटवर्कमा एस.एम.एस.गर्दा)
		रु. 5 प्रति एस.एम.एस. (अन्तर्राष्ट्रिय स्तरमा एस.एम.एस.गर्दा)
3.	साथी र परिवार सेवा (FNF Service)	रु. 0.70 प्रति मिनेट बढीमा 5 जनासम्म
4.	Video call charge	रु. 2 प्रति मिनेट

नेपाल टेलिकमको जि.एस.एम पोष्टपेड (GSM postpaid) सेवाको महसुल दर

क्र.स.	सेवाको प्रकार	धेरै प्रयोग हुने समय (Peak hour) 6:00 AM - 18:00 PM	थोरै प्रयोग हुने समय (Off peak hour) 10:00 PM - 6:00 AM	न्यूनतम शुल्क (Monthly rental charge)
1.	नेपाल टेलिकमको नेटवर्कभित्र फोन गर्दा (On-net call)	रु. 1 प्रति मिनेट	रु. 0.55 प्रति मिनेट	रु. 300
	नेपाल टेलिकमको नेटवर्क बाहिर फोन गर्दा (Off-net call)	रु. 1.5 प्रति मिनेट	रु. 1.5 प्रति मिनेट	
2.	एस.एम.एस. सेवा Short message service (SMS)	नेपाल टेलिकमको नेटवर्कभित्र एस.एम.एस गर्दा रु. 1 प्रति एस.एम.एस.		
		अन्तर्राष्ट्रिय स्तरमा एस.एम.एस गर्दा रु. 5 प्रति एस.एम.एस.		
3.	साथी र परिवारबिचको सेवा FNF Service	रु. 0.55 प्रति मिनेट बढीमा छ जनासम्म		
4.	Video call charge	रु. 2 प्रति मिनेट		

नोटः 1. माथि प्रस्तुत महसुल दरमा कर समावेश गरिएको छैन ।

2. उक्त महसुलमा क्रमशः 13% टेलिकम सेवा शुल्क (Telecom Service Charge 13%) र मूल्य अभिवृद्धि कर (Value Added Tax) 13% लाग्छ । [2075 श्रावण 1 देखि लागु भएको]

3. टेलिकम सेवा शुल्क 13% र मूल्य अभिवृद्धि कर 13% जोडेपछि हुन आउने शुल्कमा 2% स्वामित्व कर [Ownership Tax (OT)] लाग्छ । [2077 श्रावण 1 गतेदेखि लागु भएको

4. नेपाल टेलिकम, नेपाल दुरसञ्चार संस्थानको website www.ntc.net.np बाट विस्तृत जानकारी लिन सकिन्छ ।

General Notice:
Please pay your bills on time to avoid call restriction by Credit Control System.

To know due amount and available credit limit, please type CB for GSM/CDMA Postpaid and send sms to 1415, CB*PSTN Number and send sms to 1545.

13% TSC & 13% VAT will applied as per Government rule from 1st Shrawan 2075.

GSM/CDMA Outgoing calls will be blocked (1-Way bar) after finishing remaining credit limit. Outgoing and incoming both calls will be blocked (2-Way bar) on crossing 90 days of 1-way bar.

Both Outgoing and Incoming calls will be blocked (2-Way bar)) automatically in PSTN after finishing remaining credit limit.

For PSTN Numbers distributed from Soft Switches like NGN, IMS MSAN, MSAG: Meter reading value remains same in each month bill statement; local calls are charged based on call data record (CDR) not on meter reading.

To download monthly Bill statement, please visit: http://gsmbl.ntc.net.np/ For any complains, Please contact nearest customer care center or dial 191.1498.

2% Ownership Tax (OT) will be applied on every GSM and CDMA Postpaid mobile recharge as per Government rule from 1st Shrawan 2077.

उदाहरण 1

PSTN टेलिफोन लाइनबाट एक महिनामा 267 कल टेलिफोन गरिएछ भने,

(क) उक्त महिनाको टेलिफोनको कुल महसुल (TC) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सेवा शुल्क (TSC) र मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) रकम हिसाब गर्नुहोस् ।

(ग) उक्त महिनाको जम्मा टेलिफोन महसुल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(क) यहाँ एक महिनाभरि जम्मा 267 कल टेलिफोन गरिएको अवस्था छ ।

अनि 175 कलबापत न्यूनतम शुल्क = रु. 200 छ

अब 267 कल = 175 कल + (267 – 175) कल

=175 कल + 92 कल

न्यूनतम महसुल रु. 200   प्रति कल रु. 1 का दरले थप महसुल

∴ कुल महसुल (TC) = रु. 200 + 92 × रु. 1

= रु. 200 + रु. 92

= रु. 292

(ख) सेवा शुल्क (TSC) = रु. 292 को 13%

= रु. 292 × $\frac{13}{100}$

= रु. 37.96

सेवा शुल्क (TSC) सहितको कुल महसुल (TC + TSC) = रु. 292 + रु. 37.96 = रु. 329.96

अब मूल्य अभिवृद्धि कर रकम = रु. 329.96 को 13%

= 329.96 × $\frac{13}{100}$

= रु. 42.89

(ग) जम्मा महसुल = TC + TSC + VAT रकम

= 292 + 37.96 + 42.89

= रु. 372.85

तसर्थ उक्त महिनाको जम्मा टेलिफोन महसुल रु. 372.85 रहेछ ।

वैकल्पिक तरिका

जम्मा कल = 267 कल

अतिरिक्त कल = 267 – 175 = 92 कल

कुल महसुल (TC) = न्यूनतम महसुल + अतिरिक्त महसुल

= रु. 200 + रु. 92 × 1

= रु. 292

TSC र VAT सहितको महसुल = TC × 113% × 113%

$= 292 \times \frac{113}{100} \times \frac{113}{100}$

= रु. 372.85

उदाहरण 2

नेपाल टेलिकमको जी.एस.एम. (GSM) प्रिपेड मोवाइल सेवा अन्तर्गत रु. 100 को रिचार्ज कार्डबाट रिचार्ज गर्दा सम्बन्धित सेवाग्राहीले कति रुपियाँ बराबरको Talktime (Voice Call) उपयोग गर्न पाउँछ ? उक्त रु. 100 मा क्रमशः दुरसञ्चार सेवा शुल्क (TSC) 13%, मूल्य अभिवृद्धि कर 13% र स्वामित्व कर (OT) 2% समावेश गरिएको हुन्छ। यदि NT Network भित्र नै Voice Call गर्दा रु. 1.50 प्रतिमिनेटका दरले शुल्क लाग्छ भने कति मिनेट कुराकानी (Voice Call) गर्न मिल्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

दूरसञ्चार सेवा शुल्क (TSC) = रु. 13%

मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) = 13%

स्वामित्व कर (OT) = 2%

रिचार्ज रकम = रु. 100

मानौँ, OT लगाउनु अघिको शुल्क = रु. x

$\therefore x + x$ को 2% = रु. 100

अथवा, $x + x \times \frac{2}{100} = 100$

अथवा, $\frac{102x}{100} = 100$

$\therefore x = 98.04$

फेरि, मानौँ 13% VAT लगाउनु अघिको शुल्क = रु. y

$\therefore$ y + y को 13% = 98.04

अथवा, $y + y \times \frac{13}{100} = 98.04$

अथवा, $\frac{113y}{100} = 98.04$

$\therefore y = 86.76$

त्यसरी नै,

मानौँ, 13% TSC लगाउनु अघिको शुल्क = रु. z

$\therefore z + z$ को 13% = रु. 86.76

अथवा, $z + z \times \frac{13}{100} = 86.76$

अथवा, $\frac{113z}{100} = 86.76$

$\therefore z = 76.78$

तसर्थ रु. 100 को रिचार्ज गर्दा रु. 76.78 बराबरको Talk time पाउँदो रहेछ ।

नेपाल टेलिकमकै नेटवर्कभित्र फोन कल गरी कुराकानी गर्दा रु. 1.50 प्रति मिनेटका दरले शुल्क लाग्छ ।

$\therefore$ रु. 76.78 ले कुराकानी गर्न पाउने समय = $\frac{76.78}{1.50}$ मिनेट

= 51.19 मिनेट

तसर्थ रु. 100 को रिचार्ज कार्ड प्रयोग गरी नेपाल टेलिकमको नेटवर्कभित्र फोन कल गर्दा 51.19 मिनेट कुराकानी गर्न पाइने रहेछ ।

अभ्यास 4.3

1. रामलालको घरको वैशाख महिनाको टेलिफोन कल रिडिङ गर्दा हालको अङ्क 4444 र साबिक अङ्क 3992 रहेछ भने

(क) जम्मा कति कल टेलिफोन गरिएछ ?

(ख) पहिलो 175 कलको रु. 200 र त्यसपछि प्रति कलको रु.1 का दरले कुल महसुल (TC) कति हुन्छ ?

(ग) सेवा शुल्क 13% र मूल्य अभिवृद्धि कर रकम हिसाब गर्नुहोस् ।

(घ) मूल्य अभिवृद्धि करपछिको जम्मा महसुल हिसाब गर्नुहोस् ।

2. निम्नानुसारको टेलिफोन गरेबापत सेवा शुल्क (TSC) 13% र मूल्य अभिवृद्धि कर 13% सहितको जम्मा महसुल हिसाब गर्नुहोस् :

(जहाँ पहिलो 175 कलको रु. 200 र त्यसपछि प्रति कलको रु.1 का दरले महसुल उठ्छ ।)

(क) 550 कल (ख) 695 कल (ग) 793 कल

3. पहिलो 175 कलको रु. 200 र त्यसपछि प्रति कलको रु.1 का दरले महसुल उठ्छ । सेवा शुल्क (TSC) र मूल्य अभिवृद्धि कर गणना नगरिकन तल दिइएको मूल्यमा कति कल टेलिफोन गर्न सकिन्छ ?

(क) रु.275 (ख) रु. 695 (ग) रु. 890

4. पहिलो 175 कलका रु. 200 र त्यसपछि प्रति कलको रु.1 का दरले महसुल उठ्छ । सेवा शुल्क (TSC) 10% र 13% मूल्य अभिवृद्धि करसहित रु.696.08 महसुल उठेछ भने कति कल टेलिफोन गरिएको रहेछ ?

5. नेपाल टेलिकम जी.एस.एम. (GSM) पोष्टपेड (Postpaid) मोवाइल सेवाअन्तर्गत न्यूनतम सेवा शुल्क (Rental charge) रु. 300 लाग्छ । यस शुल्कमा दुरसञ्चार सेवा शुल्क 13% थप हुन आउने शुल्कमा 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लाग्छ । यसरी हुन आउने जम्मा महसुलमा पुनः 2% स्वामित्व कर (OT) लाग्छ भने पोष्टपेड सिम प्रयोगकर्ताले मासिक रूपमा न्यूनतम कति महसुल बुझाउनु पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1.(क) 452 कल	(ख) रु. 477	(ग) रु. 62.01, रु. 70.07	(घ) रु. 609.08
2.(क) रु. 734.22	(ख) रु. 919.37	(ग) रु. 1044.50	
3.(क) 250 कल	(ख) 670 कल	(ग) 865 कल	
4. 535 कल	5. रु. 390.73		

4.4 ट्याक्सी मिटरले दिने रकम हिसाब
(Calculation of amount of taxi meter)

क्रियाकलाप 1

निम्नलिखित प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) के तपाईंले एक स्थानबाट अर्को स्थानमा जान ट्याक्सी प्रयोग गर्नुभएको छ ?

(ख) ट्याक्सी भाडादरसम्बन्धी सूचना पाटी कतै देख्नुभएको छ ?

(ग) हाल नापतौल विभागअन्तर्गतको कार्यालयले ट्याक्सी मिटर कति कायम गरेको छ ? यस सम्बन्धमा जानकारी कहाँबाट कसरी पाउन सकिन्छ ?

सहरी क्षेत्रमा प्रयोगमा आउने ट्याक्सीहरू मिटर जडान गरिएका र मिटर जडान नगरिएका पनि हुन्छन् । मिटर जडान गरिएका ट्याक्सीहरूको भाडादरमा एकरूपता कायम हुन्छ र ठगिने सम्भावना पनि ज्यादै न्यून हुन्छ । ट्याक्सी भाडा र मिटरसम्बन्धी केही अप्ठ्यारो परेमा वा ठगी गरेको शङ्का लागेमा ट्याक्सी नम्बरसहित नजिकैको ट्राफिक प्रहरी कार्यालयमा गुनासो राख्न सकिन्छ । नेपाल गुणस्तर तथा नापतौल विभाग, [Nepal Bureau of Standards of Metrology (NBSM)] को Website: nbsm.gov.np मा राखिएको ट्याक्सी भाडादर निम्नलिखित तालिकामा उल्लेख गरिएको छ ।

यहाँ यातायात व्यवस्था विभागको मति 2075/06/07 गतेको निर्णयअनुसार कायम भएको ट्याक्सीमा भाडादर दिइएको छ ।

बिहान 6 बजेभन्दा पछि राती 9 बजेसम्म	राती 9 बजेभन्दा पछि बिहान 6 बजेसम्म
सुरुको दर : रु.14	सुरुको दर : रु. 21
प्रति 200 मिटर : रु. 7.80 को हिसाबमा प्रति कि.मि.को रु. 39 थप गरी सुरुको 1 km को भाडादर : रु. 53	प्रति 200 मिटर : रु. 11.70 को हिसाबमा प्रति कि.मि.को रु. 58.50 थप गरी सुरुको 1 km को भाडादर : रु. 79.50
थप प्रतिकिलोमिटरको भाडादर रु.39	थप प्रतिकिलोमिटरको भाडादर रु. 58.50
पर्खाउँदाको भाडा (Waiting charge) दर : रु. 7.80 प्रति 2 मिनेट	पर्खाउँदाको भाडा (Waiting charge) दर : रु. 11.70 प्रति 2 मिनेट

(उल्लेख गरिएको भाडादर समयअनुसार परिवर्तन भइरहेको हुन सक्छ ।)

उदाहरण 1

बिमाकुमारीले काठमाडौँको बल्खुदेखि पुतलीसडकसम्म 6 कि.मि.को यात्रा गर्न ट्याक्सी चढिछन् । सुरुमा ट्याक्सी मिटरले न्यूनतम रु.14 र त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु.7.80 का दरले भाडा लिएछ । यात्राका क्रममा उनले 10 मिनेट ट्याक्सी पर्खाएकी पनि रहिछन् भने जसबापत रु.7.80 प्रति 2 मिनेटको हिसाबले भाडा लागेछ भने बिमाकुमारीले जम्मा कति भाडा तिरिछन् ? हिसाब गर्नुहोस् ।

समाधान

न्यूनतम (सुरुको) शुल्क = रु. 14

ट्याक्सी गुडेको दुरी = 6 km

= 6 × 1000 m

= 6000 m

यहाँ भाडा दर हेर्दा,

200 मिटरको भाडा = रु. 7.80

1 मिटरको भाडा = रु. $\frac{7.80}{200}$

6000 मिटरको भाडा = $\frac{7.80}{200} \times 6000$ = रु. 234

ट्याक्सी पर्खाएबापतको महसुल (Waiting charge) = $\frac{7.80}{2} \times 10$

= रु.39

बिमाकुमारीले तिरेको जम्मा भाडा = 14 + 234 + 39

= रु. 287

वैकल्पिक तरिका

सुरुको दर (न्यूनतम शुल्क) = रु. 14

ट्याक्सी गुडेको दुरी = 6 km

प्रति कि.मि.को भाडा = रु. 39

ट्याक्सी पर्खाएको समय = 10 मिनेट

प्रति 2 मिनेट पर्खाएको भाडादर = रु. 7.80

10 मिनेट पर्खाएको भाडा = रु. $\frac{7.80}{2} \times 10$ = रु. 39

जम्मा भाडा = रु. 14 + 39 × 6 + 39

= रु. 14 + 234 + 39

= रु. 287

अभ्यास 4.4

1. श्रीनाथले काठमाडौँको नयाँ बानेश्वरदेखि भक्तपुर सिर्जनानगरसम्म 9 किलोमिटर ट्याक्सी चढेछन् । सुरुमा ट्याक्सी मिटरले न्यूनतम रु.14 र त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु.7.80 का दरले भाडा लिएछ । यात्राका क्रममा उनले 6 मिनेट ट्याक्सी पर्खाएबापत रु.7.80 प्रति 2 मिनेटको हिसाबले भाडा लागेछ भने श्रीनाथले जम्मा कति भाडा तिरेछन् ? हिसाब गर्नुहोस् ।
2. सृष्टिले भक्तपुरको जगातीदेखि ललितपुरको सानेपासम्म 18 किलोमिटर यात्रा गरिछन् । सुरुमा ट्याक्सी मिटरमा रु.14 र त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु.7.80 का दरले भाडा लिएछ । यात्राका क्रममा उनले 20 मिनेट ट्याक्सी पर्खाएबापत रु.7.80 प्रति 2 मिनेटको हिसाब हुँदा सृष्टिले जम्मा कति भाडा तिर्नुपरेछ ? हिसाब गर्नुहोस् ।
3. **यस पाठमा उल्लिखित भाडादरअनुसार निम्नबमोजिमको दुरी यात्रा गर्दाको ट्याक्सी भाडा हिसाब गर्नुहोस् :**

प्रश्न	दुरी (km मा)	समय	पर्खिएर बसेको समय अवधि (waiting time) (मिनेटमा)
(क)	6	बिहान 8 बजे	15
(ख)	15	दिउँसो 3:30 बजे	10
(ग)	7.5	राती 11 बजे	-
(घ)	8.75	बिहान 4 बजे	7

4. संयोगले 10 मिनेट पर्खाएर ट्याक्सीमा यात्रा गरेपछि रु.228.50 भाडा तिर्नुपरेछ। उनले ट्याक्सी चढ्दा सुरुमा ट्याक्सी मिटरले न्यूनतम रु.14, त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु.7.80 का दरले र ट्याक्सी पर्खाएबापत रु.7.80 प्रति 2 मिनेटको समेतको हिसाबबाट भाडा देखाएछ भने संयोगले जम्मा कति मिटर यात्रा गरेछन् ?
5. फूलमायाले 12 मिनेट पर्खाएको चार्जसहित ट्याक्सी भाडा रु.1027.20 तिरिछिन् । उनले ट्याक्सी चढेबापत सुरुमा रु. 21, त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु.11.70 का दरले र ट्याक्सी पर्खाएबापत रु.11.70 प्रति 2 मिनेटको लाग्ने रहेछ भने फूलमायाले ट्याक्सीमा जम्मा कति मिटर यात्रा गरिछन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

प्रिपेड मोबाइलको रु.100 को एउटा रिचार्ज कार्ड लिएर सोही कार्डमा उल्लिखित सेवा शुल्क, मूल्य अभिवृद्धि कर गणना गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. रु.388.40	2. रु.794	3. (क) रु.306.50	3.(ख) रु.638
3. (ग) रु.459.75	3.(घ) रु.573.83	4. 4.5 km	5. 16 km

मिश्रित अभ्यास

1. वार्षिक रु. 7 लाख कमाउने एउटा व्यक्तिको आश्रित परिवार सङ्ख्याका आधारमा रु. 4,50,000 सम्ममा 1% र बाँकीमा 10% का दरले आयकर लाग्छ भने उसले कति आयकर तिर्नुपर्छ ?

2. वार्षिक रु. 4,60,000 आयआर्जन गर्ने एक जना मानिसले रु. 5,500 आयकर तिर्छ यदि रु. 4,50,000 सम्मको आयमा 1% कर लागेको रहेछ भने बाँकी आयमा लागेको आयकरदर कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. कुनै संस्थाले वार्षिक रूपमा गरेको आयमध्ये रु. 10 लाखसम्मको आम्दानीमा 2.5%, रु. 10 लाखभन्दा माथि रु. 20 लाखसम्मको आम्दानीमा 4%, रु. 20 लाखभन्दा माथि रु. 40 लाखसम्मको आम्दानीमा 5.25% र रु. 40 लाखभन्दा माथिको आम्दानीमा 12.75% का दरले कर तिर्नुपर्छ भने निम्नअनुसार वार्षिक आम्दानी गर्दा लाग्ने कर हिसाब गर्नुहोस् :

   (क) रु. 7,60,000 (ख) रु. 15,70,500 (ग) रु. 23,75,600 (घ) रु. 55,75,000

4. रु. 3 को 1 महिनाको ब्याज 2 पैसाका दरले साधारण ब्याज दर हिसाब गर्दा रु. 50,000 को 1 वर्षको साधारण ब्याज कति हुन्छ ? यदि उक्त ब्याजमा 5% कर लगाउँदा खुद साधारण ब्याज कति हुन्छ ?

5. **पसलेले रु. 7,520 मा किनेको एउटा साइकल अङ्कित मूल्य रु. 10,000 मा बिक्री गर्दा 13% मूल्य अभिवृद्धि करसहित,**

   (क) उपभोक्ताले कति रुपियाँ तिनुपर्छ ?

   (ख) यस कारोबारमा पसलेले कति प्रतिशत नाफा खाएछ ?

   (ग) यदि अङ्कित मूल्यमा 30% छुट दिएर बेचेको भए मूल्य अभिवृद्धि करसहितको मूल्य कति हुन्थ्यो ? पसलेलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान हुन्थ्यो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा ल्यापटपलाई रु. 1,50,000 मा किनेर 10% नाफा लिई बिक्री गर्दा मूल्य अभिवृद्धि कर 13% सहितको मूल्य कति हुन्छ ?

7. एउटा वस्तुमा 20% छुट दिई 13% मूल्य अभिवृद्धि कर लगाएर रु. 9040 मा बेचियो भने कति रुपियाँ छुट दिइएको रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा आयातकर्ताबाट इलेक्ट्रोनिक्सको डिलरले एउटा कम्प्युटर मूल्य अभिवृद्धि कर समेत रु. 22,600 मा किनेछ । उसले ढुवानी खर्च र नाफा समेत जोडी उक्त कम्प्युटर खुद्रा बिक्रेतालाई मूल्य अभिवृद्धि करसहित रु. 25,990 मा बेचेछ । खुद्रा बिक्रेताले उपभोक्तालाई मूल्य अभिवृद्धि करसहित रु. 28,250 मा बेचेछ । मूल्य अभिवृद्धि कर 13% भएको आधारमा निम्न हिसाब गणना गर्नुहोस् :

   (क) डिलरले आयातकर्तासँग मूल्य अभिवृद्धि करबाहेक कति रुपियाँमा खरिद गरेको रहेछ ?

   (ख) खुद्रा व्यापारीले कति नाफा राखेको रहेछ ?

(ग) मूल्य अभिवृद्धि करबापत कति रकम सरकारको खातामा जम्मा हुनुपर्छ ?

(घ) खुद्रा व्यापारीले कति रकम मूल्य अभिवृद्धि करबापत सरकारी कोषमा जम्मा गर्नुपर्ने हुन्छ ?

9. एक जना बिक्री प्रबन्धकको मासिक तलब रु. 22,000 छ र जम्मा बिक्री मूल्यको 0.75% कमिसन रकम उसको तलबमा जोडिन्छ भने महिनामा रु. 6,24,000 को सामान बिक्री हुँदा उसको जम्मा मासिक आम्दानी कति हुन्छ ? मासिक तलबमा कति प्रतिशतले आम्दानी थपिएछ, हिसाब गर्नुहोस् ।

10. आफ्नो घर बहालमा लगाइदिएबापत घरधनीले एजेन्टलाई प्रत्येक महिना घरभाडाबाट प्राप्त हुने रकमको 3% कमिसन छुट्याउँछ । यदि घर बहालबाट मासिक जम्मा रु. 75,000 हिसाब हुँदा एजेन्टले वार्षिक कति रुपियाँ प्राप्त गर्छ ?

11. रोहनले एजेन्टलाई 5% कमिसन दिएर घर बिक्री गर्दा रु. 1 करोड 28 लाख 25 हजार प्राप्त गरेछ भने उनको घर कतिमा बिक्री भएको रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. एउटा कम्पनीको मुनाफाको 25% रकम रु. 1,50,000 रहेछ । कम्पनीले जम्मा मुनाफाको 65% बोनस (bonus) आफ्ना 15 जना कर्मचारीलाई प्रोत्साहन स्वरूप बराबर रूपमा वितरण गर्ने निर्णय गरेछ भने हरेक कर्मचारीले कति रुपियाँ बोनस प्राप्त गर्न सक्ने देखियो ? हिसाब गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. एउटा बैङ्कले एक वर्षमा गरेको मुनाफाको 55% लाभांश (bonus) त्यस बैङ्कमा कार्यरत 275 जना कर्मचारी प्रत्येकलाई रु. 65,000 का दरले वितरण गर्ने निर्णय गरेछ भने सो बैङ्कले जम्मा कति मुनाफा गरेको रहेछ ?

14. एउटा सिमेन्ट उत्पादक कम्पनीको रु. 100 पर्ने 3,50,000 कित्ता सेयरमध्ये हरिबहादुरसँग I.P.O. मा परेको 250 कित्ता सेयर छ । यदि उक्त कम्पनीले वार्षिक रु. 9,00,00,000 मुनाफा गरेको अवस्थामा 40% नगद लाभांश (dividend) दिने निर्णय गरेछ भने सेयर धनी हरिबहादुरले जम्मा कति लाभांश पाउने भएछन् ? हिसाब गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

15. तलको तालिकामा 15 एम्पियर क्षमताको मिटर जडान गरिएको घरको वैशाखदेखि असोजसम्मको मिटर रिडिङ दिइएको छ :

महिना	वैशाख	जेठ	असार	साउन	भदौ	असोज
मिटर रिडिङ	1577	1622	1647	1662	1689	1731

माथिको तालिकामा यदि मिटर रिडिङ प्रत्येक महिनाको अन्तिम दिन भएको रहेछ भने वर्तमान दरअनुसार विद्युत् महसुल हिसाब गर्नुहोस् :

(क) जेठ महिनादेखि असोज महिनासम्म कति कति युनिट विद्युत् खपत भएछ ?

(ख) कुन महिनाको बिलमा सबैभन्दा बढी विद्युत् महसुल हिसाब हुन्छ र कति हुन्छ ?

(ग) कुन महिनाको बिलमा सबैभन्दा कम विद्युत् महसुल उठेछ र कति रहेछ ?

(घ) जेठ महिनाको महसुल असारको 13 गते बुझाउने हो भने कति रुपियाँ तिर्नुपर्ने हुन्छ ?

(ङ) असार महिनाको महसुल साउन 27 गते भुक्तान गर्दा जम्मा कति महसुल तिर्नुपर्छ ?

(च) असोज महिनाको महसुल कात्तिक 5 गने तिर्न गएमा कति रकम आवश्यक पर्छ ?

16. ¾ इन्च पाइप जडान गरिएको एउटा होटलमा जम्मा 58,000 लिटर पानी खपत हुन्छ भने बिल वितरण भएको चौथो महिनाभित्र महसुल बुझाएमा जम्मा कति महसुल तिर्नुपर्छ ? 50% ढल सेवासहितको महसुल पत्ता लगाउनुहोस् ।

17. पहिलो 175 कलमा रु.200 र त्यसपछि प्रति कलको रु.1 का दरले थप हिसाब हुँदा 10% सेवा शुल्क (TSC) र 13% VAT सहित निम्नबमोजिमको टेलिफोन कलमा जम्मा कति बिल उठ्छ, हिसाब गर्नुहोस् ।

(क) 275 कल (ख) 325 कल (ग) 469 कल

18. पहिलो 175 कलमा रु.200 र त्यसपछि प्रति कलको रु.1 का दरले थप हिसाब हुँदा 10% सेवा शुल्क (TSC) र 13% VAT सहित तल उल्लिखित जम्मा महसुल उठ्दा कति कल टेलिफोन गरिएछ, हिसाब गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) रु. 766.14 (ख) रु. 893.83 (ग) रु. 1021.52 (घ) रु. 1149.21

19. ट्याक्सी नपर्खाइकन यात्रा गर्दा सुरुमा ट्याक्सी मिटरले न्यूनतम रु.14 र त्यसपछि प्रति 200 मिटरको रु. 7.80 का दरले भाडा देखाएछ भने निम्नबमोजिमको यात्रामा ट्याक्सी मिटरमा कति महसुल उठ्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 4 km (ख) 9 km (ग) 13 km (घ) 15 km

उत्तर

1. रु. 29,500	2. 10%	3. (क) रु. 19,000
(ख) रु. 47,820	(ग) रु. 84,719	(घ) रु. 3,70,812.50
4. रु. 4,000 र रु. 3,800	5. (क) रु. 11,300	(ख) 32.98%
(ग) रु. 7,910	(घ) नोक्सान 6.91%	6. रु. 1,86,450
7. रु. 2,000	8. (क) रु. 20,000	(ख) रु. 2,000
(ग) रु. 3,250	(घ) रु. 260	
9. रु. 2,66,680, र 21.27%	10. रु. 27000	11. रु. 1,35,00,000
12. रु. 26,000	13. रु. 3,25,00,000	14. रु. 25,714.29

15. (क) जेठ 45 units, असार 25 units,साउन 15 units, भदौ 27 units, असोज 42 units

(ख) जेठ, रु. 295	(ग) साउन, रु. 75	(घ) रु. 295 बिलअनुसार
(ङ) रु. 152.25	(च) रु. 300.86	16. रु. 6,783.15
17. (क) रु. 383.07	(ख) रु. 446.92	(ग) रु. 630.79
18. (क) 575 कल 17.	(ख) 675 कल	(ग) 775 कल
(घ) 875 कल	19. (क) रु. 170	(ख) रु. 365
(ग) रु. 521	(घ) रु. 599	

पाठ 5 क्षेत्रफल (Area)

5.0 पुनरवलोकन (Review)

उपयुक्त समूहमा विभाजन भई बस्नुहोस् । प्रत्येक समूहले एक एकओटा त्रिभुज खिच्नुहोस् । भुजाहरूको नाप लिनुहोस् । कस्तो त्रिभुज बन्यो ? छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

- त्रिभुजका तीनओटै भुजाको नाप बराबर भएमा उक्त त्रिभुजलाई समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle) भनिन्छ ।
- त्रिभुजका कुनै दुईओटा भुजाको नाप बराबर भएमा उक्त त्रिभुजलाई समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle) भनिन्छ ।
- त्रिभुजका तीनओटै भुजाको नाप फरक फरक भएमा उक्त त्रिभुजलाई विषमबाहु त्रिभुज (Scalene triangle) भनिन्छ ।

5.1 विषमबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of scalene triangle)

क्रियाकलाप 1

दिइएको त्रिभुज अध्ययन गर्नुहोस् र छलफल गर्नुहोस् :

मानौँ, त्रिभुज ABC छ, जसमा भुजा BC = a एकाइ, CA = b एकाइ र AB = c एकाइ छ । शीर्षबिन्दु A बाट आधार भुजा BC मा AD ⊥ BC खिचिएको छ । आधार भुजा BC मा DC को नापलाई x एकाइ मान्दा BD = $(a - x)$ एकाइ हुन्छ । त्रिभुज ABC को उचाइ AD = h मानौँ ।

अब त्रिभुज ABC को परिमिति (P) = $a + b + c$ र यसको अर्ध परिमिति

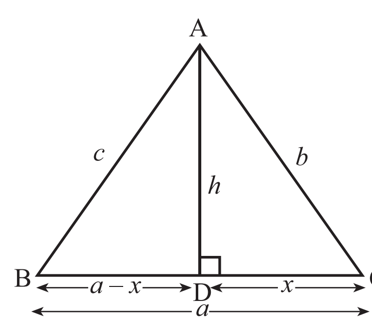
(s) = $\frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2}$ हुन्छ ।

यहाँ समकोण त्रिभुज ADB मा

$AD^2 + BD^2 = AB^2$

अथवा, $h^2 + (a - x)^2 = c^2$

अथवा, $h^2 = c^2 - (a - x)^2$ .... (i)



फेरि समकोण त्रिभुज ADC मा

$AD^2 + DC^2 = AC^2$

अथवा, $h^2 + x^2 = b^2$

अथवा, $h^2 = b^2 - x^2$ .... (ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$c^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2$

अथवा, $c^2 = b^2 - x^2 + (a - x)^2$

अथवा, $c^2 = b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2$

अथवा, $c^2 = b^2 + a^2 - 2ax$

अथवा, $2ax = b^2 + a^2 - c^2$

अथवा, $x = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$ .... (iii)

अब x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

अथवा $h^2 = b^2 - \frac{(b^2 + a^2 - c^2)^2}{4a^2}$

अथवा $h^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$

अथवा $h^2 = \frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$

अथवा $h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2}$

अथवा $h^2 = \frac{[(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]}{4a^2}$

अथवा $h^2 = \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}{4a^2}$ .... (iv)

त्रिभुजको अर्ध परिमिति $(s) = \frac{a + b + c}{2}$

अथवा, $a + b + c = 2s$ .... (v)

अथवा, $a + b = 2s - c$

दुवैतिर c घटाउँदा

अथवा, $a + b - c = 2s - c - c$

अथवा, $a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c)$

$\therefore \quad a + b - c = 2(s - c)$ .... (vi)

त्यसै गरी $a + c - b = 2s - 2b = 2(s - b)$ .... (vii)

$b + c - a = 2s - 2a = 2(s - a)$ .... (viii)

समीकरण (iv), (v), (vi), (vii) र (viii) बाट

$$h^2 = \frac{2s \times 2(s-c) \times 2(s-b) \times 2(s-a)}{4a^2}$$

अथवा, $h^2 = \dfrac{16s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{4a^2}$

अथवा, $h = \dfrac{2\sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{a}$

हामीलाई थाहा छ,

त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times a \times h$

$= \frac{1}{2} \times a \times \dfrac{2\sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{a}$

$= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$\therefore$ त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ वर्ग एकाइ

विषमबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र,

विषमबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ हुन्छ । जहाँ 's' त्रिभुजको अर्ध परिमिति हो । यसलाई Heron's formula भनिन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा त्रिभुजाकार खेतका किनाराको लम्बाइ क्रमशः 5 m 12 m. र 13 m. भए त्यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ,

मानौँ $a = 5$ m, $b = 12$ m र $c = 13$ m

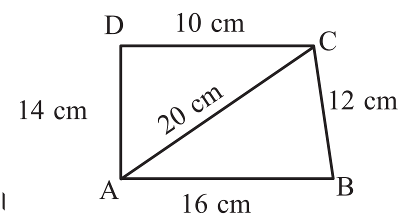
अर्धपरिमिति $(s) = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{5+12+13}{2}$ m $= 15$ m

सूत्रअनुसार,

$$\text{त्रिभुजको क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)}$$
$$= \sqrt{15 \times 10 \times 3 \times 2}$$
$$= \sqrt{900}$$
$$= 30 \text{ m}^2$$

उदाहरण 2

दिइएको चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ,

दिइएको चतुर्भुज ABCD मा दुईओटा विषमबाहु त्रिभुज छन् ।

ΔABC मा, AB = c = 16 cm, BC = a = 12 cm AC = b = 20 cm

$$\text{अर्धपरिमिति } (s) = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+20+16}{2} = 24 \text{ cm}$$

सूत्रअनुसार,

$$\Delta ABC \text{ को क्षेत्रफल } (A_1) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{24(24-12)((24-20)(24-16)}$$
$$= \sqrt{24 \times 12 \times 4 \times 8}$$
$$= \sqrt{9216}$$
$$= 96 \text{ cm}^2$$

फेरि, ΔACD मा,

मानौँ AD = a = 14 cm, CD = b = 10 cm र AC = c = 20 cm

$$\text{अर्धपरिमिति } (s) = \frac{a+b+c}{2} = \frac{14+10+20}{2} = \frac{44}{2} = 22 \text{ cm}$$

$$\Delta ACD \text{ को क्षेत्रफल } (A_2) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{22(22-14)((22-10)(22-20)}$$
$$= \sqrt{22 \times 8 \times 12 \times 2}$$
$$= \sqrt{4224}$$
$$= 8\sqrt{66} \text{ cm}^2$$

$\therefore$ त्रिभुज ABCD को क्षेत्रफल $= A_1 + A_2$

$= (96 + 8\sqrt{66}$

$= 160.99\ cm^2$

उदाहरण 3

एउटा त्रिभुजाकार करेसाबारीका किनाराहरू 3 : 4 : 5 को अनुपातमा छन् र क्षेत्रफल 216 वर्गमिटर छ भने उक्त करेसाबारीको परिमिति कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ मानौँ करेसाबारीका किनाराहरूको लम्बाइ,

$a = 3x$ m $b = 4x$ m र $c = 5x$ m छन् ।

अब अर्धपरिमिति $(s) = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3x+4x+5x}{2} = 6x$ m

जग्गाको क्षेत्रफल $(A) = 216\ m^2$

सूत्रअनुसार,

त्रिभुजाकार करेसाबारीको क्षेत्रफल $(A) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$216 = \sqrt{6x(6x-3x)(6x-4x)(6x-5x)}$

अथवा, $216 = \sqrt{6x \times 3x \times 2x \times x}$

अथवा, $216 = \sqrt{36x^4}$

अथवा, $216 = 6x^2$

अथवा, $\dfrac{216}{6} = x^2$

$x = 6$

त्यसैले करेसाबारीका किनाराहरूको लम्बाइ

$a = 3x = 3 \times 6 = 18$ m

$b = 4x = 4 \times 6 = 24$ m

$c = 5x = 5 \times 6 = 30$ m

फेरि करेसाबारीको परिमिति $(P) = a + b + c$

$= (18 + 24 + 30)$ m

$= 72$ m

उदाहरण 4

क्षेत्रफल 336 m^2 र परिमिति 84 m भएको एउटा त्रिभुजाकार पार्कको एउटा किनाराको लम्बाइ 26 m छ। उक्त पार्कको बाँकी दुईओटा किनाराको लम्बाइको नाप निकाल्नुहोस्।

समाधान

यहाँ त्रिभुजाकार पार्कको क्षेत्रफल (A) = 336 m^2

परिमिति (P) = 84 m

एउटा किनाराको लम्बाइ (a) = 26 m

बाँकी दुईओटा किनारा (b) = ? र c = ?

अब अर्धपरिमिति (S) = $\frac{P}{2} = \frac{84}{2} = 42$ m

हामीलाई थाहा छ,

$P = a + b + c$

$84 = 26 + b + c$

अथवा, $b + c = (84 - 26)$

अथवा, $b + c = 58$

$b = (58 - c)$ .... (i)

पार्कको क्षेत्रफल (A) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$336 = \sqrt{42(42-26)(42-58+c)(42-c)}$ [∵ समीकरण (i) बाट]

अथवा, $336 = \sqrt{42 \times 16 (c-16)(42-c)}$

अथवा, $336 = \sqrt{672 (42x - c^2 - 672 + 16c)}$

दुवैतर्फ वर्ग गर्दा,

अथवा, $(336)^2 = 672 (-c^2 + 58c - 672)$

अथवा, $\frac{112896}{672} = -c^2 + 58c - 672$

अथवा, $168 + c^2 - 58c + 672 = 0$

अथवा, $c^2 - 58c + 840 = 0$

अथवा, $c^2 - (30 + 28)c + 840 = 0$

अथवा, $c^2 - 30c - 28c + 840 = 0$

अथवा, $c(c - 30) - 28 (c - 30) = 0$

अथवा, $(c - 30) (c - 28) = 0$

अथवा, $c - 30 = 0 \Rightarrow c = 30$ m

अथवा, $c - 28 = 0 \Rightarrow c = 28$ m

(क) जब $c = 30$ समीकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$$b = (58 \text{ m} - 30 \text{ m}) = 28 \text{ m}$$

(ख) जब $c = 28$ m समीकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$$b = 58 \text{ m} - 28 \text{ m} = 30 \text{ m}$$

तसर्थ बाँकी किनाराहरूको लम्बाइ 28 m र 30 m हुन्छ ।

अभ्यास 5.1

1. दिइएका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् :

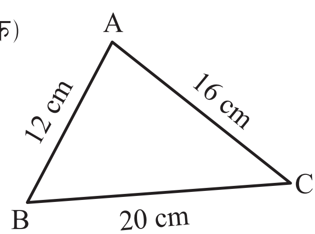
(क) विषमबाहु त्रिभुज भन्नाले के बुझिन्छ ?

(ख) त्रिभुजको तीनओटा भुजाहरूको लम्बाइ क्रमशः p cm, q cm र r cm भए उक्त त्रिभुजको अर्धपरिमिति कति हुन्छ ?

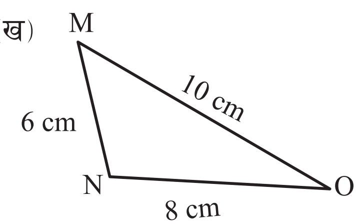
(ग) विषमबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र (Heron's formula) लेख्नुहोस् ।

2. दिइएका विषमबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

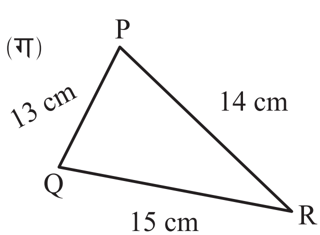
(क)



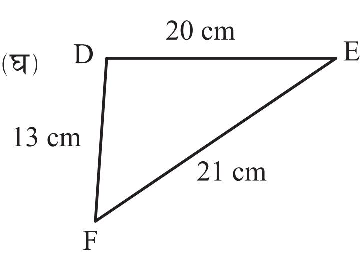
(ख)



(ग)

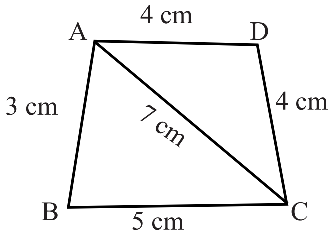


(घ)

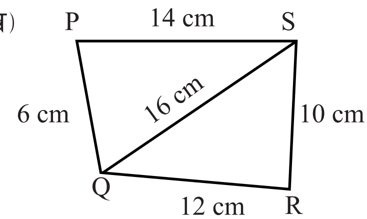


3. **दिइएका चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क)



(ख)



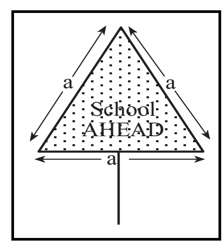
4. एउटा त्रिभुजाकार जग्गाको किनाराहरू 3 : 5 : 7 को अनुपातमा छन् र यसको परिमिति 300 मिटर छ । उक्त जग्गाको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा त्रिभुजाकार जग्गाका किनाराहरू 12 : 17 : 25 को अनुपातमा छन् र परिमिति 540 ft छ । उक्त जग्गाको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

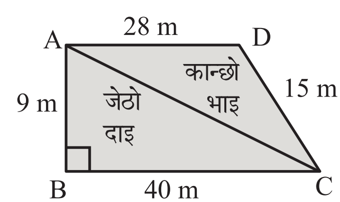
6. एउटा त्रिभुजाकार बगैँचाका किनाराहरू $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$ को अनुपातमा छन् र परिमिति 62 m भए उक्त बगैँचाको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. परिमिति 20 m र एउटा किनाराको नाप 9 m भएको एउटा त्रिभुजाकार खेतको क्षेत्रफल $6\sqrt{5}$ m^2 छ भने उक्त खेतका बाँकी किनाराहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. दिइएको ट्राफिक सङ्केत बोर्ड, समबाहु त्रिभुज आकारमा छ, जसमा भुजाहरूको लम्बाइ 'a' cm दिइएको छ । उक्त बोर्डको परिमिति 360 cm छ भने Heron's formula प्रयोग गरेर उक्त बोर्डको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :



9. एउटा चतुर्भुजाकार जग्गाको टुक्रालाई स्केलड्रइङ गरी दिइएको चित्रमा देखाइएको छ । चित्रमा देखाइए जस्तै उक्त जग्गालाई टुक्रयाएर दुई दाजु भाइलाई बाँड्नुपर्ने छ । क्षेत्रफलका आधारमा कसको जग्गा कतिले बढी छ तुलना गर्नुहोस् । साथै नटुक्र्याउँदै सो जग्गा ABCD को क्षेत्रफल कति थियो, पत्ता लगाउनुहोस् :



10. चतुर्भुज आकारमा बनाइएको एउटा बगैँचा ABCD छ, जसमा $\angle C = 90^o$, AB = 9 m, BC = 12 m, CD = 5 m र AD = 8 m छ । उक्त बगैँचाले ओगटेको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. समान आधार भएका त्रिभुज र समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल बराबर छ । त्रिभुजका भुजाहरूको लम्बाइ 26 cm, 28 cm र 30 cm छ । यदि उक्त समानान्तर चतुर्भुजको आधारको लम्बाइ 28 cm छ भने उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

(क) एउटा कार्डबोर्ड अथवा, बलियो कार्टुन बाकस काटेर त्रिभुजाकार आकृति बनाउनुहोस् । रुलरको सहायताले उक्त त्रिभुजाकार आकृतिका भुजाहरूको लम्बाइको नाप लिएर टिपोट गर्नुहोस् । अब Heron's formula को प्रयोग गरी उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) तपाईंको कापीको पानालाई दुईओटा त्रिभुजमा विभाजन गरी त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल निकाली उक्त पानाको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त पानाको लम्बाइ र चौडाइको नाप लिएर आयतको क्षेत्रफलको सूत्र प्रयोग गरी क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् । दुवै तरिकाबाट निकालिएको उक्त पानाको क्षेत्रफल तुलना गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

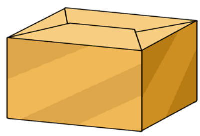
(ग) तपाईंको घर वा विद्यालय वरपर रहेका घडेरीका लागि छुट्याइएको जग्गाको किनाराहरूको वास्तविक नाप लिएर कापीमा Sketch तयार गर्नुहोस् । त्रिभुजाकार टुक्राहरू बनाउन आवश्यक किनाराहरूको पनि वास्तविक नापहरू लिनुहोस् र उक्त घडेरीको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (क) 96 cm^2 (ख) 24 cm^2 (ग) 84 cm^2 (घ) 126 cm^2
3. (क) 13.27 cm^2 (ख) 101.48 cm^2
4. 2,598.07 m^2
5. 9,000 ft^2
6. 80.49 m^2
7. 4 m / 7 m
8. 6235.38 cm^2
9. 180 m^2, 126 m^2, 54 m^2 बढी, 306 m^2
10. 65.49 m^2
11. 12 cm

5.2 चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल (Area of four walls, floor and ceiling)

क्रियाकलाप 1



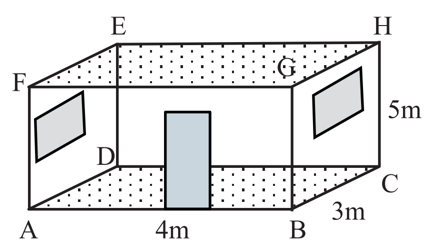
विद्यार्थी उपयुक्त समूहमा विभाजन हुनुहोस् । दिइएको चित्र अवलोकन गरी प्रत्येक समूहले तलका प्रश्नको उत्तर कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) यसमा कतिओटा समतलीय सतह छन् ?

(ख) समतलीय सतहहरूको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ र ती क्षेत्रफलहरूबिच कुन कुन सतहको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ, अवलोकन गरी समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 2

प्रत्येक विद्यार्थीलाई आआफ्नो घरको कुनै एउटा कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइको नापअनुसारको कोठाको नमुना बनाई अर्को दिन विद्यालय आउँदा ल्याउन लगाउनुहोस् । त्यसपछि, समूहमा छलफल गरी चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



तिनीहरूमध्ये कुनै समूहको एक जनाले बनाएको एउटा कोठाको नमुना चित्र र यसका किनाराहरूको नाप यहाँ प्रस्तुत गरिएको छ :

कोठाको लम्बाइ (AB) = l = 4 m

कोठाको चौडाइ (BC) = b = 3 m

कोठाको उचाइ (HC) = h = 5 m छ ।

जसअनुसार उक्त कोठाको भुइँ (ABCD) को क्षेत्रफल (A_1)

$= AB \times BC = l \times b = 4 \times 3 = 12\ m^2$

भुइँको क्षेत्रफल बराबर सिलिङको क्षेत्रफल हुने भएकाले,

सिलिङको क्षेत्रफल $= l \times b = 12\ m^2$

चार भित्तामध्ये लम्बाइतिरका दुई भित्ताको क्षेत्रफल

$(A_2) = 2\ (AB \times HC) = 2\ (l \times h) = 2\ (4 \times 5) = 40\ m^2$

चौडाइतिरका दुई भित्ताको क्षेत्रफल $(A_3) = 2\ (BC \times HC) = 2\ (b \times h) = 2\ (3 \times 5) = 30\ m^2$

त्यसैले चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल $= 12 + 40 + 30 + 12 = 94\ m^2$ हुन्छ ।

एउटा आयताकार कोठामा चारओटा भित्ता, एउटा भुइँ र एउटा सिलिङ हुन्छ । आयताकार कोठाका विपरीत दिशाका भित्ता पनि बराबर हुन्छन् । भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल पनि बराबर हुन्छ ।

माथिको चित्रबाट,

चार भित्ताको क्षेत्रफल = चारओटा आयताकार भित्ताको सतहको क्षेत्रफलको योगफल

= ABGF को क्षेत्रफल + CDEH को क्षेत्रफल + BCHG को क्षेत्रफल + ADEF को क्षेत्रफल

$= l \times h + l \times h + b \times h + b \times h$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\ (l + b)$ हुन्छ ।

भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल= ABCD को क्षेत्रफल + EFGH को क्षेत्रफल

$= l \times b + l \times b = 2lb$

चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल $= 2h(l + b) + 2lb$

$= 2(hl + bh + lb)$

$= 2(lb + bh + hl)$

उदाहरण 1

लम्बाइ 6 m, चौडाइ 4 m र उचाइ 3 m भएको एउटा कोठाको

(क) भुइँको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

(ख) चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ एउटा आयताकार कोठाको

लम्बाइ $(l) = 6$ m

चौडाइ $(b) = 4$ m

उचाइ $(h) = 3$ m

सूत्रअनुसार,

(क) भुइँको क्षेत्रफल $(A_1) = l \times b$

$= 6 \times 4 \text{ m}^2$

$= 24 \text{ m}^2$

(ख) चार भित्ताको क्षेत्रफल $(A_2) = 2h\,(l + b)$

$= 2 \times 3\,(6 + 4) \text{ m}^2$

$= (6 \times 10) \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^2$

(ग) मानौँ, सिलिङको क्षेत्रफल $= (A_3)$

हामीलाई थाहा छ,

कोठाको भुइँको क्षेत्रफल = कोठाको सिलिङको क्षेत्रफल (A_3)

$= 24 \text{ m}^2$

∴ चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल $= A_1 + A_2 + A_3$

$= (24 + 60 + 24) \text{ m}^2$

$= 108 \text{ m}^2$

वैकल्पिक तरिका

कोठाको चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल

$= 2\,(lb + bh + lh)$

$= 2\,(6 \times 4 + 4 \times 3 + 6 \times 3)$

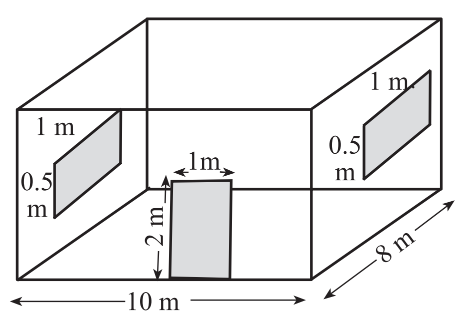
$= 2\,(24 + 12 + 18)$

$= 2 \times 54$

$= 108 \text{ m}^2$

क्रियाकलाप 3

एउटा कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 10 m, 8 m र 3 m छ । सो कोठामा उचाइ 2 m र चौडाइ 1 m भएको एउटा ढोका छ । त्यसैगरी उक्त कोठामा बराबर र उही आकारका दुईओटा झ्याल छन्, जसको लम्बाइ 1 m र चौडाइ 0.5 m छ । यहाँ ढोका र झ्यालबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउने होला, समूहमा छलफल गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



यहाँ एउटा ढोका र दुईओटा झ्यालसहितको चार भित्ताको क्षेत्रफल (A_1)

$= 2h\,(l + b)$

$= 2 \times 3\ (10 + 8)$

$= 6 \times 18$

$= 108\ m^2$

एउटा ढोकाको क्षेत्रफल $(A_2) = 2\ m \times 1\ m$

$= 2\ m^2$

दुईओटा बराबर नापका झ्यालको क्षेत्रफल $(A_3) = 2\ (1\ m \times 0.5\ m)$

$= 2 \times 0.5\ m^2$

$= 1\ m^2$

अब ढोका र झ्यालबाहेकको चार भित्ताको क्षेत्रफल

$= A_1 - A_2 - A_3$

$= (108 - 2 - 1)\ m^2$

$= 105\ m^2$

झ्याल र ढोकाबाहेकको चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउन,

(क) चार भित्ताको क्षेत्रफल (A_1) पत्ता लगाउने

(ख) झ्यालको जम्मा क्षेत्रफल पत्ता लगाउने, यसलाई (A_2) ले जनाउने

(ग) ढोकाको जम्मा क्षेत्रफल पत्ता लगाउने, जसलाई (A_3) ले जनाउने

(घ) चार भित्ताको क्षेत्रफलबाट झ्याल र ढोकाको क्षेत्रफल घटाउने

अथवा

झ्याल र ढोकाबाहेकको चारभित्ताको क्षेत्रफल $(A) = A_1 - A_2 - A_3$

उदाहरण 2

एउटा कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 15 ft, 10 ft र 9 ft रहेको छ । उक्त कोठामा 3ft किनारा भएका दुईओटा वर्गाकार झ्याल छन् र एउटा 6 ft × 3 ft को ढोका छ । झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

आयतकार कोठाको	वर्गाकार झ्यालको लम्बाइ $(l_1) = 3$ ft
लम्बाइ $(l) = 15$ ft	
चौडाइ $(b) = 10$ ft	
उचाइ $(h) = 9$ ft	

झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल = ?

हामीलाई थाहा छ,

कोठाको चार भित्ताको क्षेत्रफल $(A_1) = 2h(l + b)$

$= 2 \times 9\,(15 + 10)$

$= 18 \times 25$

$= 450\ ft^2$

दुईओटा वर्गाकार झ्यालको क्षेत्रफल $(A_2) = 2\,(l_1^2)$

$= 2(3^2)$

$= 2 \times 9$

$= 18\ ft^2$

एउटा ढोकाको क्षेत्रफल $(A_3) = 6\ ft \times 3\ ft = 18\ ft^2$

फेरि झ्याल र ढोकाबाहेक भित्ताको क्षेत्रफल,

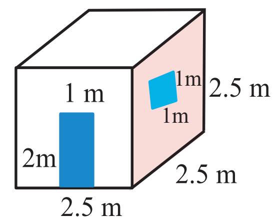
= चार भित्ताको क्षेत्रफल (A_1) – झ्यालको क्षेत्रफल (A_2) – ढोकाको क्षेत्रफल (A_3)

$= (450 - 18 - 18)\ ft^2$

$= 414\ ft^2$

क्रियाकलाप 4

एक जना विद्यार्थीले आफ्नो विद्यालयको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भएको सुरक्षा गार्ड बस्ने एउटा कोठाको नमुना बनाएर ल्याएका रहेछन् । उक्त नमुनाका आधारमा तलका प्रश्नहरू छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :



(क) उक्त कोठाको सबै समतलीय सतहहरूको क्षेत्रफलको सम्बन्ध के कस्तो छ ?

(ख) भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफलमा फरक छ कि छैन ?

(ग) चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल कति होला ?

(घ) ढोका र झ्यालबाहेक चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल कति होला ?

यहाँ,

(क) उक्त कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भएकाले सबै समतलीय सतहहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

(ख) उनको कोठाको लम्बाइ = चौडाइ = उचाइ

$l = b = h = 2.5$ m

कोठाको भुइँको क्षेत्रफल $= l \times b = 2.5\text{ m} \times 2.5\text{ m} = 6.25\text{ m}^2$

कोठाको सिलिङको क्षेत्रफल $= l \times b = 2.5\text{ m} \times 2.5\text{ m} = 6.25\text{ m}^2$

$\therefore$ उक्त कोठाको भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल बराबर छ ।

(ग) झ्याल र ढोकासहित चार भित्ताको क्षेत्रफल $= 2h(l + b) = 2 \times 2.5\,(2.5 + 2.5)\text{ m}^2$

$= 5 \times 5\text{ m}^2$

$= 25\text{ m}^2$

अब चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल = कोठाको भुइँको क्षेत्रफल + चार भित्ताको क्षेत्रफल + सिलिङको क्षेत्रफल $= (6.25 + 25 + 6.25)\text{ m}^2$

$= 37.50\text{ m}^2$

(घ) झ्याल र ढोकाको क्षेत्रफल $= (1\text{ m} \times 1\text{ m} + 2\text{ m} \times 1\text{ m}) = 3\text{ m}^2$

अब ढोका र झ्यालबाहेक चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल

= ढोका र झ्यालसहित चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल – झ्याल र ढोकाको क्षेत्रफल

$= 37.50\text{ m}^2 - 3\text{ m}^2$

$= 34.50\text{ m}^2$

माथिको प्रस्तुतिमा उक्त कोठामा प्रत्येक 6 ओटै वर्गाकार समतलीय सतहहरूको क्षेत्रफल बराबर हुने रहेछ । भुइँको क्षेत्रफल र प्रत्येक भित्ताहरूको क्षेत्रफल बराबर हुने रहेछ । तसर्थ यसलाई घनाकार कोठा भनिन्छ ।

लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भएको कोठाको

i. भुइँको क्षेत्रफल = l^2

ii. चार भित्ताको क्षेत्रफल = $4l^2$

iii. सिलिङको क्षेत्रफल = l^2

iv. चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल

$= l^2 + 4l^2 + l^2 = 6l^2$

v. झ्यालको क्षेत्रफल (a_1) र ढोकाको क्षेत्रफल (a_2) भए झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल

$= 6l^2 - a_1 - a_2$

उदाहरण 3

लम्बाइ 9 ft, चौडाइ 9 ft र उचाइ 9 ft भएको एउटा कोठाको

(क) भुइँको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ घनाकार कोठाको लम्बाइ (l) = चौडाइ (b) = उचाइ (h) = 9 ft

सूत्रअनुसार,

(क) भुइँको क्षेत्रफल (A_1) = $l^2 = (9 \text{ ft})^2 = 81 \text{ ft}^2$

(ख) चार भित्ताको क्षेत्रफल (A_2) = $4\,l^2 = 4 \times 9 \text{ ft}^2 = 4 \times 81 \text{ ft}^2 = 324 \text{ ft}^2$

हामीलाई थाहा छ,

(ग) सिलिङको क्षेत्रफल (A_3) = भुइँको क्षत्रेफल (A_1) $= 81 \text{ ft}^2$

अतः चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल $= A_1 + A_2 + A_3$

$= (324 + 81 + 81)$

$= 486 \text{ ft}^2$

वैकल्पिक तरिका

चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल (A_3) = $6\,l^2 \text{ ft}^2$

$= 6 \times (9 \text{ ft})^2$

$= 6 \times 81 \text{ ft}^2$

$= 486 \text{ ft}^2$

अभ्यास 5.2

1. दिइएका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् :

(क) आयताकार कोठाको विपरीत दिशाका भित्ताहरूको क्षेत्रफलमा के सम्बन्ध हुन्छ ?

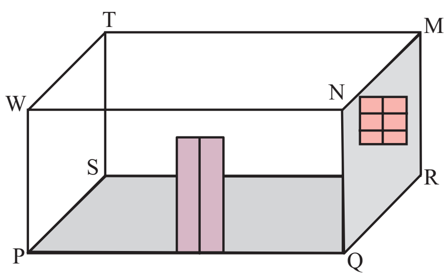
(ख) घनाकार कोठाको चारओटा भित्ताहरूको अलग अलग क्षेत्रफल र भुइँको क्षेत्रफलमा कस्तो सम्बन्ध रहन्छ ?

(ग) के आयताकार कोठाको भुइँको क्षेत्रफल र सिलिङको क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ ?

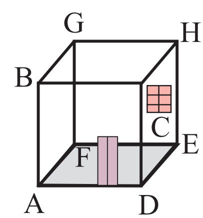
(घ) एउटा आयताकार कोठाको 6 ओटा समतलीय सतहहरूमा कुन कुन सतहहरू बराबर हुन्छन् ?

2. दिइएका आयताकार र घनाकार कोठाहरूको नमुना चित्रबाट भुइँको क्षेत्रफल, चार भित्ताको क्षेत्रफल र सिलिङको क्षेत्रफललाई जनाउने सतहहरूका नाम लेख्नुहोस् :

(क)



(ख)



3. लम्बाइ 8 m, चौडाइ 5 m र उचाइ 2.5 m भएको एउटा आयताकार कोठाको (क) चार भित्ताको क्षेत्रफल (ख) भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. लम्बाइ 8.5 m, चौडाइ 6 m र उचाइ 2.4 m भएको आयताकार कोठाको

(क) भुइँको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सिलिङको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) लम्बाइपट्टिका दुई भित्ताको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) चौडाइपट्टिका दुई भित्ताको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(च) चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा सभाहलको चार भित्ताको क्षेत्रफल 135 m^2 छ । उक्त सभाहलको लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः 15 m र 12 m भए उचाइ कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा कोठाको चार भित्ताको क्षेत्रफल 432 ft^2 छ । उक्त कोठाको चौडाइ र उचाइ क्रमशः 14 ft र 9 ft भए लम्बाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. इसानको आफ्नो सुत्ने कोठाको परिमिति 60 m र चार भित्ताको क्षेत्रफल 144 m^2 छ भने उक्त कोठाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. सोनमले पढ्ने विद्यालयमा विभिन्न कार्यक्रम सञ्चालन गर्न एउटा ठुलो हल बनाइएको छ। उक्त हलको भित्री लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 30 m, 25 m र 4 m छ। उक्त हलमा 2.5 m × 1.5 m का 5 ओटा झ्याल र 5 m × 3 m का दुईओटा ढोका छन् भने,

(क) भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) सिलिङमा प्रति वर्गमिटरमा तीनओटा बुट्टा बनाइएको छ भने जम्मा कतिओटा बुट्टा बनाइएको होला ?

(घ) चार भित्तामा प्रति 15 वर्गमिटरमा 3 ओटा राष्ट्रिय झन्डा बनाइएको छ भने कम्तीमा जम्मा कतिओटा झन्डा सो भित्तामा बनाउन सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. विद्यालयको एउटा कक्षाकोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 8 m, 6 m र 3 m छ उक्त कोठामा 2 m × 1.5 m का दुईओटा ढोका र 1.5 m × 1 m का दुईओटा झ्याल छन् भने,

(क) झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विद्यार्थीहरूले चार भित्तामा (झ्याल र ढोकाबाहेक) प्रति वर्गमिटरमा एकओटा चित्र भएका कागजका पानाहरू टाँसेका छन् भने जम्मा कतिओटा कागजका पानाहरू सो भित्तामा टाँसिएका होलान्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. सिजनका बुबाले फोटो खिच्नका लागि 2 m × 1 m को एउटा मात्र ढोका भएको अध्याँरो कोठा भाडामा लिनु भएको छ । उक्त कोठा घनाकार आकारमा छ जसको लम्बाइ 2.7 m छ भने सो कोठाको,

(क) ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) ढोकाबाहेकका चार भित्ताको क्षेत्रफलमा प्रति 4 m^2 मा एउटा फोटो फ्रेम झुन्ड्याइएको छ भने जम्मा कतिओटा फोटो फ्रेम सो भित्तामा झुन्ड्याउन सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाईंको सुत्ने कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइको नाप लिनुहोस् । उक्त कोठाको झ्याल र ढोकाको लम्बाइ र चौडाइको नाप पनि लिनुहोस् । तलका प्रश्नमा दिइएअनुसार क्षेत्रफलहरू पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) झ्याल र ढोकाको छुट्टाछुट्टै क्षेत्रफल

(ख) झ्याल र ढोकासहित चार भित्ताको क्षेत्रफल

(ग) झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल

(घ) झ्याल र ढोकासहितको चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल

(ङ) झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल

(च) तपाईंको त्यो सुत्ने कोठाको लम्बाइ र चौडाइको नापलाई 25% ले बढाउँदा बन्ने कोठाको चार भित्ता, भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल पहिलाको कोठाकोभन्दा कतिले बढी हुन्छ ? तुलना गर्नुहोस् ।

उत्तर

3.	(क) 65 m^2	(ख) 80 m^2		
4.	(क) 51 m^2	(ख) 51 m^2	(ग) 40.8 m^2	
	(घ) 28.8 m^2	(ङ) 69.6 m^2	(च) 171.6 m^2	
5.	2.5 m	6. 10 ft	7. 2.4 m	
8.	(क) 1500 m^2	(ख) 391.25 m^2	(ग) 2250 ओटा	(घ) 88 ओटा
9.	(क) 75 m^2	(ख) 75 ओटा		
10.	(क) 27.16 m^2	(ख) 6 ओटा		

5.3 **लागत खर्च निकाल्नेसम्बन्धी समस्या** (Problems related to cost estimation)

क्रियाकलाप 1

आफ्नो कक्षाकोठामा कार्पेट बिछ्याउनका लागि तपाइँको कक्षाकोठाको लम्बाइ र चौडाइ मापन गर्नुहोस् र क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । नजिकको कार्पेट पसलमा गई 1 वर्गमिटरमा कार्पेट बिछ्याएको कति खर्च लाग्छ सो जानकारी लिनुहोस् र आफ्नो कक्षाकोठामा कार्पेट बिछ्याउन लाग्ने खर्च पत्ता लगाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

जस्तै : एउटा समूहको कार्य निम्नानुसार रह्यो :

आफ्नो कक्षाकोठाको लम्बाइ $(l) = 6$ m

कोठाको चौडाइ $(b) = 4$ m

त्यसैले उक्त कोठाको क्षेत्रफल $(A) = l \times b$

$= 6 \times 4 \text{ m}^2$

$= 24 \text{ m}^2$

हामीलाई थाहा छ, कोठाको क्षेत्रफल = कार्पेटको क्षेत्रफल

त्यसैले कार्पेटको क्षेत्रफल $= 24 \text{ m}^2$

पसलमा सोध्दा, साधारण खालको कार्पेट र ज्यालासहित कोठामा कार्पेट बिछ्याउने दर 1 m^2 बराबर रु. 500 पर्छ । त्यसैले कक्षाकोठामा कार्पेट बिछ्याउँदा लाग्ने खर्च,

$= 500 \times 24 =$ रु. 12,000

1. कोठाको भुइँको क्षेत्रफल = कार्पेटको क्षेत्रफल
2. एक वर्गमिटर कार्पेट बिछ्याउँदा लाग्ने खर्चलाई जम्मा कार्पेटको क्षेत्रफलले गुणन गऱ्यो भने जम्मा खर्च पत्ता लाग्छ ।

   त्यसैले जम्मा खर्च (T) = कार्पेटको क्षेत्रफल (A) × एकाइ क्षेत्रफल कार्पेटको मूल्य (R)

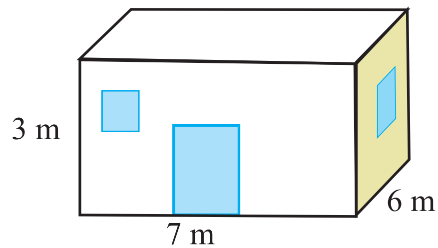
   $\therefore \quad T = A \times R$

   त्यसैगरी $R = \frac{T}{A}$ र $A = \frac{T}{R}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

7 m लम्बाइ, 6 m चौडाइ र 3 m उचाइ भएको एउटा कोठा छ । यदि प्रति वर्गमिटर कार्पेटको मूल्य रु. 300 पर्छ भने उक्त कोठाको भुइँमा कार्पेट बिछ्याउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



यहाँ कोठाको लम्बाइ $(l) = 7$ m

कोठाको चौडाइ $(b) = 6$ m

हामीलाई थाहा छ,

कोठाको भुइँको क्षेत्रफल $= l \times b$

$= 7 \times 6 \text{ m}^2$

$= 42 \text{ m}^2$

अब प्रति वर्गमिटरको कार्पेटको लागत रु. 300 पर्छ भने

42 m^2 कार्पेटको जम्मा लागत = रु. 42×300 = रु. 12,600 पर्छ ।

क्रियाकलाप 2

उपयुक्त सङ्ख्यामा समूह निर्माण गरी विद्यालयका केही कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ कति कति छ, नाप्नुहोस् । उक्त कोठाको चार भित्ता (ढोका र झ्यालबाहेक) र सिलिङमा रङरोगन गर्नुपर्ने छ । अब तलका प्रश्नहरूको उत्तर समूहमा छलफल गरी खोज्नुहोस् :

(क) चार भित्ताको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ख) झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ग) सिलिङको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

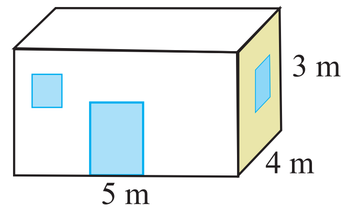
(घ) रङ लगाउँदा लाग्ने जम्मा खर्च कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

उदाहरण 2

रामको घरको एउटा कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 5 m, 4 m र 3 m छ । प्रति वर्गमिटरको रु. 50 का दरले सबै भित्ताहरूमा मात्र (झ्याल, ढोका र सिलिङबाहेकको क्षेत्रफलमा) भित्रपट्टि रङ लगाउँदा उसलाई कति रकम चाहिएला, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ,



कोठाको लम्बाइ (l) = 5 m

कोठाको चौडाइ (b) = 4 m

कोठाको उचाइ (h) = 3 m

रङ लगाउन प्रति वर्गमिटरको दर (R) = रु. 50

आवश्यक जम्मा रकम (T) = ?

सूत्रअनुसार,

चारभित्ताको क्षेत्रफल (A) = $2h(l + b) = 2 \times 3 (5 + 4)\ m^2 = 6 \times 9\ m^2$

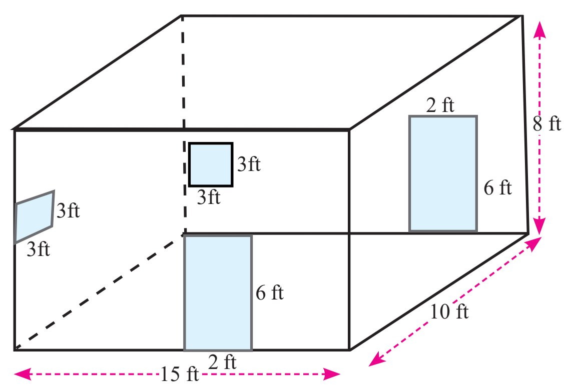
$= 54\ m^2$

आवश्यक जम्मा रकम (T) = A × R = 54 × 50 = रु. 2700

तसर्थ रामलाई चार भित्तामा रङ लगाउन रु. 2,700 आवश्यक पर्छ ।

उदाहरण 3

दिइएको कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 15ft, 10ft र 8ft रहेको छ । उक्त कोठामा 3ft किनारा भएका दुईओटा वर्गाकार झ्याल छन् र दुईओटा 6ft × 2ft का ढोका छन् । प्रति वर्गमिटरको रु. 175 का दरले चार भित्तामा र सिलिङमा रङ लगाउँदा लाग्ने जम्मा लागत पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ,

कोठाको लम्बाइ (l) = 15 ft

कोठाको चौडाइ (b) = 10 ft

कोठाको उचाइ (h) = 8 ft

वर्गाकार झ्यालको लम्बाइ (l_1) = 3ft , ढोकाको उचाइ (h_1) = 6 ft र ढोकाको चौडाइ (b_1) = 2 ft

हामीलाई थाहा छ,

कोठाको चार भित्ता र सिलिङको क्षेत्रफल $(A_1) = 2h(l + b) + lb$

$= [2 \times 8 (15 + 10) + 15 \times 10]\ ft^2$

$= (16 \times 25 + 150)\ ft^2$

$= (400 + 150)\ ft^2$

$= 550\ ft^2$

दुईओटा वर्गाकार झ्यालको क्षेत्रफल $(A_2) = 2 \times (l_1)^2$

$= 2 \times 3^2\ ft^2$

$= 18\ ft^2$

दुईओटा ढोकाको क्षेत्रफल $(A_3) = 2\ (h_1 \times b_1)$

$= 2 \times 6 \times 2\ ft^2$

$= 24\ ft^2$

झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल (रङ लगाइएको भागको क्षेत्रफल)

$(A) = A_1 - A_2 - A_3$

$= (550 - 18 - 24)\ ft^2$

$= 508\ ft^2$

प्रति वर्गमिटरमा रङ लगाउने दर (R) = रु. 175

जम्मा लागत (T) $= A \times R$

= 508 × रु. 175

= रु. 88,900

तसर्थ रङ लगाउन आवश्यक रकम रु. 88,900 हुन आउँछ ।

उदाहरण 4

सरीताले एउटा वर्गाकार सभाहलमा कार्पेट बिछ्याउँदा प्रति वर्गमिटर रु. 75 को दरले रु. 10,800 तिरिछिन् । त्यसैगरी उक्त हलको झ्याल, ढोका बाहेक र चार भित्तामा प्लास्टर गर्दा ज्यालासहित रु. 25 प्रति वर्गमिटरका दरले जम्मा खर्च रु. 6,000 तिरिछन् । उक्त हलमा 4 ओटा झ्याल र 2 ओटा ढोकाको गरी जम्मा क्षेत्रफल 24 m^2 छ भने सभाहलको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ,

कोठामा एक वर्गमिटरमा कार्पेट बिछ्याउदा लागेको खर्च (R_1) = रु. 75

कार्पेट बिछ्याउन लागेको जम्मा खर्च (T_1) = रु. 10,800

चार भित्तामा प्लास्टर गर्दा एक वर्गमिटरमा लागेको खर्च (R_2) = रु. 25

चार भित्तामा प्लास्टर गर्दा लागेको जम्मा खर्च (T_2) = रु. 6,000

वर्गाकार कोठाको लम्बाइ $(l) = ?$

वर्गाकार कोठाको उचाइ $(h) = ?$

अब वर्गाकार कोठाको भुईको क्षेत्रफल $(A_1) = \frac{T_1}{R_1}$

अथवा, $l^2 = \frac{\text{रु. } 10,800}{\text{रु.} 75} m^2$ $\quad [\because A = l^2]$

अथवा, $l^2 = 144 m^2$

$\because \; l = 12$ m

फेरि, झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल $(A_2) = \frac{T_2}{R_2}$

$= \frac{6,000}{25}$ $\quad [\because A = 4hl]$

$= 240 m^2$

झ्याल र ढोकासहित चारभित्ताको क्षेत्रफल $= 240 + 24 = 264 m^2$

अथवा, $4lh = 264$

अथवा, $4 \times 12 \times h = 264$

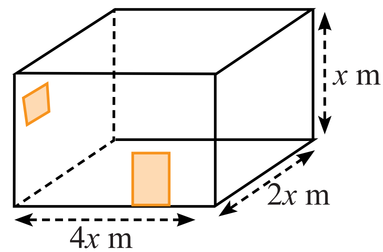
अथवा, $h = \frac{264}{4 \times 12}$

अथवा, $h = 5.5$ m

तसर्थ उक्त वर्गाकार कोठाको उचाइ 5.5 m रहेछ ।

उदाहरण 5

चौडाइ उचाइको दोब्बर र लम्बाइ चौडाइको दोब्बर भएको एउटा कोठामा कार्पेट बिछ्याउन रु. 80 प्रति वर्गमिटरका दरले जम्मा रु. 10,240 खर्च लाग्छ । उक्त कोठामा भएका झ्याल र ढोकाको जम्मा क्षेत्रफल 5 m^2 छ भने चार भित्ता र सिलिङमा प्रति वर्गमिटरको रु. 90 का दरले रङ लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ मानौँ कोठाको उचाइ $(h) = x$ m भए

कोठाको चौडाइ $(b) = 2x$ m

र कोठाको लम्बाइ $(l) = 2b = 2 \times 2x \text{ m} = 4x$ m

कोठामा प्रति वर्गमिटरमा कार्पेट बिछ्याउँदा लाग्ने खर्च $(R_1) =$ रु. 80

कार्पेट बिछ्याउन लाग्ने जम्मा खर्च $(T_1) =$ रु. 10,240

एक वर्गमिटरमा रङ लगाउन चाहिने खर्च $(R_2) =$ रु. 90

सिलिङ र चार भित्तामा रङ लगाउन चाहिने खर्च $(T_2) = ?$

अब कोठाको भुइँको क्षेत्रफल $(A_1) = \dfrac{\text{कार्पेट बिछ्याउन लाग्ने जम्मा खर्च } (T_1)}{\text{प्रति वर्गमिटरमा कार्पेट बिछ्याउन लाग्ने खर्च } (R_1)}$

अथवा, $l \times b = \dfrac{10,240}{80}$ $\quad [\because A = l \times b]$

अथवा, $4x \times 2x = 128$

अथवा, $8x^2 = 128$

अथवा, $x^2 = \dfrac{128}{8}$

अथवा, $x^2 = 16$ $\quad$ अथवा, $x = 4$

$\therefore$ कोठाको उचाइ $(h) = 4$ m

कोठाको चौडाइ $(b) = 2x \text{ m} = 2 \times 4 \text{ m} = 8$ m

कोठाको लम्बाइ $(l) = 4x \text{ m} = 4 \times 4 \text{ m} = 16$ m

फेरि, चार भित्ता र सिलिङको क्षेत्रफल $(A_2) = 2h(l + b) + lb$

$= 2 \times 4 (16 + 8) + 16 \times 8$

$= 8 \times 24 + 128$

$= 320 \text{ m}^2$

अब झ्याल र ढोका बाहेक चारभित्ता र सिलिङको क्षेत्रफल $(A_3) = 320 - 5 = 315 \text{ m}^2$

चार भित्ता र सिलिङमा रङ लगाउँदा लाग्ने जम्मा खर्च $(T_2) = A_3 \times R_2$

$=$ रु. $90 \times 315 =$ रु. 28,350

$\therefore$ चार भित्ता र सिलिङमा रङ लगाउन जम्मा रु. 28,350 खर्च लाग्छ ।

अभ्यास 5.3

1. लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः 12 ft र 11 ft भएको कोठाको भुइँमा रु. 130 प्रति वर्ग फुटका दरले कार्पेट बिछ्याउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. एउटा कोठाको भित्री लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 15 फिट, 12 फिट र 8 फिट छ । उक्त कोठामा 6 ft × 4 ft 6 inch का दुईओटा झ्याल र 3 ft × 6 ft 6 inch को एउटा ढोका छन् । उक्त कोठाको (झ्याल, ढोका र सिलिङबाहेक) चार भित्तामा प्रति वर्गफिटको रु. 125 का दरले रङ लगाउँदा जम्मा कति रकम चाहिएला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा वर्गाकार कोठाको लम्बाइ 15 ft र उचाइ 8 ft भए सो कोठाको भुइँ, चार भित्ता र सिलिङमा प्रति वर्ग फुट रु. 120 को दरले प्लास्टर गर्न कति रकम चाहिएला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. **एउटा सभा हलको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ क्रमशः 32 मिटर, 32 मिटर र 4 मिटर छ । उक्त भवनमा 2.5 m × 1.8 m का 6 ओटा झ्याल र 4 m × 3 m का दुईओटा ढोका छन् भने,**

   (क) सो भवनको भुइँ र सिलिङको जम्मा क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ख) झ्याल र ढोकाको जम्मा क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ग) झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (घ) भुइँमा प्रति 2 वर्गमिटरमा एउटा कुर्सी राख्न मिल्छ भने उक्त भवनमा बढीमा एकै साइजका कतिओटा कुर्सीहरू राख्न मिल्छ ?
   (ङ) प्रति वर्गमिटरको रु. 350 का दरले चारओटै भित्तामा प्लास्टर गर्दा जम्मा कति रकम आवश्यक पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. सिम्रनको घरमा भएका कोठाहरूमध्ये सबैभन्दा ठुलो कोठाको भुइँको क्षेत्रफल 500 ft^2 भएको पाइयो । उक्त कोठामा 6 ft × 5 ft का 3 ओटा झ्याल र 3 ft × 6.5 ft को एउटा ढोका छन् । यदि उक्त कोठाको लम्बाइ 25 ft र उचाइ 9 ft छ । उक्त कोठाको (झ्याल, ढोका र सिलिङबाहेक) चार भित्तामा प्रति वर्गफुटको रु. 300 को दरले रङ लगाउँदा जम्मा कति रकम आवश्यक पर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा वर्गाकार कोठाको उचाइ 8 फिट छ । उक्त कोठामा प्रति वर्गफिट रु. 200 का दरले कार्पेट बिछ्याउन रु. 39,200 लाग्छ । सो कोठाका सबै भित्तामा प्रति वर्गफुटको रु. 250 का दरले रङ लगाउन जम्मा कति रकम लाग्छ होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा विद्यालयले आफ्ना शिक्षक एवम् कर्मचारी बस्ने वर्गाकार कोठामा कार्पेट बिछ्याउँदा प्रति वर्गमिटर रु. 144 का दरले जम्मा रु. 7,056 तिऱ्यो । सोही कोठाको झ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्तामा कागज टाँस्दा ज्यालासहित रु. 400 प्रति वर्गमिटरका दरले जम्मा रु. 30,000 लाग्यो । यदि झ्याल र ढोकाको जम्मा क्षेत्रफल 9 m^2 छ भने उक्त कोठाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. निमाको घरमा भएको एउटा कोठाको लम्बाइ चौडाइको दोब्बर र उचाइ 2.8 मिटर छ । उक्त कोठाको झ्याल, ढोका र सिलिङबाहेक चार भित्तामा चित्र कोर्न रु. 900 प्रति वर्गमिटरको दरले रु. 54,000 लाग्छ । यदि झ्याल र ढोकाको क्षेत्रफल 7.2 वर्गमिटर भए सो कोठाको भुइँमा प्रति वर्गमिटर रु.200 का दरले टायल राख्दा उनले जम्मा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. एउटा विद्यालयको सभा हलको लम्बाइ चौडाइको दोब्बर तथा चौडाइ उचाइको दोब्बर छ । उक्त कोठाको झ्याल र ढोकासहित चार भित्तामा रङ लगाउन रु. 225 प्रति वर्गमिटरका दरले विद्यालयले रु. 43,200 तिऱ्यो भने सो हलको भुइँमा टायल बिछ्याउन रु. 250 प्रति वर्गमिटर का दरले विद्यालयले कति तिर्नुपर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. एउटा नगरपालिकाले सजावट गरेको पार्कको नाप 50 मिटर × 40 मिटर छ । सो पार्कमा 20 से.मि. लम्बाइ भएका दुबोका वर्गाकार चपरी बिछ्याउँदा,

(क) जम्मा कतिओटा चपरीहरू चाहिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि एउटा चपरी बिछ्याउँदा रु. 225 पर्छ भने उक्त पार्कमा चपरी बिछ्याउनका लागि जम्मा कति लागत लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) केही वर्षपछि सो पार्क सानो भएको ठानी नगरपालिकाले लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः 15 m र 10 m बढाउने निधो गऱ्यो । बढेको क्षेत्रफलमा सोही लम्बाइ भएका वर्गाकार दुबाका चपरी बिछ्याउन कतिओटा चपरी थप्नुपर्छ र उही दरले कति रकम लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

1. उपयुक्त समूहमा बसी तपाईँहरूले अध्ययन गरिरहेको विद्यालयको कक्षाकोठा वा आफू बस्ने घरको कोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइका साथै झ्याल र ढोकाको लम्बाइ र उचाइ नाप्नुहोस् र दिइएका प्रश्नको समूहमा समाधान खोजी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) भुइँ र सिलिङको क्षेत्रफल कति कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) झ्याल ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) हालसालै कायम रहेको दरअनुसार चार भित्ता, सिलिङ र भुइँमा प्लास्टर गर्न जम्मा कति खर्च आवश्यक पर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) आफ्नो गाउँ वा सहरमा हालसालै चलिआएको दरअनुसार चार भित्ता र सिलिङमा रङ लगाउन जम्मा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. तपाईंको विद्यालयको नौ कक्षा को कक्षाकोठाको भित्तामा रङ लगाउनु पर्ने छ । विद्यालयले तपाईँलाई उक्त कक्षाकोठामा रङ लगाउने खर्चको लागत इष्टिमेट तयार गर्न लगायो । तपाईंले कक्षाकोठामा रङ लगाउनका लागि लाग्ने लागत खर्च निकाल्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. रु. 17160	2. रु. 44812.5	3. रु. 1,11,600	
4. (क) 2048 m^2	(ख) 51 m^2	(ग) 461 m^2	(घ) 512 ओटा
(ङ) रु. 1,61,350	5. रु. 2,10,150	6. रु. 1,12,000	
7. 3 m	8. रु. 5,400	9. रु. 32,000	
10. (क) 50,000	(ख) रु. 1,12,50,000	(ग) 31,250, रु. 70,31,250	

5.4 त्रिभुजाकार र चतुर्भुजाकार जग्गाको क्षेत्रफल (Area of triangular and quadrilateral shaped land)

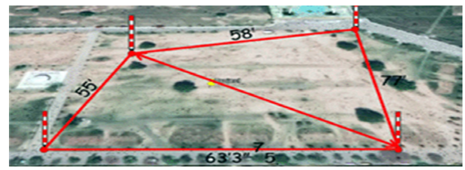
क्रियाकलाप 1

नेपालमा व्यवस्थित रूपले कित्तानापी सञ्चालन गर्न वि. सं. 2014 सालमा नापी विभाग खडा भएको देखिन्छ । अहिले पनि नापी विभाग अन्तर्गत कित्तानापी, जियोजेडिक नापी तथा टोपोनापी विस्तृत रूपमा क्रमबद्ध तरिकाबाट विकास भई देशमा आवश्यक विभिन्न नापी सञ्चालन भइसकेको छ । तल दिइएका अवस्था अध्ययन गर्नुहोस् र तपाईँ बसोबास गर्नुभएको क्षेत्रमा जग्गा जमिनको नापी नक्सा के कसरी गरिन्छ, छलफल गर्नुहोस् :

1. दुर्गाकुमारीको स्थायी घर पहाडी जिल्लामा पर्छ । उनको 3 रोपनी खेत, 1 रोपनी पाखा बारी, 8 आना 3 पैसा क्षेत्रफल भएको जग्गामा घर तथा घरले चर्चेको जग्गा छ भने मूल सडक लाइनमा 4 आना क्षेत्रफल भएको त्रिभुजाकार घडेरी पनि छ ।

2. रविलालको स्थायी घर तराईमा पर्छ । उनी त्यहाँको एक जमिन्दार हुन् । उनको 3 बिघा खेत, 1 बिघा 3 कठ्ठा बारी, 1 कठ्ठा 2 धुर क्षेत्रफल भएको जग्गामा घर तथा घरले चर्चेको जग्गा छ भने मूल सडक लाइनमा 4 कठ्ठा क्षेत्रफल भएको चतुर्भुजाकार घडेरी पनि छ ।

3. भीमबहादुर एक अमिन हुन् । उनले जस्तोसुकै आकारमा भएका जग्गाको पनि नापी विभागले जारी गरेको मापदण्डअनुरूप क्षेत्रफल निकाल्छन् । यहाँ एउटा चतुर्भुजाकार जग्गालाई दुइओटा त्रिभुजहरूमा बदलेर त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र प्रयोग गरी दुवै त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाइ त्यसको योगफलबाट चतुर्भुजाकार जग्गाको क्षेत्रफल निकाल्न खोजिएको छ ।



जग्गा तथा जमिनका सतहहरू विभिन्न आकारका हुन्छन् । यस पाठमा हामी त्रिभुजाकार र चतुर्भुजाकार जग्गाको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने विषयवस्तु अध्ययन गर्छौं । जग्गाको कारोबार गर्दा त्यसको क्षेत्रफल मापन अनिवार्य हुन्छ । वर्गफिट वा वर्गमिटर जग्गा मापनको सर्वमान्य एकाइ हो । तर स्थानअनुसार जमिनको क्षेत्रफल नाप्ने तरिका तथा एकाइ फरक फरक हुन सक्छ ।

नेपालको विभिन्न स्थानमा प्रचलनमा रहेको जग्गा जमिनको नापी गर्दा प्रयोग गरिने एकाइ

1. हिमाली तथा पहाडी भेगमा रोपनी, आना, पैसा, दाम आदि एकाइमा मापन गरिन्छ ।
2. तराई भेगमा बिघा, कठ्ठा, धुर आदि एकाइमा मापन गरिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

दिइएको तालिकाका आधारमा विश्वव्यापी सर्वमान्य एकाइ (वर्गफिट वा वर्गमिटर) सँग रूपान्तर गरेर जग्गा वा घडेरीको क्षेत्रफल कति हुन्छ वा कसरी नापिन्छ भन्ने बुझ्न सकिन्छ । तपाईं बसोबास गर्नुभएको क्षेत्रमा जग्गा जमिनको क्षेत्रफल मापन गर्न कुन कुन एकाइको प्रयोग गर्ने गरिएको छ छलफल गर्नुहोस् र प्राप्त निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत् गर्नुहोस् ।

तराई भेगमा प्रचलनमा रहेका एकाइ		वर्गमिटर	वर्गफिट	पहाडी भेगमा प्रचलनमा रहेका एकाइमा रूपान्तर	मिटर, फिट र इन्च एकाइबिचको सम्बन्ध
1 बिघा	20 कठ्ठा	6772.63	72900	13.31 रोपनी	1 m = 3.2808 ft
1 कठ्ठा	20 धुर	338.63	3645	10.65 आना	1 m = 39.37 inches
1 धुर		16.93	182.25	2.13 पैसा	
पहाडी भेगमा प्रचलनमा रहेका एकाइ				**तराई भेगमा प्रचलनमा रहेका एकाइमा रूपान्तर**	
1 रोपनी	16 आना	508.72	5476	1.5023 कठ्ठा	1 foot = 0.3048 m
1 आना	4 पैसा	31.79	342.25	1.8777 धुर	1 foot = 12 inches
1 पैसा	4 दाम	7.95	85.56		
1 दाम		1.99	21.39		

जग्गा जमिनको नापी गर्दा प्रयोग गरिने एकाइहरूबिच एकअर्कामा रूपान्तर

उदाहरण 1

सोमनाथले हालसालै नवलपरासीमा 8 कठ्ठा 3 धुर जग्गा खरिद गरेका रहेछन् । सो जग्गाको जग्गाधनी पुर्जामा वर्गमिटर एकाइमा मात्र क्षेत्रफल राखिएको रहेछ भने कति वर्गमिटर क्षेत्रफल राखिएको हुनुपर्छ ?

समाधान

जग्गाको क्षेत्रफल = 8 कठ्ठा 3 धुर

= 338.63 × 8 वर्गमिटर + 16.93× 3 वर्गमिटर

[∵ 1 कठ्ठा = 338.63 वर्गमिटर र 1 धुर = 16.93 वर्गमिटर]

= 2709.04 वर्गमिटर + 50.79 वर्गमिटर

= 2759.83 वर्गमिटर

सोमनाथले खरिद गरेको 8 कठ्ठा 3 धुर जग्गामा 2759.83 वर्गमिटर क्षेत्रफल रहेछ ।

उदाहरण 2

दिइएको क्षेत्रफल भएका जग्गालाई आना एकाइमा रूपान्तर गर्नुहोस् :

(क) 2 रोपनी 3 आना (ख) 3 कठ्ठा 9 धुर

समाधान :

(क) 2 रोपनी 3 आना = 16×2 आना + 3 आना

= 32 आना + 3 आना

= 35 आना

(ख) 3 कठ्ठा 9 धुर = 338.63×3 वर्गमिटर + 16.93×9 वर्गमिटर

[$\because$ 1 कठ्ठा = 338.63 वर्गमिटर र 1 धुर = 16.93 वर्गमिटर]

= 1015.89 वर्गमिटर + 152.37 वर्गमिटर

= 1168.26 वर्गमिटर

= $\frac{1168.26}{31.79}$ आना [$\because$ 1 आना = 31.79 वर्गमिटर]

= 36.75 आना

उदाहरण 3

एउटा जग्गाको क्षेत्रफल 1560 वर्गफिट छ । यस जग्गाको क्षेत्रफललाई निम्नअनुसार रूपान्तर गर्नुहोस् ।

(क) हिमाली तथा पहाडी भेगमा प्रचलनमा रहेका एकाइहरू अनुरूप रोपनी, आना, पैसा र दाममा

(ख) तराई भेगमा प्रचलनमा रहेका एकाइहरू अनुरूप बिघा, कठ्ठा र धुरमा

समाधान :

(क) दिइएको जग्गाको क्षेत्रफल = 1560 वर्गफिट

= $\frac{1560}{5476}$ रोपनी [$\because$ 1 रोपनी = 5476 वर्गफिट]

= 0.28489 रोपनी

= 0.28489×16 आना [$\because$ 1 रोपनी = 16 आना]

= 4.55824 आना

= (4 + 0.55824) आना

= 4 आना र 0.55824×4 पैसा [$\because$ 1 आना = 4 पैसा]

= 4 आना र 2.23296 पैसा

= 4 आना र (2 + 0.23296) पैसा

= 4 आना, 2 पैसा र (0.23296 × 4) दाम [∵ 1 पैसा = 4 दाम]

= 4 आना, 2 पैसा, 0.93 दाम

यसलाई रोपनी - आना - पैसा - दामअनुसार 0 - 4 - 2 - 0.93 (रोपनी) लेखिन्छ ।

वैकल्पिक तरिका

दिइएको जग्गाको क्षेत्रफल = 1560 वर्गफिट

$= \frac{1560}{5476}$ रोपनी [∵ 1 रोपनी = 5476 वर्गफिट]

= 0.28489 रोपनी

अब 0.28489 रापनीलाई आनामा रूपान्तर गर्दा,

0.28489 रोपनी = 0.28489 × 16 आना [∵ 1 रोपनी = 16 आना]

= 4.55824 आना

= (4 + 0.55824) आना

अब 0.55824 आनालाई पैसामा रूपान्तर गर्दा,

= 0.55824 × 4 पैसा [∵ 1 आना = 4 पैसा]

= 2.23296 पैसा

= (2 + 0.23296) पैसा

अब 0.23296 पैसालाई दाममा रूपान्तर गर्दा,

= 0.23296 × 4 दाम [∵ 1 पैसा= 4 दाम]

= 0.93 दाम

तसर्थ, जग्गाको क्षेत्रफल = 1560 वर्गफिट = 0 रोपनी, 4 आना, 2 पैसा, 0.93 दाम हुने रहेछ ।

यसलाई 0 - 4 - 2 - 0.93 (रोपनी) लेखिन्छ ।

(ख) दिइएको जग्गाको क्षेत्रफल = 1560 वर्गफिट

$= \frac{1560}{72900}$ बिघा [∵1 बिघा = 72900 वर्गफिट]

= 0.021399 बिघा

अब 0. 021399 बिघालाई कठ्ठामा रूपान्तर गर्दा,

0. 021399 बिघा = 0. 021399 × 20 कठ्ठा [∵ 1 बिघा = 20 कठ्ठा]

= 0.42798 कठ्ठा

= (0 + 0.42798) कठ्ठा

अब 0.42798 कठ्ठालाई धुरमा रूपान्तर गर्दा,

= 0.42798 × 20 धुर [∵ 1 कठ्ठा = 20 धुर]

= 8.5596 धुर

= 8.56 धुर

तसर्थ, जग्गाको क्षेत्रफल = 1560 वर्गफिट = 0 बिघा, 0 कठ्ठा, 8.56 धुर = 8.56 धुर रहेछ ।

यसलाई बिघा - कठ्ठा - धुर - 0cनुसार 0-0-8.56-0 (बिघा) लेखिन्छ ।

उदाहरण 4

कित्ता न./ खण्डे न.	विवरण (घर, आवादी, इत्यादि)	जग्गाधनीको हकहिस्सा	मोहीको नाम थर	किसिम वा वर्ग	क्षेत्रफल/व.मि.	कैफियत	प्रमाणित गर्नेको दस्तखत
२४४	आवादी	एकलौटी		धनहर/ खेत	०-१-१५-० (बिघा) (०-२०-२०-४)		
०	रैकर निजी			दोयम	५९२.५२		
२४७	आवादी	एकलौटी		धनहर/खेत	०-१-१५-० (बिघा) (०-२०-२०-४)		
०	रैकर निजी			दोयम	५९२.५२		
			जम्मा क्षेत्रफल		११८५.०४ वर्गमिटर		

माथिको जग्गाधनी पुर्जामा कित्ता न. 244 को जग्गाको क्षेत्रफल एक कठ्ठा पन्ध्र धुर अर्थात् 592.52 वर्गमिटर देखाइएको छ । अगाडि पृष्ठमा दिइएको क्षेत्रफल रूपान्तर तालिका प्रयोग गरी परीक्षण गर्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको जग्गाधनी पुर्जामा कित्ता न. 244 को क्षेत्रफल = 1 कठ्ठा 15 धुर

= 20 धुर + 15 धुर [∵ 1 कठ्ठा = 20 धुर]

= 35 धुर

= 16.93× 35 वर्गमिटर [∵ 1 धुर = 16.93 वर्गमिटर]

= 592.55 वर्गमिटर

उदाहरण 5

गा.वि.स./ न.पा	वडा न. नक्सा सिट	कित्ता न.	विवरण (घर, आवादी, इत्यादि	ज.ध.को हक हिस्सा	मोहिको नाम थर	किसिम वा वर्ग	क्षेत्रफल विगाहा/(वर्गमिटर	मोठ / पाना न.
??	३	२७३१	आवादी	सबै		खेत अवल	०-०-१०-०	२८
	३ (क)		रैकर निजी				१६९.३२	१०८३३
					जम्मा क्षेत्रफल (व.मी.) १६९.३२			

माथिको जग्गाधनी पुर्जामा कित्ता न. 2731 को जग्गाको क्षेत्रफल 0-0-10-0 (बिघा) अर्थात् 169.32 वर्गमिटर देखाइएको छ । अगाडि पृष्ठमा दिइएको क्षेत्रफल रूपान्तर तालिका प्रयोग गरी परीक्षण गर्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको जग्गाधनी पुर्जामा कित्ता न. 244 को क्षेत्रफल = 0 बिघा 0 कठ्ठा 10 धुर 0 कुनुवा

=10 धुर

= 10 × 16.93 वर्गमिटर [∵ 1 धुर = 16.93 वर्गमिटर]

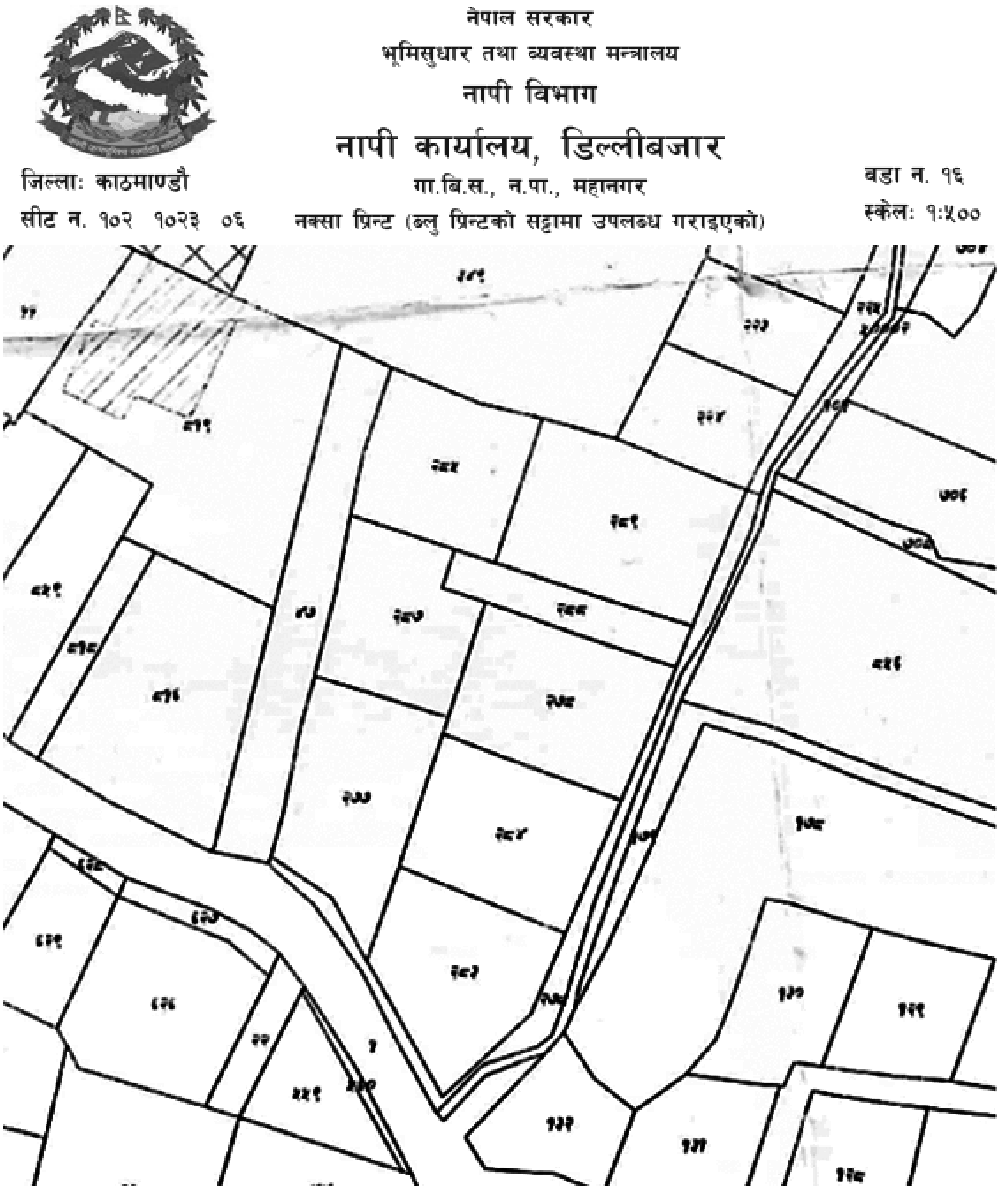
= 169.30 वर्गमिटर

mobile मा NaaPI apps install गरेर Area Conversion option प्रयोग गरी पनि एउटा एकाइबाट अन्य एकाइमा रूपान्तर गर्न सकिन्छ । Plotter option प्रयोग गरी चित्र बनाउने र Primary and Secondary Unit tool प्रयोग गरी प्रत्येक किनाराको लम्बाइ प्रविष्टी गरी क्षेत्रफल निकाल्न सकिन्छ ।

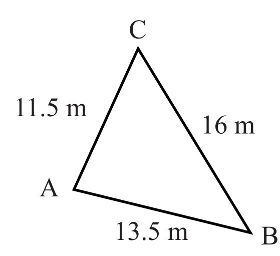
त्रिभुजाकार र चतुर्भुजाकार जग्गाको क्षेत्रफल

उदाहरण 6

तलको चित्रमा काठमाडौंको कुनै एक ठाउँको नक्सा प्रिन्ट दिइएको छ । यहाँ विभिन्न आकारका जग्गाका टुक्राहरू देख्न सकिन्छ । यो नक्सा प्रिन्ट 1 : 500 को स्केलमा ड्इङ गरिएको छ । यस मध्येको केही भाग तलको चित्रमा दिइएको छ ।



नक्सा प्रिन्टको यस भागमा कित्ता न. 559 को जग्गा त्रिभुज आकारको छ । यस जग्गाको किनाराहरूको वास्तविक लम्बाइको नाप राखेर दायाँको चित्रमा नक्साङ्कन गरी दिइएको छ ।



(क) यस टुक्रा जग्गाको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) रोपनी - आना - पैसा - दामअनुसार क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(क) दिइएको त्रिभुजाकार जग्गाको,

किनारा AB को लम्बाइ $(c) = 13.5$ m

किनारा BC को लम्बाइ $(a) = 16$ m

किनारा CA को लम्बाइ $(b) = 11.5$ m

परिमिति $(p) = a + b + c = 13.5 + 16 + 11.5 = 41$ m

अर्ध परिमिति $(s) = \frac{p}{2} = \frac{41}{2} = 20.5$ m

क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ,

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{20.5(20.5-16)(20.5-11.5)(20.5-13.5)}$$
$$= \sqrt{20.5 \times 4.5 \times 9 \times 7}$$
$$= \sqrt{5811.75}$$
$$= 76.23 \text{ m}^2$$

∴ उक्त जग्गाको क्षेत्रफल 76.23 वर्गमिटर रहेछ ।

(ख) यो जग्गाको क्षेत्रफल रोपनीभन्दा कम भएकाले आनामा बदल्दा,

$76.23 \text{ m}^2 = \frac{76.23}{31.79}$ आना [∵ 1 आना = 31.79 m^2]

= 2.3979 आना

= (2 + 0.3979) आना

= 2 आना र 0.3979 × 4 पैसा [∵ 1 आना = 4 पैसा]

= 2 आना र 1.5916 पैसा

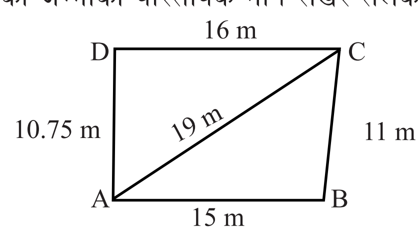
= 2 आना 1 पैसा र 0.5916 × 4 दाम [∵ 1 पैसा = 4 दाम]

= 2 आना 1 पैसा 2.37 दाम

= 0 – 2 – 1 - 2.37 (रोपनी)

उदाहरण 7

माथि उदाहरण 4 मा दिइएको नक्सा प्रिन्टमा कित्ता न. 278 को जग्गाको वास्तविक नाप राखेर तलको चित्रमा नक्साङ्कन गरी दिइएको छ ।



(क) सो जग्गाको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

(ख) बिघा - कठ्ठा- धुर - 0 अनुसार क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(क) दिइएको जग्गाको नक्सा चित्र चतुर्भुज आकारको छ। जसलाई 1:500 को अनुपातमा बनाइएको छ। विकर्ण AC खिचेर दुईओटा त्रिभुजहरूमा विभाजन गरिएको छ।

Δ ABC को क्षेत्रफल निकाल्दा,

भुजा BC को लम्बाइ $(a) = 11$ m

भुजा AC को लम्बाइ $(b) = 19$ m

भुजा AB को लम्बाइ $(c) = 15$ m

Δ ABC को अर्धपरिमिति $(s) = \frac{a + b + c}{2} = \frac{11 + 19 + 15}{2} = 22.5$ m

Δ ABC को क्षेत्रफल (A) $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{22.5(22.5 - 11)(22.5 - 19)(22.5 - 15)}$

$= \sqrt{22.5 \times 11.5 \times 3.5 \times 7.5}$

$= \sqrt{6792.1875}$

$= 82.41 \text{ m}^2$

Δ DAC को क्षेत्रफल निकाल्दा,

भुजा DC को लम्बाइ $(d) = 16$ m

भुजा AC को लम्बाइ $(b) = 19$ m

भुजा DA को लम्बाइ $(e) = 10.75$ m

Δ DAC को अर्धपरिमिति $(s') = \frac{d + b + e}{2} = \frac{16 + 19 + 10.75}{2} = 22.88$ m

Δ DAC को क्षेत्रफल (A) $= \sqrt{s'(s'-a)(s'-b)(s'-c)}$

$= \sqrt{22.88 (22.88 - 16)(22.88 - 19)(22.88 - 10.75)}$

$= \sqrt{22.88 \times 6.88 \times 3.88 \times 12.13}$

$= \sqrt{7408.6142}$

$= 86.07 \text{ m}^2$

अब चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल = Δ ABC को क्षेत्रफल + Δ DAC को क्षेत्रफल

$= 82.41 \text{ m}^2 + 86.07 \text{ m}^2$

$= 168.48 \text{ m}^2$

तसर्थ उक्त जग्गाको क्षेत्रफल 168.48 m^2 रहेछ।

(ख) जग्गाको क्षेत्रफल = 168.48 m^2

यहाँ दिइएको जग्गाको क्षेत्रफल 1 कठ्ठा अर्थात् 338.63 वर्गमिटरभन्दा कम छ त्यसैले धुरमा परिवर्तन गर्दा,

जग्गाको क्षेत्रफल = 168.48 m^2

$= \frac{168.48}{16.93}$ धुर [∵ 1 धुर = 16.93 वर्गमिटर]

= 9.95 धुर

उक्त जग्गाको क्षेत्रफल 0-0-9.95-0 (बिघा) रहेछ ।

अभ्यास 5.4

1. अगाडि पृष्ठमा प्रस्तुत क्षेत्रफल रूपान्तर तालिकाको आधारमा तलका प्रश्नहरूका जबाफ लेख्नुहोस् :

(क) नेपालमा जग्गा जमिनको नाप नक्सा गर्ने तरिकाअनुसार हिमाली तथा पहाडी भेगमा कुन तरिकाअनुसार नापी गरिन्छ ?

(ख) तपाईँ बसोबास गर्ने भेगमा जग्गा नापी गर्ने कुन तरिकाअनुसार नापी गरिन्छ ?

(ग) एक रोपनीमा कति वर्गफिट क्षेत्रफल हुन्छ ?

(घ) एक रोपनीमा कति आना हुन्छ र एक आनामा कति वर्गफिट क्षेत्रफल हुन्छ ?

(ङ) एक बिघामा कति वर्गमिटर क्षेत्रफल हुन्छ ?

(च) एक बिघामा कति कठ्ठा हुन्छ र एक कठ्ठामा कति वर्गफिट क्षेत्रफल हुन्छ ?

(छ) एक आना र एक कठ्ठा मध्ये कुन एकाइमा कति वर्गमिटर क्षेत्रफल बढी हुन्छ ?

(ज) 37 फिट चौडाइ भएको एउटा आयताकार जग्गाको क्षेत्रफल एक रोपनी रहेछ भने सो जग्गाको लम्बाइ कति फिट होला ?

(झ) तराईका एक जमिन्दारको 10 बिघा जग्गा रहेछ । रोपनी एकाइअनुसार हिसाब गर्ने हो भने उनको कति रोपनी जग्गा हुन्छ ?

2. निम्न क्षेत्रफल भएका जग्गाको क्षेत्रफलको एकाइलाई वर्गफिट एकाइमा रूपान्तर गर्नुहोस् :

(क) 2 कठ्ठा (ख) 4 आना (ग) 8 धुर

(घ) 5 आना (ङ) 6 आना 3 पैसा (च) 4 कठ्ठा 10 धुर

3. निम्न क्षेत्रफल भएका जग्गाको क्षेत्रफलको एकाइलाई वर्गमिटर एकाइमा रूपान्तर गर्नुहोस् :

(क) 2 रोपनी (ख) 1 बिघा (ग) 16 धुर (घ) 3 कठ्ठा (ङ) 5 कठ्ठा 10 धुर

4. निम्न क्षेत्रफल भएका जग्गाको क्षेत्रफलको एकाइलाई आना एकाइमा रूपान्तर गर्नुहोस् :

(क) 16 धुर (ख) 4 कठ्ठा (ग) 3 कठ्ठा 2 धुर

(घ) 6 कठ्ठा 10 धुर (ङ) 2 रोपनी (च) 1 बिघा

5. निम्न क्षेत्रफल भएका जग्गाको क्षेत्रफलको एकाइलाई धुर एकाइमा रूपान्तर गर्नुहोस् :

(क) 3 आना (ख) 6 आना 3 पैसा (ग) 16 कठ्ठा 5 धुर

(घ) 1 बिघा 4 कठ्ठा (ङ) 2 बिघा

6. आइतमानको एक रोपनी क्षेत्रफल भएको एउटा जग्गा 20 फिट बाटामा मोहोडा पर्ने रहेछ । जसको बाटामा जोडिएपट्टिको किनाराको लम्बाइ 148 फिट रहेछ । उक्त जग्गालाई चारओटा बराबर क्षेत्रफल भएका घडेरीहरूमा टुक्रा गर्नु पर्दा एउटा घडेरीको क्षेत्रफल कति हुन आउछ ? प्रत्येक घडेरीको लम्बाइ र चौडाइ कति कति फिट हुन्छ ?

7. निम्न जग्गाहरूको क्षेत्रफललाई निम्नअनुसार रूपान्तर गर्नुहोस् :

(क) रोपनी-आना-पैसा-दाम (R-A-P-D)

(ख) बिघा-कठ्ठा-धुर (B-K-Dh)

(अ) 3056 वर्गफिट (आ) 1426.85 वर्गमिटर (इ) 5026.80 वर्गफिट

(ई) 2167.24 वर्गमिटर (उ) 80736.75 वर्गफिट

8. तलको जग्गाधनी पुर्जामा दिइएको जग्गाको क्षेत्रफल 0-5-3-0 बिघा अर्थात् 1743.70 वर्गमिटर देखाइएको छ । अगाडि पृष्ठमा दिइएको क्षेत्रफल रूपान्तर तालिका प्रयोग गरी परीक्षण गर्नुहोस् :

दाई न./नक्सा सीट न.	कित्ता न./खण्डे न.	विवरण (घर, आवादी, इत्यादि)	जग्गाधनीको हकसिस्सा	मोहीको नाम दर	किसिम वा वर्ग	क्षेत्रफल/व.मि.	कैफियत
५	१६६	आवादी	एकलौटी		धनहर/खेत	०-५-३-० बिघा (०-३०-३०-४)	
		रैकर निजी			जम्मा	१७४३.७०	
					जम्मा क्षेत्रफल १७४३.७० वर्गफिट		

9. दिइएको जग्गाधनी पुर्जामा दिइएको जग्गाको क्षेत्रफल 677.26 वर्गमिटर देखाइएको छ। यस नक्सामा जग्गाको क्षेत्रफल वर्गमिटरमा मात्र दिइएको छ। अगाडि पृष्ठमा दिइएको क्षेत्रफल रूपान्तर तालिका प्रयोग गरी क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

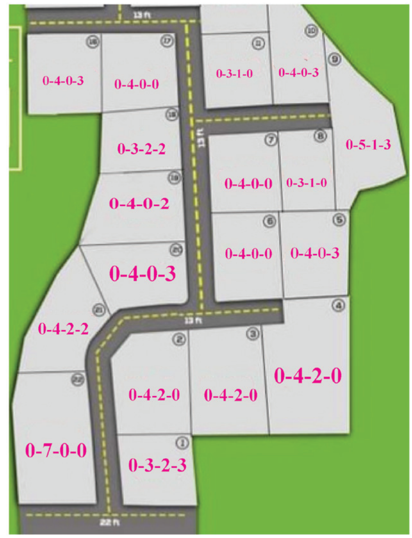
(क) पहाडी प्रणालीअनुसार रोपनी - आना-पैसा-दाम ढाँचामा

(ख) तराई प्रणालीअनुसार बिघा-कठ्ठा-धुर ढाँचामा

(ग) वर्गफिटमा

वार्डन./ नक्सा सीट न.	कित्ता न. /खण्डे न.	विवरण (घर, आवादी, इत्यादि)	जग्गाधनीको हकसिस्सा	जग्गाधनीको हकहिस्सा	मोहीको नाम थर	किसिम वा वर्ग	क्षेत्रफल/ व.मि.	कैफियत
४	३३४	आवादी,	एकलौटी			धनहर /खेत /	०-०-०-०	
४घ	३३४	रैकर निजी				दोयम	६७७.२६	
	०				जम्मा क्षेत्रफल ६७७.२६ वर्गमिटर			

10. दायाँको चित्रमा घडेरीका रूपमा टुक्रयाइएको जग्गाको नक्सा देखाइएको छ । प्रत्येक घडेरीको क्षेत्रफल रोपनी-आना-पैसा-दामअनुसार दिइएको छ।



(क) घडेरी न. 1, 2, 6, 8 र 9 को क्षेत्रफलको एकाइलाई वर्गमिटर एकाइमा रूपान्तर गर्नुहोस् ।

(ख) घडेरी न. 4, 18, 20 र 22 को क्षेत्रफलको एकाइलाई वर्गफिट एकाइमा रूपान्तर गर्नुहोस् ।

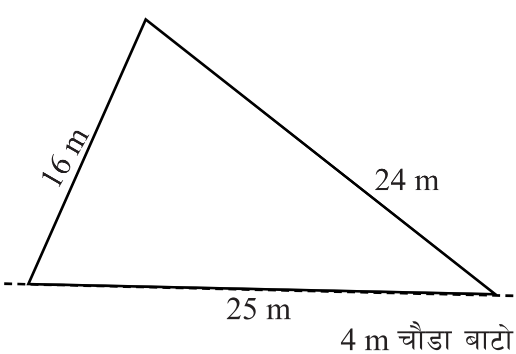
(ग) घडेरी न. 9 र 22 को क्षेत्रफलको एकाइलाई बिघा-कठ्ठा-धुर एकाइमा रूपान्तर गर्नुहोस् ।

11. दिइएका नाप भएका जग्गाहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

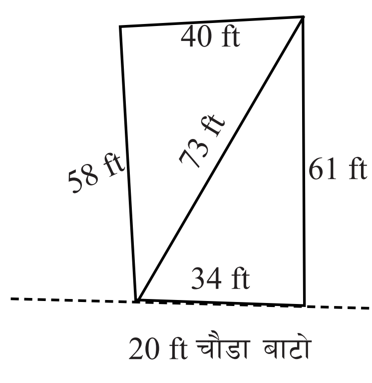
(अ) रोपनी-आना-पैसा-दाम एकाइअनुसार

(आ) बिघा-कठ्ठा-धुर एकाइअनुसार

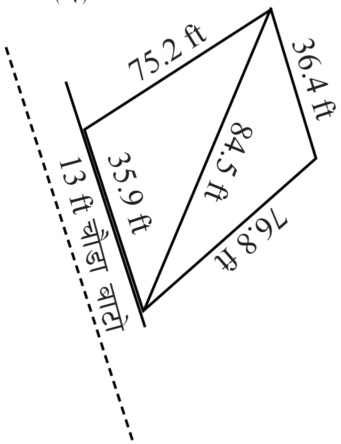
(क)



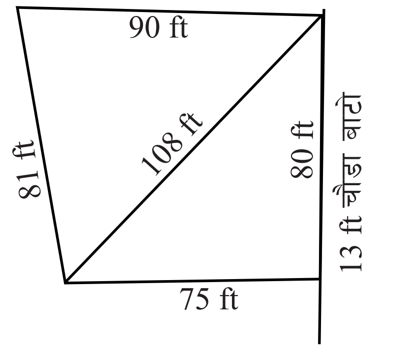
(ख)



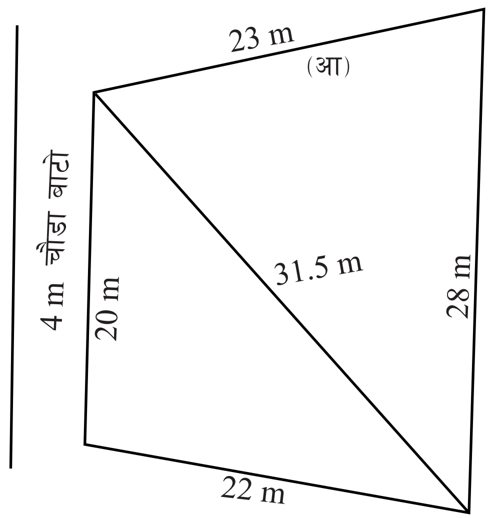
(ग)



(घ)



(ङ)



12. एउटा त्रिभुजाकार जग्गाको परिमिति 160 फिट रहेछ। यदि उक्त जग्गाको भुजाहरूको अनुपात 5:7:8 रहेछ भने क्षेत्रफल कति धुर रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

1. कक्षामा उपस्थित विद्यार्थीबाट उपयुक्त समूहमा विभाजन हुनुहोस् (एक समूहमा कम्तीमा 5 जना पर्ने गरी)। समूहका प्रत्येक व्यक्तिहरूका लागि जिम्मेवारी विभाजन गर्नुहोस् (फित्ता टेप लिएर मापन गर्ने 2 जना, नाप हेर्ने 1 जना, टिपोट गर्ने 1 जना, सबै कार्यको निरीक्षण गर्ने 1 जना)। प्राप्त जिम्मेवारीअनुसार आवश्यक सामग्री (फित्ता टेप, रुलर, सिसाकलम आदि) सहित कुनै दुइ समूहले आ-आफ्नो तरिकाबाट विद्यालयको खेल मैदानको निश्चित भाग (त्रिभुजाकार तथा चतुर्भुजाकार भाग) को किनाराको नाप लिएर क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् । यसै गरी अर्को दुई दुई समूहले विद्यालयनजिक रहेको कुनै सार्वजनिक स्थल (मन्दिर परिसर, पार्क, खेल मैदान, खुला स्थान वा विद्यालयकै अन्य खुला स्थान आदि) को खुला स्थानको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् । यसरी गरिएको कार्यको नक्सा चित्रसहित क्षेत्रफल निकालेर कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् । प्रत्येक दुई समूहले पत्ता लगाएको एउटै स्थलको क्षेत्रफलबिच के कति समानता आयो तुलना गर्नुहोस् र शिक्षकको सहयोगमा सही विकल्पको छनोट गर्नुहोस् ।

2. प्रत्येक विद्यार्थीले आआफ्नो परिवारको नाममा रहेको जग्गा जमिन के कति छ ? त्यसको प्रमाणीकरणको लागि जग्गाधनी पुर्जामा क्षेत्रफल कसरी र कति राखिएको छ ? के तपाईं आफू पनि आफ्नो परिवारको नाममा भएको जग्गा जमिनको क्षेत्रफल निकाल्न सक्नुहुन्छ ? सो जग्गा जमिनको नापी कहिले, कोबाट र कसरी भएको थियो ? आफ्ना अभिभावक, समाजमा अग्रज तथा सम्बन्धित व्यक्तिको सहयोगमा जानकारी सङ्कलन गर्नुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2.	(क) 7290 वर्गफिट	(ख) 1369 वर्गफिट	(ग) 1458 वर्गफिट
	(घ) 1711.25 वर्गफिट	(ङ) 2310.18 वर्गफिट	(च) 16402.5 वर्गफिट
3.	(क) 1017.44 वर्गफिट	(ख) 6772.63 वर्गफिट	(ग) 270.88 वर्गफिट
	(घ) 1015.89 वर्गफिट	(ङ) 1862.45 वर्गफिट	
4.	(क) 8.52 आना	(ख) 42.60 आना	(ग) 33.02 आना
	(घ) 69.24 आना	(ङ) 32 आना	(च) 212.96 आना
5.	(क) 5.63 धुर	(ख) 12.67 धुर	(ग) 325 धुर
	(घ) 480 धुर	(ङ) 800 धुर	

6. 1369 वर्गफिट, लम्बाइ 37 फिट, चौडाइ 37 फिट

7. (अ)-(क) 0-8-3-2.87 (रोपनी) (ख) 0-0-16.77 (बिघा)

(आ)-(क) 2-12-3-2.02 (रोपनी (ख) 0-4-4.2 (बिघा)

(इ)-(क) 0-14-2-3 (रोपनी) (ख) 0-1-7.58 (बिघा)

(ई)-(क) 4-4-0-2.6 (रोपनी) (ख) 0-6-7.99 (बिघा)

(उ)-(क) 14-11-3-2.39 (रोपनी) (ख) 1-2-3 (बिघा)

9. (क) 1-5-1-0.8 (रोपनी) (ख) 0-2-0 (बिघा) (ग) 7289.96 वर्गफिट

10. (क) घडेरी न. (1) 0-3-2-3 / 117.24 वर्गमिटर

घडेरी न. (2) 0-4-0-2 / 143.06 वर्गमिटर

घडेरी न. (6) 0-4-0-0 / 127.16 वर्गमिटर

घडेरी न. (8) 0-3-1-0 / 103.32 वर्गमिटर

घडेरी न. (9) 0-5-1-3 / 172.87 वर्गमिटर

(ख) घडेरी न. (4) 0-4-2-0 / 1540.12 वर्गफिट

घडेरी न. (18) 0-3-2-2 / 1240.65 वर्गफिट

घडेरी न. (20) 0-4-0-0 / 1433.17 वर्गफिट

घडेरी न. (22) 0-7-0-0 / 2395.75 वर्गफिट

(ग) घडेरी न. (9) 0-0-10.2 (बिघा)

घडेरी न. (22) 0-0-13.14 (बिघा)

11. (क) 184.89 वर्गमिटर (अ) 0-5-3-1.04 (रोपनी) (आ) 0-0-10.91 (बिघा)

(ख) 2187.22 वर्गफिट (अ) 0-6-1-2.25 (रोपनी) (आ) 0-0-12 (बिघा)

(ग) 2746.54 वर्गफिट (अ) 0-8-0-0.3 (रोपनी) (आ) 0-0-15.07 (बिघा)

(घ) 6565.80 वर्गफिट (अ) 1-3-0-2.9 (रोपनी) (आ) 0-1-16.02 (बिघा)

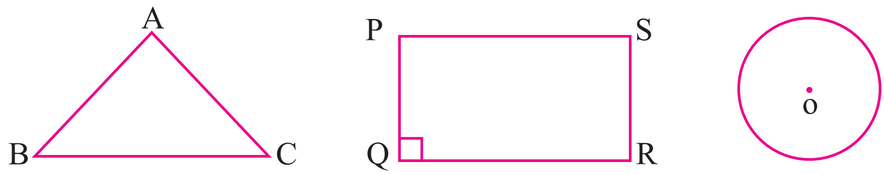
(ङ) 530.18 वर्गमिटर (अ) 1-0-2-2.79 (रोपनी) (आ) 0-1-11.31 (बिघा)

11. (क) 1108.51, 6.082 धुर

पाठ 6 प्रिज्म (Prism)

6.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएका चित्र कापीमा बनाउनुहोस् र अवलोकन तथा समूहमा छलफल गरी दिइएका प्रश्नको उत्तर कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :



(क) दिइएका आकृतिमा कतिओटा भुजाहरू (किनारा) छन् ?

(ख) दिइएका आकृतिमा समतलीय सतहहरूको परिमिति कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ग) दिइएका आकृतिमा समतलीय सतहहरूको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

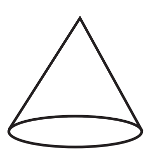
(घ) कार्डबोर्ड पेपरबाट समान नाप र आकारका यस्तै समतलीय आकारहरू बनाएर चाङ लगाएर राखियो भने कस्तो आकृति बन्छ होला ?

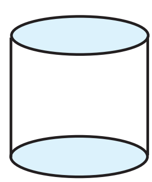
(ङ) कापीका पानालाई चाङ बनाएर राखेको देख्नुभएको छ ?

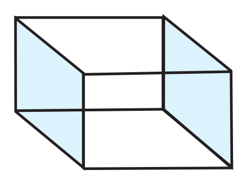
6.1 प्रिज्मको परिचय (Introduction to prism)

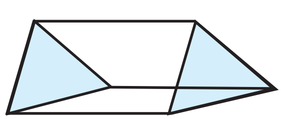
क्रियाकलाप 1

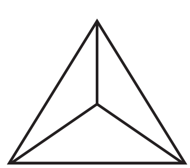
उपयुक्त सङ्ख्याका समूहमा बसी तल दिइएका जस्तै एक एकओटा ठोस वस्तु लिनुहोस् । उक्त ठोस वस्तुको अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

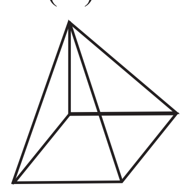

(i)


(ii)

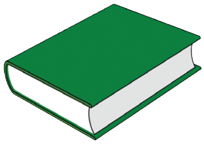
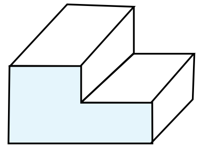
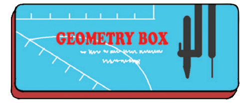

(iii)


(iv)


(v)


(vi)

(vii) (viii)

(ix)  (x)  (xi) 

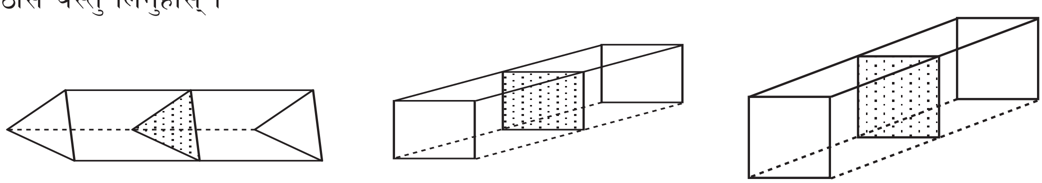
(क) दिइएका ठोस आकृतिहरूका कुन कुन चित्रमा सम्मुख सतहहरू अनुरूप र समानान्तर छन् ?
(ख) दिइएका ठोस आकृतिमा कतिओटा सिधा किनारा छन् ?
(ग) दिइएका ठोस आकृतिमा अनुरूप र समानान्तर दुई विपरित बहुभुजहरू कुन आकारका छन् ?
(घ) दिइएका ठोस आकृतिमा कतिओटा शीर्षबिन्दुहरू छन् ?

दुई विपरीत बहुभुजहरू समानान्तर र अनुरूप भएका तीन आयामिक (three dimensional) ठोस वस्तुलाई प्रिज्म (prism) भनिन्छ ।

6.2 प्रिज्मको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल (Cross-section area of prism)

क्रियाकलाप 2

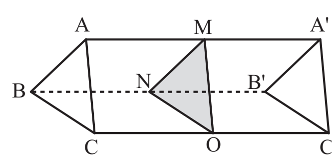
उपयुक्त समूहमा बस्नुहोस् र प्रत्येक समूहले एक एकओटा आयताकार वा वर्गाकार वा त्रिभुजाकार ठोस वस्तु लिनुहोस् ।



त्यसपछि प्रिज्मलाई चित्रमा देखाइए जस्तै गरी बिचतिरबाट काट्नुहोस् । यसरी काट्दा कस्ता सतहहरू प्राप्त हुन्छन् आआफ्नो समूहमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

जस्तै : तेस्रो समूहको समूह कार्य निम्नानुसार रह्यो ।

त्रिभुज आधार भएको ठोस वस्तुलाई त्यसको लम्बाइ वा उचाइमा लम्ब हुने गरी त्रिभुजाकार सतहसँग समानान्तर हुने गरी काट्दा बन्ने सतह त्रिभुज MNO को क्षेत्रफललाई नै उक्त त्रिभुजाकार आधार भएको प्रिज्मको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल हो ।



($\Delta ABC \cong \Delta MNO \cong \Delta A'B'C'$)

प्रिज्मका विशेषता

(क) अनुरूप र समानान्तर दुई विपरित बहुभुजहरू हुन्छन्, जसलाई प्रिज्मको आधार भनिन्छ । आधार त्रिभुज भएको प्रिज्म (त्रिभुजाकार प्रिज्म), आधार आयात भएको प्रिज्म (आयताकार प्रिज्म) आदि ।

(ख) आधारहरूसँग समानान्तर हुने गरी बिचको कुनै पनि भागलाई काट्दा देखिने सतहलाई प्रिज्मको क्रस सेक्सन (Cross section) भनिन्छ र यसरी बनेको क्रस सेक्सन आधारसँग अनुरूप हुन्छ ।

(ग) प्रिज्महरू छड्के (Oblique) र समकोणी (Right) गरी दुई प्रकारका हुन्छन् । यस कक्षामा हामी समकोणी प्रिज्म (जसमा आधारहरू बाहेकका अन्य सतहहरू आधारमा लम्ब हुन्छन्) सम्बन्धमा मात्र अध्ययन गर्छौं ।

(घ) प्रिज्मका आधारहरू बाहेकका अन्य सतहहरूलाई प्रिज्मको छड्के (पार्श्ववर्ती) सतहको क्षेत्रफल (Lateral Surface Area) भनिन्छ ।

(ङ) प्रिज्मका आधारहरू बिचको लम्बदुरीले प्रिज्मको उचाइ वा लम्बाइलाई जनाउँछ ।

(च) प्रिज्मको आयतन (V) = आधारको क्षेत्रफल (A) × उचाइ (h) हुन्छ ।

क्रियाकलाप 3

के हाम्रो पाठ्यपुस्तक पनि प्रिज्म हो ? हो भने कस्तो प्रिज्म हो । किताबको पहिलो पाना, बिचको पाना र अन्तिम पानाको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाई तुलना गर्नुहोस् । किताबको प्रत्येक पानाले प्रिज्मको केलाई जनाउँद छ ?

त्रिभुजाकार प्रिज्मका आधारको क्षेत्रफल

(क) समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(ख) समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

(ग) विषमबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ, $s = \frac{a+b+c}{2}$

(घ) समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} \times p \times b$

(ङ) समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2}p^2$

अथवा, $\frac{1}{2}b^2$

(च) आयताकार प्रिज्मका आधारको क्षेत्रफल (A) = $l \times b$

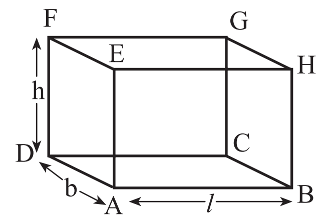
(छ) वर्गाकार प्रिज्मका आधारको क्षेत्रफल (A) = l^2

6.3 प्रिज्मको पाश्ववर्ती (छड्के) सतहको क्षेत्रफल (Lateral surface area of prism)

क्रियाकलाप 4

समूहमा एक एकओटा फरक फरक आयत वा वर्ग वा त्रिभुज आधार भएको ठोस वस्तु लिनुहोस् । उक्त ठोस वस्तुलाई कापीमा ट्रेस गर्नुहोस् ।

समूह 3 को समूह कार्य निम्नानुसार रह्यो :



उनीहरूले षड्मुखाकार प्रिज्म लिई यसको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइलाई क्रमशः l, b र h ले जनाएका छन् । यसको आधार र आधारसँग समानान्तर हुने सतहबाहेकका अन्य सतह यसप्रकार रहेका छन् :

ABHE, DCGF, ADFE र BCGH

यी सबै सतहहरू आयत आकारका छन् र ती सतहका क्षेत्रफल निम्नानुसार छन् :

सतह ABHE को क्षेत्रफल $(A_1) = l \times h = lh$

सतह DCGF को क्षेत्रफल $(A_2) = l \times h = lh$

सतह ADFE को क्षेत्रफल $(A_3) = b \times h = bh$

सतह BCGH को क्षेत्रफल $(A_4) = b \times h = bh$

यी चारओटै सतहको क्षेत्रफलको योगफल

$= A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$= lh + lh + bh + bh$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h(l + b) = 2(l + b) \times h = P \times h$ जहाँ, P = आधारको परिमिति

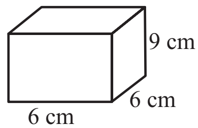
यसरी उक्त समूहले छलफल गरी आधार र आधारसँग समानान्तर हुने सतहबाहेकका अन्य चारओटा सतहहरूको क्षेत्रफलको योगफल नै प्रिज्मको पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल हो भनी निष्कर्ष निकाली कक्षामा प्रस्तुत गरे ।

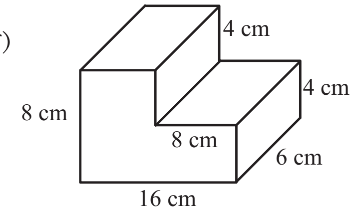
प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) $= 2h(l + b)$

प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) $= P \times h$ पनि हुन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएका प्रिज्मको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल र पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 

(ख) 

समाधान

यहाँ,

(क) दिइएको प्रिज्ममा

लम्बाइ $(l) = 6$ cm, चौडाइ $(b) = 6$ cm र उचाइ $(h) = 9$ cm

हामीलाई थाहा छ,

प्रिज्मको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल = प्रिज्मका आधारको क्षेत्रफल

$= l \times b = 6 \times 6 = 36$ cm^2

त्यसैले प्रिज्मको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल = 36 cm^2

फेरि प्रिज्मको आधारको परिमिति (P) = (6 + 6 + 6 + 6) cm = 24 cm

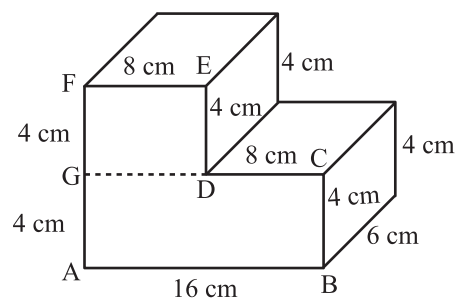
प्रिज्मको पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल = P × h = 24 cm × 9 cm = 216 cm^2

(ख) दिइएका चित्रमा CD रेखालाई G सम्म लम्ब्याऔँ । आयत ABCG को क्षेत्रफल (A_1)

= AB × BC

= 16 × 4

= 64 cm^2



आयत DEFG को क्षेत्रफल (A_2)

= DE × EF = 4 × 8

= 32 cm^2

अब प्रिज्मको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल = $A_1 + A_2$ = 64 + 32

= 96 cm^2

फेरि प्रिज्मको आधारको परिमिति (P)

= AB + BC + CD + DE + EF + FA

= 16 + 4 + 8 + 4 + 8 + 8

= 48 cm

प्रिज्मको लम्बाइ $(l) = 6$ cm

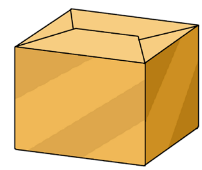
प्रिज्मको पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल $= P \times l$

$= 48 \times 6$

$= 288$ cm^2

6.4 प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल (Total surface area of prism)

क्रियाकलाप 5



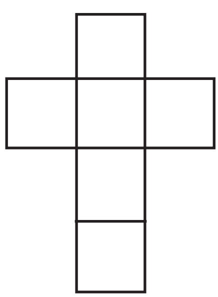
समूहमा एक एकओटा घनाकार चक वा मसीको बट्टा र आयत आधार भएका साबुनका वा सलाईका बट्टा लिनुहोस् । बट्टा वा कार्टुनलाई बिस्तारै खोलेर चार्टपेपरमा ट्रेस गर्नुहोस् र तलका प्रश्नहरूमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

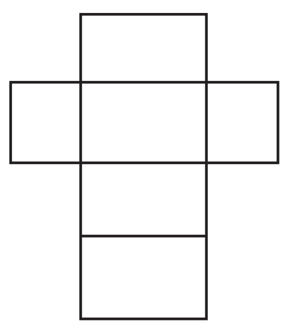
(क) कस्तो आकृति बन्छ ?

(ख) यिनीहरूमा कतिओटा अनुरूप वा अनुरूप नहुने सतहहरू रहेका छन् ?

(ग) मोहडा खोलिएका घनाकार र आयताकार आधार भएका वस्तुलाई बिस्तारै मोड्नुहोस्, के पहिलाका जस्तै आकृतिहरू बन्छन् ?

(घ) ती घनाकार र आयताकार आधार भएका ठोस वस्तुहरूको सबै सतहको क्षेत्रफल निकाली जोड्नुहोस् । त्यसका आधारमा घनाकार र आयताकार आधार भएका ठोस वस्तुहरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।





चकको बट्टामा जम्मा 6 ओटा मोहडा छन् । सो बट्टा घनाकार छ । त्यसैले प्रत्येक सतह वर्गाकार छन् । सबै सतहका क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् । एउटा वर्गाकार सतहको लम्बाइ l भए क्षेत्रफल l^2 हुन्छ ।
6 ओटै वर्गाकार सतहको क्षेत्रफल $= 6l^2$ वर्ग एकाइ

घनाकार प्रिज्मको एउटा सतहको क्षेत्रफल $= l^2$ हुन्छ

घनाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल $(A) = 6l^2$ हुन्छ ।

त्यसैगरी सलाईको बट्टामा जम्मा 6 ओटा मोहडाहरू छन् । सो बट्टा षड्मुखा आकारको छ । जम्मा 6 ओटा सतहहरूमध्ये 3 जोडा सतहहरू अनुरूप छन् । सबै सतहहरूको क्षेत्रफल जोडेपछि पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

6 ओटै सतहहरूको क्षेत्रफलको योगफल नै आयताकार आधार भएको प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल हो ।

आयताकार आधार भएको प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2(lb + bh + hl)$

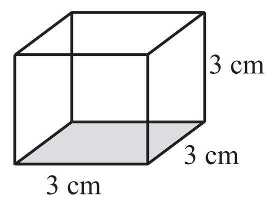
अथवा, TSA $= 2A + p \times h$

जहाँ, A = आधारको क्षेत्रफल

P = आधारको परिमिति

उदाहरण 2

दिइएको प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



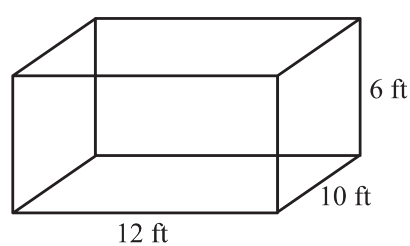
समाधान

यहाँ घनाकार प्रिज्मको लम्बाइ $(l) = 3$ cm

पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 6l^2 = 6 \times (3 \text{ cm})^2 = 54 \text{ cm}^2$

उदाहरण 3

एउटा विद्यालयले आफ्ना विद्यार्थीलाई सफा खानेपानी जम्मा गरी वितरण गर्नका लागि चित्रमा देखाए जस्तै आयताकार आधार भएको ट्याङ्की निर्माण गऱ्यो, जसको लम्बाइ 12 ft, चौडाइ 10 ft र गहिराइ 6 ft रहेको छ । उक्त टयाङ्कीको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ,

टयाङ्कीको लम्बाइ $(l) = 12$ ft

चौडाइ $(b) = 10$ ft

उचाइ $(h) = 6$ ft

सूत्रअनुसार,

ट्याङ्कीको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2\,(12 \times 10 + 10 \times 6 + 6 \times 12) \text{ ft}^2$

$= 2\ (120 + 60 + 72)\ ft^2$

$= 2 \times 252\ ft^2$

$= 504\ ft^2$

∴ सो ट्याङ्कीको पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 504\ ft^2$

वैकल्पिक तरिका

ट्याङ्कीको आधारको क्षेत्रफल (A) $= l \times b$

$= 12 \times 10$

$= 120\ ft^2$

आधारको परिमिति (P) $= 2(l + b)$

$= 2(12 + 10)$

$= 44\ ft$

ट्याङ्कीको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2A + p \times h$

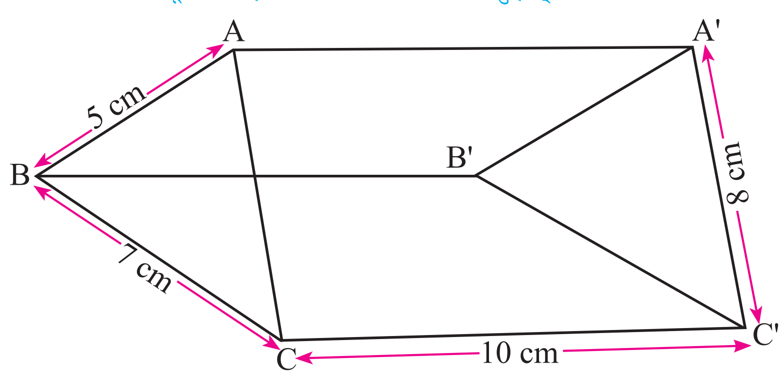
$= 2 \times 120 + 44 \times 6$

$= 240 + 264$

$= 504\ ft^2$

उदाहरण 4

दिइएको त्रिभुजाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ प्रिज्मको आधार ΔABC मा,

AB $(c) = 5$ cm

BC $(a) = 7$ cm

CA $(b) = 8$ cm

अर्धपरिमिति $(s) = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+5}{2} = 10$ cm

आधारको ΔABC को क्षेत्रफल (A) $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{10(10-7)(10-8)(10-5)}$

$= \sqrt{10 \times 3 \times 2 \times 5}$

$= \sqrt{300}$

$= 17.32 \text{ cm}^2$

आधारको परिमिति (P) $= a + b + c$

$= 7 + 8 + 5$

$= 20$ cm

प्रिज्मको लम्बाइ (l) $= 10$ cm

अब प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2A + p \times l$

$= 2 \times 17.72 + 20 \times 10$

$= 34.64 + 200$

$= 234.64 \text{ cm}^2$

6.5 प्रिज्मको आयतन (Volume of prism)

क्रियाकलाप 5

आयताकार आधार भएका ठोस वस्तुको आयतन कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? आयताकार आधार भएका ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाउने सूत्रका आधारमा छलफल गरी अन्य प्रिज्मको आयतन पत्ता लगाउने सूत्र पत्ता लगाउन लगाई कक्षामा प्रस्तुत गर्न लगाउनुहोस् :

प्रिज्मको आयतन (V) = आधारको क्षेत्रफल × उचाइ $= A \times h$

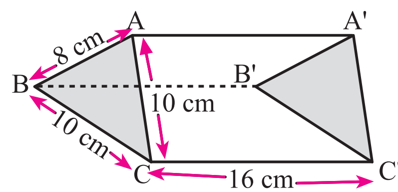
लिटर, घन सेन्टिमिटर र घन मिटरको सम्बन्ध,

$1000 \text{ cm}^3 = 1\ l$ र $1 \text{ m}^3 = 1000\ l$

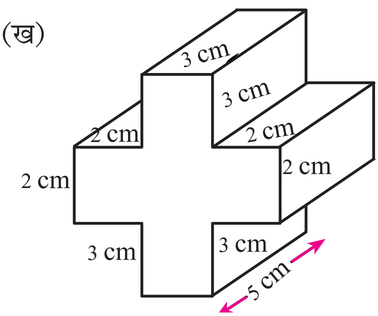
उदाहरण 5

दिइएका प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)



(ख)



समाधान

यहाँ,

(क) **दिइएको प्रिज्म समद्विबाहु त्रिभुज आधार भएको प्रिज्म हो ।**

जसमा BC = AC = (a) = 10 cm

आधार (AB) = (b) = 8 cm

त्रिभुजाकार प्रिज्मको आधार क्षेत्रफल (A) $= \frac{8}{4}\sqrt{4a^2 - b^2})$

$= \frac{8}{4}\sqrt{4 \times (10)^2 - (8)^2}$

$= \frac{8}{4}\sqrt{400 - 64}$

$= 8\sqrt{21} = 36.66 \text{ cm}^2$

आधारको परिमिति (P) = $a + a + b = (10 + 10 + 8) = 28$ cm

प्रिज्मको उचाइ वा लम्बाइ $(h) = 16$ cm

प्रिज्मको पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल (LSA) $= P \times h = 28 \times 16.$

$= 448 \text{ cm}^2$

प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2 \times A + LSA$

$= 2 \times 36.66$

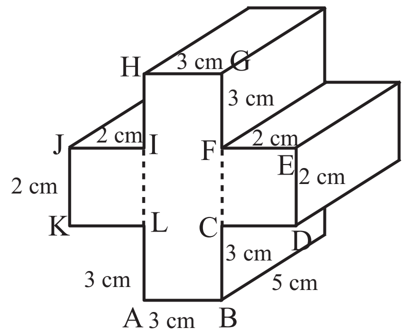
$= 73.32 + 448$

$= 521.32 \text{ cm}^2$

प्रिज्मको आयातन (V) $= A \times h = 8\sqrt{21} \times 16 \text{ cm}^3$

$= 128\sqrt{21} \text{ cm}^3$

(ख) चित्रमा I र L तथा C र F लाइ जोडौँ ।



अब वर्ग IJKL को क्षेत्रफल

$(A_1) = (2\text{ cm})^2 = 4\text{ cm}^2$

आयत ABGH को क्षेत्रफल (A_2)

$= (3 + 2 + 3)\text{ cm} \times 3\text{ cm}$

$= 8 \times 3\text{ cm}^2 = 24\text{ cm}^2$

वर्ग CDEF को क्षेत्रफल $(A_3) = (2\text{ cm})^2 = 4\text{ cm}^2$

प्रिज्मको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल (A) $= A_1 + A_2 + A_3$

$= (4 + 24 + 4)\text{ cm}^2$

$= 32\text{ cm}^2$

आधारको परिमिति (P)

$= AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IJ + JK + KL + LA$

$= (3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 3)\text{ cm}$

$= 30\text{ cm}$

उचाइ $(h) = 5\text{ cm}$

पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल (LSA) $= P \times h = 30 \times 5\text{ cm}^2 = 150\text{ cm}^2$

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2 \times A + LSA$

$= 2 \times 32 + 150$

$= 64 + 150$

$= 214\text{ cm}^2$

प्रिज्मको आयतन $(V) = A \times h$

$= 32 \times 5$

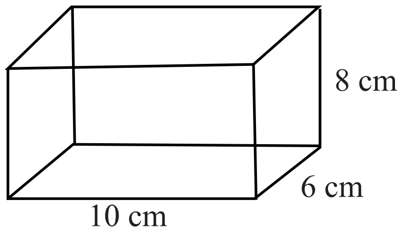
$= 160\text{ cm}^3$

अभ्यास 6.1

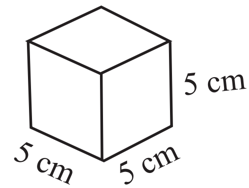
1. क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल 35 cm^2 र उचाइ 10 cm भएको प्रिज्मको आयतन कति हुन्छ ?
2. आधारको परिमिति 36 cm र उचाइ 8 cm भएको प्रिज्मको पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल र पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल क्रमश: 40 cm^2 र 175 cm^2 भएको एउटा प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. दिइएका प्रिज्महरूको क्रस सेक्सन क्षेत्रफल, पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल, पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

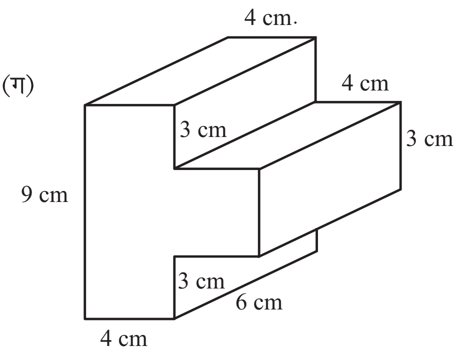
(क)



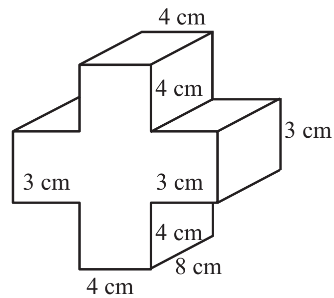
(ख)



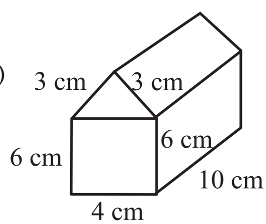
(ग)



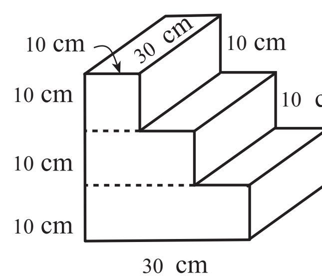
(घ)



(ङ)



(च)



5. लम्बाइ 6 cm, चौडाइ 5 cm र उचाइ 8 cm भएको एउटा षड्मुखाकार प्रिज्मको

(क) क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

(ख) पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

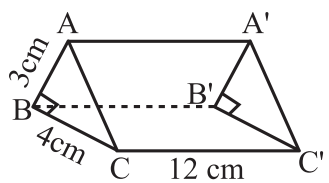
(ग) आयतन कति हुन्छ ?

6. एउटा आयताकार ट्याङ्कीको लम्बाइ 2 m, चौडाइ 1.5 m र उचाइ 1 m छ । उक्त ट्याङ्कीमा जम्मा कति लिटर पानी अटाउला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

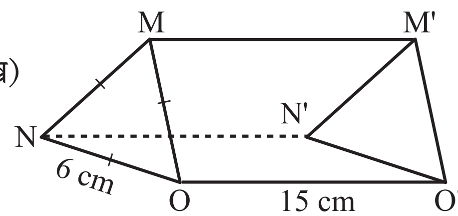
7. भुजाको लम्बाइ 20 cm भएको घनाकार काठको ब्लकलाई बराबर आकारका 8 ओटा घनाकार टुक्रामा काटिएको छ भने प्रत्येक टुक्रा काठको भुजाको लम्बाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. दिइएका प्रिज्मको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल, पाश्ववर्ती सतहको क्षेत्रफल, पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

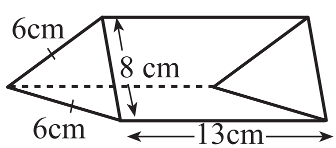
(क)



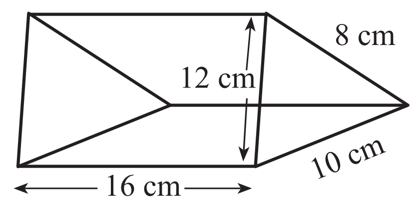
(ख)



(ग)



(घ)



9. आधार समकोणी त्रिभुज भएको एउटा प्रिज्मको आयतन 864 cm^3 छ । यदि समकोणी त्रिभुजको समकोण बनाउने भुजाहरूको लम्बाइ 8 cm र 9 cm भए सो प्रिज्मको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. आधारमा समकोण भएको एउटा त्रिभुजकार प्रिज्मको उचाइ 30 cm छ । यदि उक्त त्रिभुजको समकोण बनाउने भुजाहरूको लम्बाइ 4 cm र 3 cm भए सो प्रिज्मको आयताकार सतहहरूको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

11. एउटा त्रिभुजाकार प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल 660 cm^2 र त्यसको आधार समकोणी त्रिभुज छ । यसका भुजाहरूको नाप क्रमशः आधार भुजा 12 cm र कर्ण भुजा 13 cm छन् भने सो प्रिज्मको लम्बाइ कति होला पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. एउटा त्रिभुजाकार प्रिज्मको आयतन 480 cm^3 छ । यदि सो त्रिभुजाकार प्रिज्मको लम्बाइ l cm र यसका आधारका भुजाहरू क्रमशः 4 cm, 13 cm र 15 cm भए

(क) प्रिज्मको लम्बाइ (l) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) आयताकार सतहहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

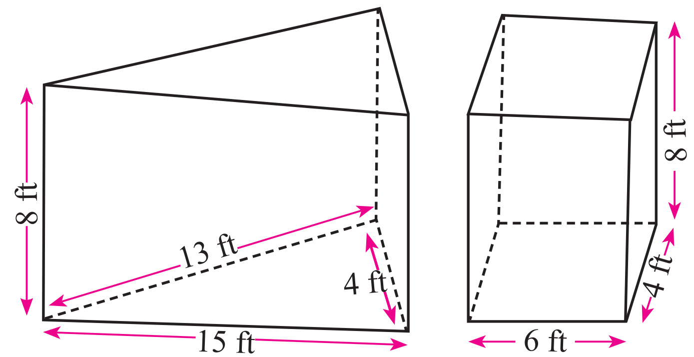
(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. एउटा त्रिभुजाकार आधार भएको प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल 2160 cm^2 छ । यसको आधारको परिमिति 54 cm र क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल 126 cm^2 भए उक्त प्रिज्मको

(क) उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. सन्तमानले धान भण्डारण गर्नका लागि कर्कट पाताको प्रयोग गरी तल चित्रमा देखाइएका मध्ये कुनै एक प्रकारको भाँडा बनाउने योजना बनाएका रहेछन् । तल दिइएका भाडाहरूमध्ये कुन भाँडामा बढी धान अटाउँछ पत्ता लगाउनुहोस् । कुन चाहिँ भाँडो निर्माण गर्न कति कम परिमाणमा कर्कट पाता खर्च हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

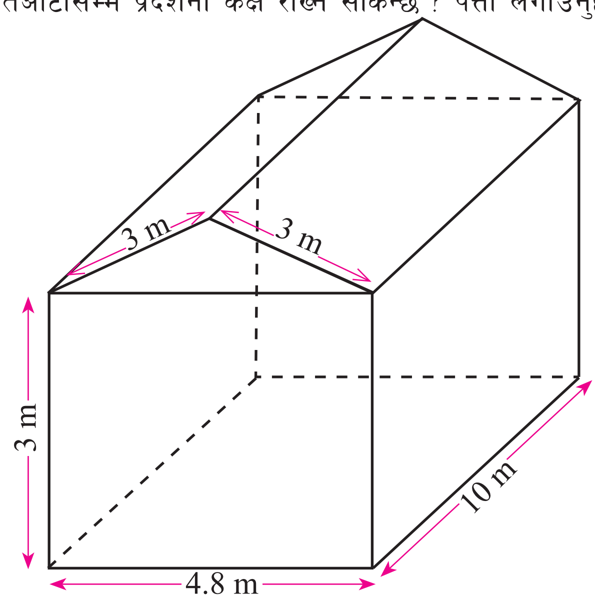


15. गणित प्रदर्शनी आयोजना गर्नका लागि विद्यालय परिसरमा चित्रमा देखाइएको जस्तै एउटा टेन्ट निर्माण गर्नुपर्ने भएछ । भुइँमा कार्पेट ओछ्याउने तथा एकातर्फ (चौडाइ पट्टिबाट) पूरै खुला राखी प्रवेशद्वारा बनाउने योजना भएको छ ।

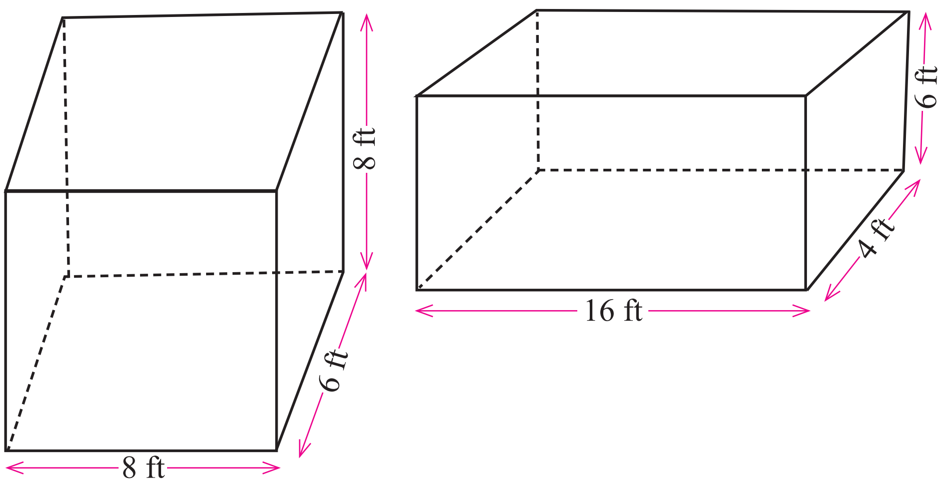
(क) यस किसिमको टेन्ट निर्माण गर्नका लागि कति कपडाको आवश्यक पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) भुइँमा ओछ्याउनका लागि कति क्षेत्रफल भएको कार्पेटको आवश्यकता पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्

(ग) एउटा प्रदर्शनी कक्ष बार्नका लागि 7 m^2 ठाउँको आवश्यकता पर्छ भने उक्त प्रदर्शनी हलमा कतिओटासम्म प्रदर्शनी कक्ष राख्न सकिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



16. कुनै गाउँको पिउने पानीको मुल स्रोतका रूपमा धाराको पानी प्रयोग नभएको समयमा संरक्षण गर्न (सङ्कलन गर्न) का लागि एउटा पक्की ट्याङ्की निर्माण गरिने भएछ । तल दिइएका चित्रहरूमा दिइएका नापहरूमध्ये कुनै एक छान्नु पर्ने छ । पानी अटाउने क्षमताका आधारमा र निर्माणका लागि प्रयोग हुने सामग्रीको परिमाणको आधारमा दुईमध्ये कुन चाहिँ नापअनुसारको ट्याङ्की निर्माण गर्नु उपयुक्त हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



परियोजना कार्य

1. आफ्नो समुदायमा भएका प्रिज्म आकारका वस्तुहरूको नाम सङ्कलन गर्नुहोस् । रुलरको सहायताले तिनीहरूमध्ये कुनै दुई वस्तुको नाप लिई तलका प्रश्नहरूको उत्तरसहित कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

   (क) उक्त वस्तुको क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ग) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. पाँच पाँच जनाको समूह निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहले कागज, काठ, तार वा निगालो आदिको प्रयोग गरी विभिन्न नापका त्रिभुजाकार प्रिज्म निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक प्रिज्मका सबै भागको नाप लिई

   (क) क्रस सेक्सनको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ख) छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ग) छड्के सतहको क्षेत्रफल क्रस सेक्सनको क्षेत्रफलभन्दा कति प्रतिशत बढी छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. $350\ cm^3$ 2. $288\ cm^2$ 3. $255\ cm^2$

4. (क) $80\ cm^2$, $216\ cm^2$, $376\ cm^2$, $480\ cm^3$

(ख) $25\ cm^2$, $100\ cm^2$, $150\ cm^2$, $125\ cm^3$

(ग) $48\ cm^2$, $204\ cm^2$, $300\ cm^2$, $288\ cm^2$

(घ) $62\ cm^2$, $336\ cm^2$, $460\ cm^2$, $496\ cm^3$

(ङ) $24 + 2\sqrt{5}\ cm^2$, $220\ cm^2$, $276.94\ cm^2$, $284.72\ cm^3$

(च) $600\ cm^2$, $3600\ cm^2$, $4800\ cm^2$, $18000\ cm^3$

5. (क) $48\ cm^2$ (ख) $140\ cm^2$ (ग) $240\ cm^3$

6. $3000\ l$

7. 10 cm

8. (क) $6\ cm^2$, $144\ cm^2$, $156\ cm^2$, $72\ cm^3$

(ख) $9\sqrt{3}\ cm$, $270\ cm^2$, $301.16\ cm^2$, $135\sqrt{3}\ cm^3$

(ग) $8\sqrt{5}\ cm^2$, $260\ cm^2$, $295.77\ cm^2$, $104\sqrt{5}\ cm^2$

(घ) $39.69\ cm^2$, $480\ cm^2$, $559.38\ cm^2$, $634.98\ cm^3$

9. 24 cm,   10. $360\ cm^2$ 11. 20 cm

12. (क) 20 cm   (ख) $640\ cm^2$ (ग) $688\ cm^2$

13. (क) 40 cm   (ख) $5040\ cm^2$

14 -16. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 7

बेलना र गोला
(Cylinder and Sphere)

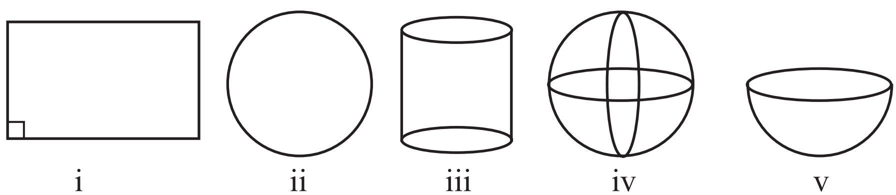
7.0 पुनरवलोकन (Review)

उपयुक्त सङ्ख्याका समूहमा तल दिइएका जस्तै एक एकओटा आकृति लिनुहोस् । उक्त आकृतिहरूको अवलोकन गर्नुहोस् र तलका प्रश्नहरूमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) दिइएका आकृतिहरूमा कतिओटा र कस्ता समतलीय सतह छन्, गणना गर्नुहोस् र लेख्नुहोस् ।

(ख) दिइएका आकृतिहरूमा कतिओटा शीर्षबिन्दु वा कुना छन् ? गणना गर्नुहोस् ।

(ग) दिइएका आकृतिहरूमा कतिओटा सिधा किनारा छन् ? गणना गर्नुहोस् ।



यहाँ,

i. पहिलो आकृतिमा एउटा आयताकार सतह छ । यसमा चारओटा कुना र चारओटा सिधा किनारा छन् । यो एउटा आयत हो ।

ii. दोस्रो आकृतिमा एउटा वृत्ताकार सतह दिइएको छ । यसमा कुनै कुना छैनन् ।

iii. तेस्रो आकृतिमा दुईओटा वृत्ताकार सतह छन् । यसमा कुनै पनि कुना छैनन् र एउटा वक्र सतह छ ।

iv. त्यस्तै गरी चौथो आकृति अवलोकन गर्दा कुनै पनि समतलीय सतह, कुना र किनारा छैनन् ।

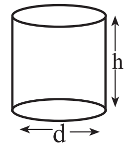
v. पाँचौँ आकृतिलाई हेर्दा एउटा समतलीय सतह र एउटा वक्र सतह छ । यसमा कुनै पनि कुना छैनन् ।

7.1 बेलना (Cylinder)

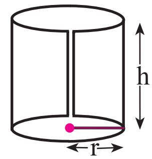
बेलनाको सतहको क्षेत्रफल (Surface area of the cylinder)

क्रियाकलाप 1

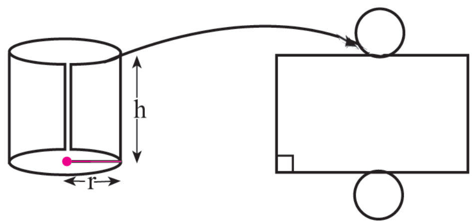
समूहमा एक एकओटा फरक फरक नापका बेलना आकारका ठोस वस्तुहरू (पेपरबाट बनाइएको) लिनुहोस् ।



उक्त बेलनालाई सिधा ठाडो पारी चित्रमा देखाए जस्तै गरी काट्नुहोस् ।



काटिसकेपछि वृत्तको परिधिले आयतको लम्बाइ र यसको उचाइ (h) ले आयतको चौडाइलाई जनाउने गरी चित्रमा देखाए जस्तै गरी एउटा आयत बनाउनुहोस् ।

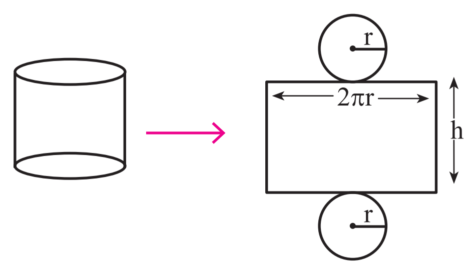


अब बनेको आयत र पहिलेको बेलनालाई अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) वृत्तको परिधिको लम्बाइ कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

(ख) लम्बाइ र चौडाइ दिइएको अवस्थामा आयतको क्षेत्रफल कुन सूत्रको प्रयोग गरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ग) आयतको क्षेत्रफलले बेलनाको कुन भागको क्षेत्रफललाई जनाउँछ ? लेख्नुहोस्



छलफलबाट निम्नानुसारका निष्कर्ष पत्ता लगाउन सकिन्छ :

वृत्तको परिधिको लम्बाइ भन्नाले यसको परिमिति पनि बुझिन्छ । त्यसैले,

वृत्तको परिधि = परिधिको लम्बाइ = $2\pi r$

त्यसैगरी आयतको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र $l \times$ b हुन्छ ।

यहाँ आयतको क्षेत्रफलले बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफललाई जनाउँछ । त्यसैले,

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल = आयतको क्षेत्रफल $= l \times b = 2\pi r \times h = 2\pi rh$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

फेरि बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफलमा बेलनाको दुईतिरका वृत्तको क्षेत्रफल जोड्नुहोस् । के बेलनामा

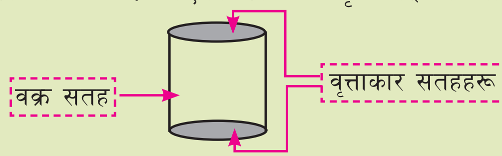
दुवैतिरका वृत्तको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ? हो, ती वृत्तहरू एकआपसमा अनुरूप हुन्छन् ।

त्यसैले बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल = बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल + दुईओटा वृत्तको क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$ [एउटा वृत्तको क्षेत्रफल = πr^2]

$= 2\pi r(h + r)$

दुईओटा समानान्तर वृत्ताकार सतहहरू र एउटा वक्र सतह भएको ठोस आकृतिलाई बेलना (Cylinder) भनिन्छ ।



बेलनाको

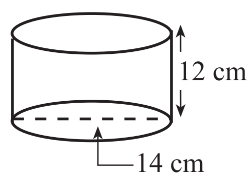
- आधारको क्षेत्रफल (A) = πr^2
- वक्र सतहको क्षेत्रफल (Curved Surface Area) = $2\pi rh$
- पूरा सतहको क्षेत्रफल (Total Surface Area) = $2\pi r(r + h)$

  $= C(r + h)$ जहाँ, $C = 2\pi r$ छ

उदाहरण 1

दिइएको बेलनाको वक्र सतह र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान



यहाँ,

व्यास (d) = 14 cm

उचाइ (h) = 12 cm

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल = ?

पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

अर्धव्यास (r) $= \frac{d}{2} = \frac{14}{2}$ cm = 7 cm.

सूत्रअनुसार,

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 12$

$= 528 \text{ cm}^2$

बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2\pi r(r + h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7\,(7 + 12) \text{ cm}^2$

$= 44 \times 19 \text{ cm}^2$

$= 836 \text{ cm}^2$

उदाहरण 2

एउटा बेलनाकार बट्टाको वक्र सतहको क्षेत्रफल 1232 cm^2 छ । यसको आधारको अर्धव्यास र उचाइ बराबर छन् भने बेलनाको वृत्ताकार सतहहरूको क्षेत्रफल र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । साथै वक्र सतहको क्षेत्रफल र वृत्ताकार सतहहरूको क्षेत्रफललाई तुलना गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = 1232 cm^2

अर्धव्यास (r) = उचाइ (h)

वृत्ताकार सतहहरूको क्षेत्रफल = ?

पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

हामीलाई थाहा छ,

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

अथवा, $1232 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times r$ $\quad [\because r = h]$

अथवा, $\frac{1232 \times 7}{2 \times 22} = r^2$

अथवा, $196 = r^2$

अथवा, $r = \sqrt{196} = 14$

$\because$ अर्थव्यास (r) = 14 cm

प्रश्नानुसार, अर्धव्यास (r) = उचाइ (h) $= 14$ cm

बेलनाको वृत्ताकार सतहहरूको क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (14\text{ cm})^2$

$= 1232\text{ cm}^2$

फेरि,

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = वक्र सतहको क्षेत्रफल + वृत्ताकार सतहहरूको क्षेत्रफल

$= (1232 + 1232)\text{ cm}^2$

$= 2464\text{ cm}^2$

यहाँ बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल र बेलनाको वृत्ताकार सतहहरूको क्षेत्रफल बराबर छ ।

उदाहरण 3

एउटा बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल 2992 cm^2 छ । अर्धव्यास र उचाइको योगफल 34 cm छ भने उक्त बेलनाको

(क) आधारको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) वक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2992\ cm^2$

अर्धव्यास र उचाइको योगफल $(r + h) = 34$ cm

(क) आधारको अर्धव्यास $(r) = ?$

सूत्रअनुसार

बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) $= 2\pi r(r + h)$

अथवा, $2992 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 34$

अथवा, $\frac{2992 \times 7}{2 \times 22 \times 34} = r$

अथवा, $r = 14$ cm

(ख) आधारको क्षेत्रफल (A) $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times (14)^2$

$= 616\ cm^2$

(ग) वक्र सतहको क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

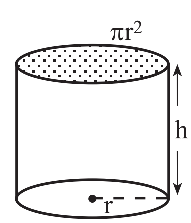
$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (34 - r)$ $[\because r + h = 34 \text{ cm}]$

$= \frac{44}{7} \times 14 \times (34 - 14)$

$= 1760\ cm^2$

बेलनाको आयतन (Volume of cylinder)

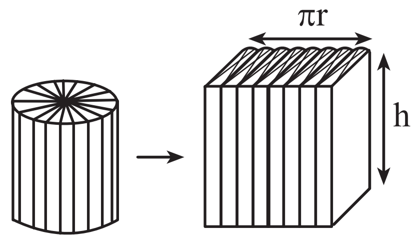
क्रियाकलाप 2



कक्षामा उपयुक्त समूह बनाई बस्नुहोस् र प्रत्येक समूहमा बेलनाकार मुला वा सजिलै काट्न सकिने बेलनाकार ठोस वस्तु लिई यसको अर्धव्यास र उचाइ नाप्नुहोस् ।

उक्त बेलनाकार मुला वा सजिलै काट्न सकिने बेलनाकार ठोस वस्तुलाई चित्रमा देखाए जस्तै गरी काटेर टुक्राहरूलाई मिलाएर षड्मुखा बनाउनुहोस् ।

अब बेलना र षड्मुखा तुलना गरी षड्मुखाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् । त्यसपछि, षड्मुखाको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



यहाँ षड्मुखाको लम्बाइ $= \pi r$

षड्मुखाको चौडाइ $= r$

षड्मुखाको उचाइ $= h$

षड्मुखाको आयतन $= l \times b \times h = \pi r \times r \times h = \pi r^2 h$

यहाँ बेलनाको आयतन = षड्मुखाको आयतन

$= \pi r^2 h$

$= \pi r^2 \times h$

$= A \times h$ [बेलनाको आधार वृत्त हुने भएकाले आधारको क्षेत्रफल $(A) = \pi r^2$ हुन्छ ।]

बेलनाको आयतन $(V) = \pi r^2 h = A \times h$ जहाँ, A बेलनाको आधारको क्षेत्रफल हो ।

उदाहरण 4

कुनै एउटा बेलनाको आधारको अर्धव्यास 14 cm र उचाइ 20 cm छ भने सो बेलनाको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

बेलनाको आधारको अर्धव्यास $(r) = 14$ cm

बेलनाको उचाइ $(h) = 20$ cm

बेलनाको आयतन $(V) = ?$

सूत्रअनुसार,

बेलनाको आयतन $(V) = \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times (14)^2 \times 20 \text{ cm}^3$

$= \frac{22}{7} \times 196 \times 20 \text{ cm}^3$

$= 12,320 \text{ cm}^3$

उदाहरण 5

एउटा बेलनाकार पानी ट्याङ्कीको क्षमता 539 *l* छ । यदि यसको उचाइ 1.4 m भए आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

ट्याङ्कीको क्षमता (V) $= 539\ l$

$= \frac{539}{1000}\ m^3$ $[\because 1\ m^3 = 1000\ l]$

$= 0.539\ m^3$

उचाइ (h) $= 1.4$ m

आधारको क्षेत्रफल (A) = ?

सूत्रअनुसार,

ट्याङ्कीको क्षमता (V) $= A \times h$

अथवा, 0.539 घन मि. $= A \times 1.4$ m

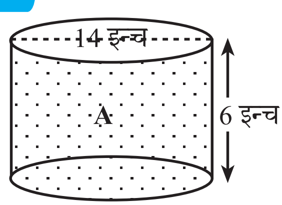
अथवा, $\frac{0.539}{1.4}\ m^2 = A$

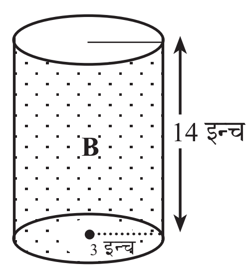
अथवा, $A = 0.385\ m^2$

$A = 0.385 \times 100 \times 100\ cm^2 = 3850\ cm^2$

अतः बेलनाको आधारको क्षेत्रफल (A) $= 3850\ cm^2$

उदाहरण 6





राजनले चित्रमा देखाए जस्तै आकारका कागजका भाँडाहरूमा भटमास भरी राखेर बेच्छन् । भाँडो A को व्यास 14 इन्च र उचाइ 6 इन्च छ । त्यसैगरी भाँडो B को अर्धव्यास 3 इन्च र उचाइ 14 इन्च रहेको छ । सरोज र विशाल भटमास किन्न पसलमा गएका वेला सरोजले भने दुवै भाँडामा भटमासको मात्रा बराबर छ, त्यसैले दुवैको मूल्य एउटै हुनुपर्छ भन्छ । फेरि विशालले भने दुवै भाँडामा भटमासको मात्रा बराबर छैन, त्यसैले तिनीहरूको मूल्य बराबर छैन भन्छ । उनीहरूको यो भनाइबाट दुई जनामा को सही छ र किन, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ चित्रमा देखाइएका दुवै भाँडाहरू बेलना आकारका छन् ।

भाँडो A मा

आधारको व्यास (d) = 14 इन्च

उचाइ (h_1) = 6 इन्च

अब अर्धव्यास (r_1) $= \frac{d}{2} = \frac{14}{2}$ इन्च = 7 इन्च

बेलनाकार भाँडो A को आयतन (V_1)

$= \pi r_1^2 h_1$

$= \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 6$

= 924 घन इन्च

त्यसैगरी, **भाँडो B मा**

अर्धव्यास (r) = 3 इन्च

उचाइ (h_2) = 14 इन्च

बेलनाकार भाँडो B को आयतन (V_2)

$= \pi r_2^2 h_2$

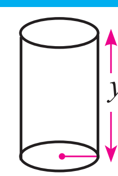
$= \frac{22}{7} \times (3)^2 \times 14$ घन इन्च

= 396 घन इन्च

उनीहरूमध्ये विशालको भनाइ ठिक छ किनकि भाँडो A को आयतन धेरै छ त्यसैले भाँडो A मा राखिएको भटमासको मूल्य धेरै र भाँडो B मा राखिएको भटमासको मूल्य थोरै हुनुपर्छ ।

अभ्यास 7.1

1. **एउटा बेलनाको अर्धव्यास x cm उचाइ y cm भए पत्ता लगाउनुहोस् :**



(क) आधारको परिधि (ख) आधारको क्षेत्रफल

(ग) बक्र सतहको क्षेत्रफल (घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल

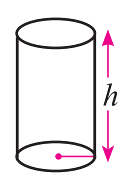
(ङ) आयतन

2. आधारको व्यास x cm र उचाइ y cm भएको एउटा बेलनाको समतल सतहहरूको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा बेलनाको आधारको परिधि C cm र उचाइ h cm छ । यसको वक्रसतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा बेलनाको आधारको क्षेत्रफल A वर्गफिट र उचाइ h फिट छ । यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा बेलनाको अर्धव्यास r एकाइ र उचाइ h एकाइ छ भने पत्ता लगाउनुहोस् :



(क) आयतन (ख) वक्र सतहको क्षेत्रफल

(ग) समतल सतहहरूको क्षेत्रफल (घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल

6. एउटा बेलनाको आधारको परिधि C एकाइ र अर्धव्यास र उचाइको योगफल S एकाइ भए यसको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. दिइएका नापअनुसारका बेलनाको वृत्ताकार सतहको क्षेत्रफल, वक्र सतहको र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

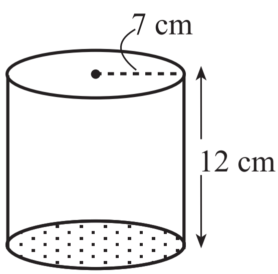
(क) अर्धव्यास (r) = 7 cm र उचाइ (h) = 5 cm

(ख) अर्धव्यास (r) = 3.5 m र उचाइ (h) = 6 m

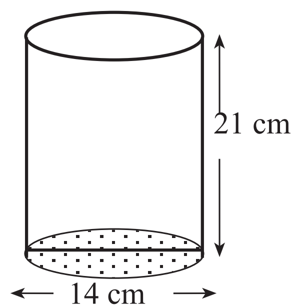
(ग) अर्धव्यास (r) = 2 ft र उचाइ (h) = 7 ft

8. दिइएका बेलनाका आधारको क्षेत्रफल, वृत्ताकार सतहको क्षेत्रफल, वक्र सतह, पूरा सतहको क्षेत्रफल

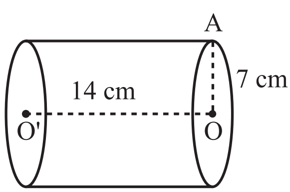
(क)



(ख)



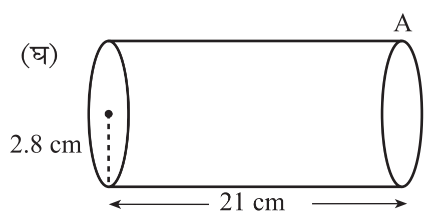
(ग)



OA = 7 cm

OO' = 14 cm

(घ)



र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

9. एउटा बेलनाको आधारको परिधिको लम्बाइ 176 cm र उचाइ 30 cm भए यसको वक्र सतहको क्षेत्रफल र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. एउटा बेलनाको आधारको परिधिको लम्बाइ 88 cm छ । सो बेलनाको आधारको अर्धव्यास र उचाइको योगफल 24 cm भए पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) आधारको क्षेत्रफल

(ख) वक्र सतहको क्षेत्रफल

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल

(घ) आयतन

11. यदि एउटा बेलनाको आधारको अर्धव्यास र उचाइको योगफल 34 cm र पूरा सतहको क्षेत्रफल $2992\ cm^2$ भए उक्त बेलनाको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

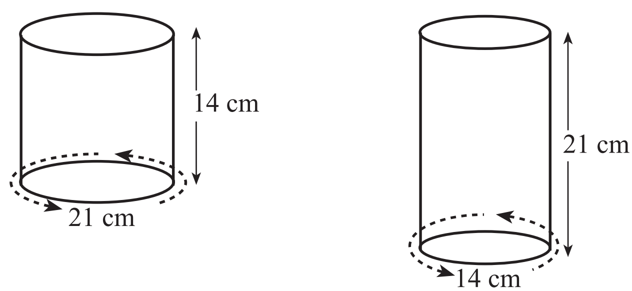
12. उचाइ र व्यासको योगफल 28 cm र वक्र सतहको क्षेत्रफल $462\ cm^2$ भएको एउटा बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. एउटा बेलनाको आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात 1 : 3 छ । तिनीहरूको योगफल 56 से.मि. भए त्यसको वक्र सतहको क्षेत्रफल र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. एउटा बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल $924\ cm^2$ छ । त्यसको आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात 1 : 3 छ । उक्त बेलनाको आधारको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

15. एउटा बेलनाकार काठको मुढाको वक्र सतहको क्षेत्रफल आधारको सतहको क्षेत्रफलको तीन गुणा छ । उक्त मुढाको आधारको अर्धव्यास र उचाइको योगफल 25 cm छ भने यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

16. दिइएका बेलनाकार भाँडाहरूको आधारको भित्री परिधि क्रमशः 21 cm र 14 cm छ । तिनीहरूको उचाइ 14 cm र 21 cm छ भने कुन भाँडामा कति बढी पानी अटाउँछ ? लिटरमा पत्ता लगाउनुहोस् ।



17. एउटा विद्यालयका विद्यार्थीहरूलाई कार्डबोर्डको प्रयोग गरेर आधारसहितको बेलना आकारको कलम राख्ने भाँडो बनाई सजावट गर्ने प्रतिस्पर्धामा भाग लिन आग्रह गरिएको थियो । प्रत्येक कलम राख्ने भाँडाको आधारको अर्धव्यास 3 cm र उचाइ 10.5 cm हुनुपर्छ । यदि उक्त प्रतिस्पर्धामा 35 जना विद्यार्थीले भाग लिएका थिए भने कति वर्ग सेन्टिमिटर कार्डबोर्ड प्रयोग भयो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

18. कुनै अस्पतालमा एउटा बिरामीलाई 7 cm व्यास भएको बेलनाकार गिलासमा च्याउको सुप दिने गर्दो रहेछ । यदि सो गिलासको 6 cm उचाइसम्म सुपले भरेर दिने गरिन्छ भने 250 जना बिरामीलाई सुप दिनु पर्दा अस्पतालले हरेक दिन कति सुप तयार पार्नुपर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

19. मनकुमारीले अन्न भण्डारण गर्नका लागि गुन्द्रीको भकारी निर्माण गर्ने योजना बनाएकी छन् । उनले बुन्ने गुन्द्रीको चौडाइ 1.1 m को हुने छ भने 1.4 घन मि. अन्न भण्डारण गर्न कति लामो गुन्द्री बुन्नुपर्छ होला ?

परियोजना कार्य

उपयुक्त सङ्ख्याका समूहहरूमा बस्नुहोस् । प्रत्येक समूहले आफ्नो समुदायमा भएका बेलनाकार पानी ट्याङ्की, ड्रम, अन्न भण्डारण गर्ने भकारी, परालको कुन्यु आदि वस्तुहरूको खोजी गरी तिनीहरूको आधारको अर्धव्यास र उचाइ मापन गरी समतल सतहको क्षेत्रफल, पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1-6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

7. (क) 308 cm^2, 220 cm^2, 770 cm^3

(ख) 77 cm^2, 132 cm^2, 231 cm^3

(ग) 25.14 ft^2, 88 ft^2, 88 ft^3

8. (क) 154 cm^2, 308 cm^2, 528 cm^2, 836 cm^2, 1848 cm^3

(ख) 154 cm^2, 308 cm^2, 924 cm^2, 1232 cm^2, 3234 cm^3

(ग) 154 cm^2, 308 cm^2, 616 cm^2, 924 cm^2, 2156 cm^3

(घ) 24.64 cm^2, 49,28 cm^2, 369.6 cm^2, 418.88 cm^2, 517.44 cm^3

9. 5288 cm^2, 10208 cm^2

10. (क) 616 cm^2 (ख) 880 cm^2 (ग) 2112 cm^2 (घ) 6160 cm^3

11. 12320 cm^3

12. 539 cm^2 वा 1155 cm^2

13. 3696 cm^2, 4928 cm^2

14. 154 cm^2, 3234 cm^3

15. 4714.28 cm^3

16. 0.1637 l

17. 7919.9 cm^2

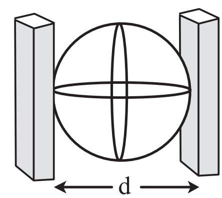
18. 57.75 l

19. 4 m

7.2.1 गोलाको सतहको क्षेत्रफल (Surface area of sphere)

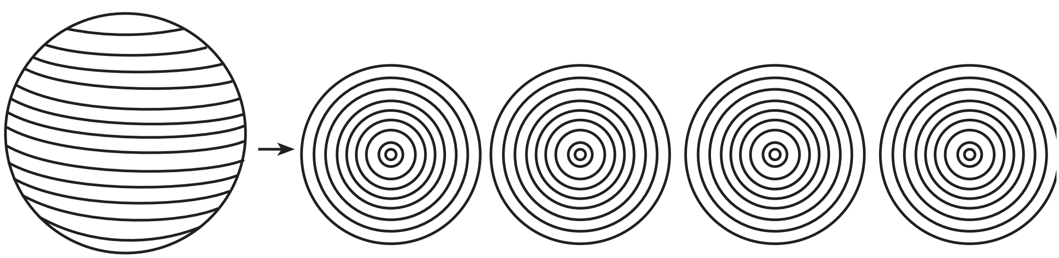
गोला भनेको के हो ? के यो एउटा वृत्त जस्तै हुन्छ ? के वृत्तलाई कापीमा बनाउन सकिन्छ ? हो पक्कै पनि वृत्तलाई कापीमा बनाउन सकिन्छ किनकि यो एउटा समतलीय बन्द चित्र हो जसका प्रत्येक बिन्दुहरू निश्चित एउटा बिन्दुबाट बराबर दुरीमा हुन्छन् । निश्चित एउटा बिन्दुलाई वृत्तको केन्द्र र बराबर दुरीलाई अर्धव्यास भनिन्छ । बल, गुच्चा आदि गोला हुन् ।

क्रियाकलाप 1



विद्यार्थीको उपयुक्त समूह बनाई प्रत्येक समूहले एक एकओटा रबर बल लिनुहोस् । उक्त बलको सतहको कुनै बिन्दुमा एउटा पिन गाड्नुहोस् । त्यही पिन र गमको सहायताबाट बलको पूरै सतहमा नदोहोरिने गरी धागो बेर्नुहोस् र पूरै बललाई धागाले ढाक्नुहोस् । अब बिस्तारै उक्त धागो बलबाट निकाल्नुहोस् । [उनी धागो वा गलैंचा बुन्न प्रयोग गरिने मोटो धागो वा जुटको डोरीको एक पोया प्रयोग गर्नु उपयुक्त हुन्छ ।]

रबर बलको व्यास पत्ता लगाउनुहोस् । यसका लागि उक्त बललाई चित्रमा देखाए जस्तै कार्डबोर्डको बिचमा राख्नुहोस् । दुई कार्डबोर्डबिचको भित्री लम्बाइ नै बलको व्यास हुन्छ । व्यासको आधा अर्धव्यास



हुन्छ । त्यही अर्धव्यास लिई चारओटा वृत्त बनाई बललाई बेरिएको धागो फुकाएर ती चारओटा वृत्तमा पूरै सतह ढाकिने गरी राख्नुहोस् ।

यसो गर्दा के पाउनुभयो ? समूहमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

यहाँ बललाई बेरेको पूरै धागाले चारओटा वृत्तका पूरै क्षेत्रफललाई ढाक्न पुग्यो जहाँ प्रत्येक वृत्तको अर्धव्यास बलका अर्धव्याससँग बराबर छन् ।

त्यसैले गोलाको सतहको क्षेत्रफल = चारओटा बराबर वृत्तको क्षेत्रफल

$= \pi r^2 + \pi r^2 + \pi r^2 + \pi r^2$

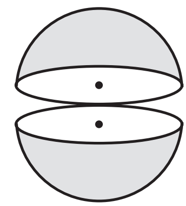
$= 4\pi r^2$

गोलाको सतहको क्षेत्रफल (A) = $4\pi r^2$, जहाँ r गोलाको अर्धव्यास हो ।

7.2.2 अर्धगोलाको सतहको क्षेत्रफल (Surface area of hemisphere)

क्रियाकलाप 2

विद्यार्थीको सङ्ख्याअनुसार आवश्यक समूह बनाई समूहमा बस्नुहोस् र प्रत्येक समूहले एक एकओटा कागती लिनुहोस् । समतल सतहले गोलालाई ठिक आधा आधा हुने गरी यसको केन्द्रबाट काट्नुहोस् र तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) काटिएका दुई भागलाई के भनिन्छ ?

(ख) यसमा कतिओटा सतह हुन्छन् ?

(ग) अर्धगोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल के हुन्छ ?

(घ) अर्धगोलाको पूरा सतहको क्षेत्रफल के हुन्छ ?

यसरी गोलालाई ठिक आधा हुने गरी काट्दा आउने प्रत्येक भागलाई अर्धगोला (Hemi-sphere) भनिन्छ । अर्धगोलामा दुईओटा सतह हुन्छन् । तिनीहरूलाई वक्र सतह र समतल सतह भनिन्छ । अर्धगोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल गोलाको सतहको क्षेत्रफलको आधा हुन्छ ।

वक्र सतहको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 = 2\pi r^2$

त्यसैगरी अर्धगोलाको पूरा सतहको क्षेत्रफल

= वक्रसतहको क्षेत्रफल + समतल सतहको क्षेत्रफल हुन्छ ।

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$ [$\because$ समतल सतहको क्षेत्रफल भनेको वृत्तको क्षेत्रफल]

$= 3\pi r^2$

जहाँ r अर्धगोलाको अर्धव्यास हो जुन गोलाको अर्धव्याससँग बराबर हुन्छ ।

वक्र सतहको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 = 2\pi r^2$

अर्धगोलाको पूरा सतहको क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

उदाहरण 1

अर्धव्यास 3.2 cm भएको एउटा गोलाको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ गोलाको अर्धव्यास $(r) = 3.2$ cm

गोलाको सतहको क्षेत्रफल = ?

सूत्रअनुसार,

गोलाको सतहको क्षेत्रफल (A) $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times (3.2 \text{ cm})^2$

$= 128.73 \text{ cm}^2$

उदाहरण 2

एउटा गोलाकार ट्याङ्कीको ठुलो वृत्तको परिधि 22 ft छ भने उक्त ट्याङ्कीको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् : ($\pi = \frac{22}{7}$)

समाधान

यहाँ ठुलो वृत्तको परिधि (C) = 22 ft

गोलाको सतहको क्षेत्रफल = ?

हामीलाई थाहा छ,

(क) वृत्तको परिधि (C) = $2\pi r$

$$22 \text{ ft} = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

अथवा, $\frac{22 \times 7}{2 \times 22} \text{ ft} = r$

अथवा, $r = 3.5 \text{ ft} = 3 \text{ ft } 6 \text{ inch}$

(ख) सूत्रअनुसार गोलाको सतहको क्षेत्रफल (A)

$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$

$= 154 \text{ ft}^2$

अतः गोलाको सतहको क्षेत्रफल (A) = 154 ft^2

उदाहरण 3

व्यास 28 cm भएको अर्धगोलाको समतल सतहको क्षेत्रफल, वक्र सतहको क्षेत्रफल र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ अर्धगोलाको व्यास (d) = 28 cm

अर्धगोलाको अर्धव्यास (r) = 14 cm

समतल सतहको क्षेत्रफल = ?

वक्र सतहको क्षेत्रफल = ?

पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

सूत्रअनुसार,

(क) समतल सतहको क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7}(14 \text{ cm})^2 = 616 \text{ cm}^2$

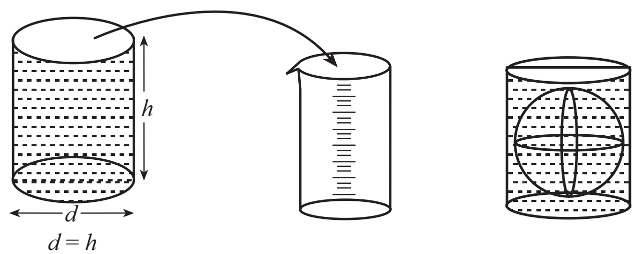
(ख) वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = $2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times (14 \text{ cm}^2)^2 = 1232 \text{ cm}^2$

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = $3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times (14 \text{ cm})^2 = 1848 \text{ cm}^2$

7.2.3 **गोलाको आयतन** (Volume of sphere)

क्रियाकलाप 3

विद्यार्थी आवश्यक सङ्ख्यामा समूहमा बस्नुहोस् । प्रत्येक समूहले बेलनाको आधारको व्यास र गोलाको व्यास बराबर हुने गरी एक एकओटा ठोस वस्तु लिनुहोस् । बेलनाको व्यास र उचाइ पनि बराबर हुनुपर्छ । अब बेलनामा पानी भर्नुहोस् र उक्त पानीलाई नाप्ने भाँडो (Measuring cylinder) मा बिस्तारै खन्याउनुहोस् र कति मिलिलिटर (ml) पानी रहेछ टिपोट गर्नुहोस् ।



त्यसपछि गोलालाई बेलनाभित्र चित्रमा देखाए जस्तै गरी राख्नुहोस् । नाप्ने भाँडामा रहेको पानी गोलासहितको बेलनामा खन्याउनुहोस् र उक्त पानीलाई पनि नाप्ने भाँडा (Measuring cylinder) मा खन्याएर कति रहेछ टिपोट गर्नुहोस् । अब दुई अवस्थाहरू बेलनामा गोलाभित्र राख्दा र नराख्दा पानीको परिमाणको तुलना गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

यहाँ गोला नराखिएको खाली बेलनाको पानी गोला राखिएको बेलनामा खन्याउँदा एक तिहाइ पानी मात्र अटाउँछ र बाँकी पानी नाप्ने भाँडामा नै रहन्छ । यसरी दुई तिहाइ पानी गोलाले विस्थापित गरेको देखिन्छ ।

$$\text{गोलाको आयतन (V)} = \frac{2}{3}\,(\text{बेलनाको आयतन})$$

$$= \frac{2}{3}\,(\text{बेलनाको आधारको क्षेत्रफल} \times \text{उचाइ})$$

$$= \frac{2}{3}\,(\pi r^2 \times \text{h}) = \frac{2}{3}\,(\pi r^2 \times \text{d}) \qquad [\therefore d = h]$$

$$= \frac{2}{3}\,\pi r^2 \times 2\text{r} = \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

गोलाको आयतन (V) = $\frac{4}{3}\pi r^3$ हुन्छ जहाँ r = गोलाको अर्धव्यास हो ।

7.2.4 अर्धगोलाको आयतन (Volume of hemisphere)

क्रियाकलाप 4

के अर्धगोलाको आयतन गोलाको आयतनको आधा हुन्छ ? जोडीमा छलफल गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् :

अर्धगोलाको आयतन गोलाको आयतनको आधा हुन्छ ।

अर्धगोलाको आयतन (V) $= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

उदाहरण 4

व्यास 21 cm भएको गोलाकार वस्तुको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ व्यास (d) = 21 cm

गोलाको आयतन (V) = ?

अब अर्धव्यास (r) $= \frac{d}{2}$

$= \frac{21}{2}$ cm

सूत्रअनुसार,

गोलाको आयतन (V) $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{2}\right)^3 \text{ cm}^3$

$= 4851 \text{ cm}^3$

अतः गोलाको आयतन (V) = 4851 cm^3

उदाहरण 5

एउटा धातुको गोलाको व्यास 4.2 cm छ । यदि 1 cm^3 = 8.9 gm भए उक्त गोलाको पिण्ड (mass) कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ गोलाको व्यास = 4.2 cm

1 cm^3 = 8.9 gm

गोलाको पिण्ड = ?

अब अर्धव्यास $(r) = \frac{d}{2} = \frac{4.2}{2}$ cm = 2.1 cm

सूत्रअनुसार, गोलाको आयतन $(V) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3 \text{ cm}^3$$

$$= 38.808 \text{ cm}^3$$

हामीलाई थाहा छ,

$$1 \text{ cm}^3 = 8.9 \text{ gm}$$

$$38.808 \text{ cm}^3 = 8.9 \times 38.808 \text{ gm}$$

$$= 345.39 \text{ gm}$$

अतः गोलाको पिण्ड (mass) = 345.39 gm

उदाहरण 6

एउटा अर्धगोला आकारको कचौराको अर्धव्यास 3.5 cm छ । यदि सो कचौरा पानीले भरिएको छ भने पानीको आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ अर्धगोलाको अर्धव्यास (r) = 3.5 cm

अर्धगोलाको आयतन = पानीको आयतन

सूत्रअनुसार,

कचौरामा भएको पानीको आयतन

$$(V) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^3 \text{ cm}^3 = 89.8 \text{ cm}^3$$

अतः पानीको आयतन (V) = 89.8 cm^3

उदाहरण 7

क्षेत्रफल बराबर भएका गोला र अर्धगोलाका अर्धव्यासहरू क्रमशः r_1 र r_2 छन् । तिनीहरूको अर्धव्यासको अनुपात कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ गोलाको अर्धव्यास $= r_1$

अर्धगोलाको अर्धव्यास $= r_2$

$\frac{r_1}{r_2} = ?$

हामीलाई थाहा छ,

गोलाको सतहको क्षेत्रफल $(A_1) = 4\pi r_1^2$

अर्धगोलाको सतहको क्षेत्रफल $(A_2) = 3\pi r_2^2$

प्रश्नानुसार,

$A_1 = A_2$

$4\pi r_1^2 = 3\pi r_2^2$

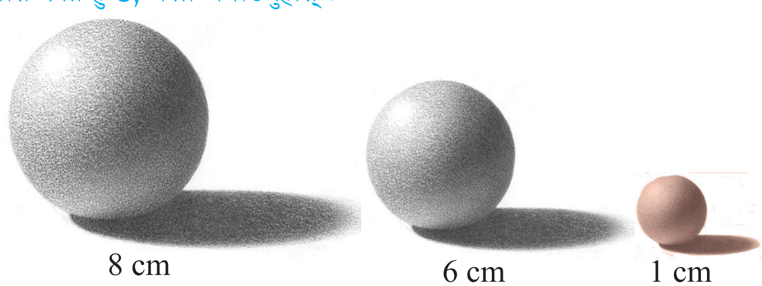
अथवा, $\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{3\pi}{4\pi}$

अथवा, $\frac{r1}{r2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore r_1 : r_2 = \sqrt{3} : 2$

उदाहरण 8

अर्धव्यास क्रमशः 1 cm, 6 cm र 8 cm भएका तीनओटा गोला पगालेर एउटै गोला बनाउँदा नयाँ गोलाको अर्धव्यास कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ पहिलो गोलाको अर्धव्यास $(r_1) = 1$ cm

दोस्रो गोलाको अर्धव्यास $(r_2) = 6$ cm

तेस्रो गोलाको अर्धव्यास (r_3) = 8 cm

मानौँ, V_1, V_2 V_3 क्रमशः तीनओटा

साना गोलाहरूको आयतन र V नयाँ गोलाको आयतन छन् । त्यसैले,

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

नयाँ गोलाको अर्धव्यासलाई r भन्दा

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 + \frac{4}{3}\pi r_3^3$$

अथवा, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3)$

अथवा, $r^3 = [(1)^3 + (6)^3 + (8)^3]$ cm^3

अथवा, $r^3 = (1 + 216 + 512)$ cm^3

अथवा, $r^3 = 729$ cm^3

अथवा, $r = \sqrt[3]{729}$ cm

अथवा, $r = 9$ cm

अतः नयाँ गोलाको अर्धव्यास (r) = 9 cm

अभ्यास 7.2

1. एउटा गोलाको अर्धव्यास x एकाइ भए पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) गोलाको सतहको क्षेत्रफल (ख) गोलाको आयतन

(ग) गोलाको ठुलो वृत्तको परिधि (घ) गोलाको ठुलो वृत्तको क्षेत्रफल

2. एउटा गोलाको ठुलो वृत्तको क्षेत्रफल a वर्ग एकाइ छ । यसको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा गोलाको सतहको क्षेत्रफल $4x$ वर्ग एकाइ छ । उक्त गोलालाई ठिक आधा हुने गरी काट्दा बन्ने एउटा अर्धगोलाको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा गोलाको ठुलो वृत्तको क्षेत्रफल y वर्ग एकाइ भए यसको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा गोलाको व्यास d cm भए पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) गोलाको ठुलो वृत्तको परिधि (ख) गोलाको ठुलो वृत्तको क्षेत्रफल

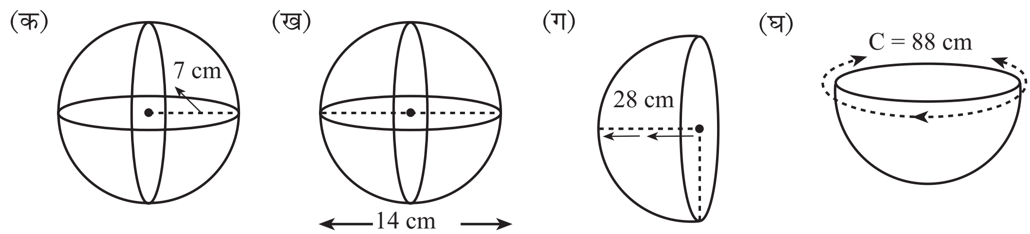
(ग) गोलाको आयतन (घ) गोलाको सतहको क्षेत्रफल

6. दायाँको चित्रमा दिइएको आकारको भलिबल निर्माण गर्न कति क्षेत्रफल भएको सामग्री (TPE Leather - Thermoplastic Elastomer Leather) आवश्यक पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

अर्धव्यास = 10.5 cm

7. Kazakhastan को Noor Alam रहेको Kazakhastan Pavilion and Science पूर्ण गोलाकार आकारको छ । यस हलमा सन् 2017 मा 100 ओटा देशहरूको सहभागितामा विज्ञान प्रदर्शनी भएको थियो । यस गोलाकार हलको व्यास 80 मिटर छ । यसको बाहिरी सतह सिसाले घेरिएको छ उक्त सिसाले घेरिएको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. दिइएका गोला र अर्धगोलाको सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :



9. एउटा गोलाकार बलको व्यास 35 cm छ भने उक्त बलको सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. अर्धगोलाको ठुलो वृत्तको परिधि 44 cm छ । यसको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
11. ठोस गोलाकार वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल 2464 cm^2 भए यसको व्यास कति हुन्छ ?
12. एउटा गोलाकार वस्तुको आयतन 38808 m^3 भए यसको अर्धव्यास कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
13. (क) एउटा अर्धगोलाको पूरा सतहको क्षेत्रफल 243π cm^2 भए यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
    (ख) एउटा गोलाकार वस्तुको आयतन 2304π cm^3 छ । यसको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :
14. चन्द्रमाको व्यास लगभग पृथ्वीको व्यासको एक चौथाइ छ भने तिनीहरूको सतहको क्षेत्रफलको अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।
15. टेनिस बलको अर्धव्यास यदि पहिलेकोभन्दा दुई गुणा भयो भने तिनीहरूको आयतनमा कति फरक पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
16. एउटा गोलाकार बेलुनलाई हावा भरी अर्धव्यास 7 cm बाट 14 cm बनाउँदा बेलुनको सतहको क्षेत्रफलको अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।
17. अर्धव्यास क्रमशः 2 cm, 12 cm र 16 cm भएका तीनओटा गोलालाई पगालेर एउटै गोला बनाउँदा उक्त गोलाको व्यास कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
18. एउटा अर्धगोलाकार वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल 243π cm^2 छ । त्यसको परिधिको लम्बाइ र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

1. एउटा प्लाष्टिकको खेलौना बल लिनुहोस् र त्यस बललाई ठिक आधा हुनेगरी काट्नुहोस् । अब बाक्लो कागजबाट सो बलको व्यास बराबरको व्यास भएको र व्यास बराबर उचाइ भएको एउटा बेलना बनाउनुहोस् । यसपछि आधा काटिएको बलमा पानी भरेर बेलनामा खन्याउनुहोस् । कति पटकमा उक्त बेलना भरिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । यस प्रक्रियाको आधारमा बेलनाको आयतन निकाल्ने सूत्रको प्रयोगबाट अर्धगोला तथा गोलाको आयतन निकाल्ने सूत्र खोजी गर्नुहोस् ।
2. एउटा गोलाकार कागती लिनुहोस् । सो कागतीलाई ठिक आधा हुनेगरी काट्नुहोस् । यसरी बनेको अर्धगोलाको प्रयोग गरी गोलाको ठुलो वृत्त बराबर हुनेगरी 4 ओटा वृत्तहरू कापीमा ट्रेस गर्नुहोस् । अब कागतीको बोक्रा छोडाएर उक्त वृत्तहरूमा टाँस्दै जानुहोस् । यस प्रक्रियाबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ ? कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
3. उपयुक्त सङ्ख्यामा समूहहरू निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहले आफ्नो विद्यालयमा भएका फुटबल, बास्केटबल र भलिबल खोज्नुहोस् । उक्त फुटबल, बास्केटबल र भलिबलको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गरी आएका सुझावलाई समेत समेटी एउटा प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् ।

उत्तर

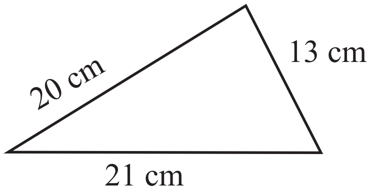
1-5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6. $1386\ cm^2$
7. $20114.29\ m^2$
8. (क) $616\ cm^2$, $1437.34\ cm^3$ (ख) $616\ cm^2$, $1437.34\ cm^3$
   (ग) $7392\ cm^2$, $45994.67\ cm^3$ (घ) $1848\ cm^2$, $5749.34\ cm^3$
9. $3850\ cm^2$, $22458.34\ cm^3$
10. $462\ cm^2$
11. 28 cm
12. 21 m
13. (क) $1527.43\ cm^3$
    (ख) $1810.29\ cm^2$ वा $576\pi\ cm^2$
14. 1 : 16
15. 8 गुणा ठुलो
16. 1: 4
17. 36 cm
18. 56.57 cm, $1527.43\ cm^3$

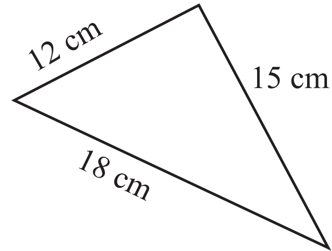
मिश्रित अभ्यास

1. दिइएका त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

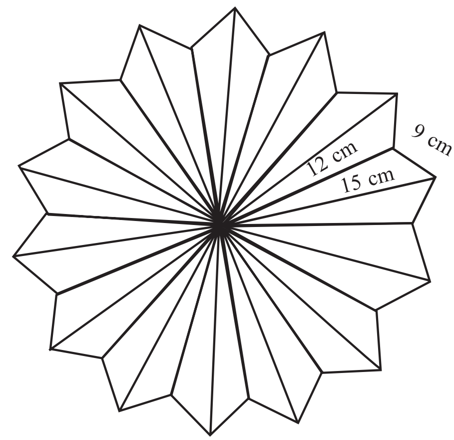
(क)



(ख)



2. एक जना व्यापारीले आफ्नो घरको एउटा बैठक कोठाको भुईंमा चित्रमा देखाए जस्तै एउटा बुट्टा बनाएका छन् । उक्त बुट्टा बनाउन भुजाहरू 9 cm, 12 cm र 15 cm भएका 28 ओटा त्रिभुजाकार टायलहरू प्रयोग गरिएको छ । प्रति वर्ग से.मि. रु. 10 का दरले टायल बिछ्याउन जम्मा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



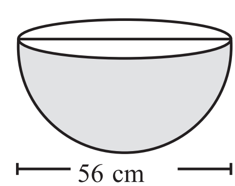
3. एउटा ठोस बेलनामा वक्र सतहको तीन गुणा क्षेत्रफल सोही बेलनाको पूरा सतहको दुई गुणा क्षेत्रफलसँग बराबर छ । यदि उक्त बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल 616 cm^2 भए यसको आधारको परिधिको लम्बाइ र उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल र वक्र सतहको क्षेत्रफलको फरक 308 cm^2 छ भने यसको आधारको व्यास र परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा ठोस बेलनाको समतल सतहको क्षेत्रफल 1232 cm^2 छ । जसको आधारको अर्धव्यास र उचाइ बराबर छन् भने सो बेलनाको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा गोलाकार धातुको पूरा सतहको क्षेत्रफल 616 cm^2 छ । उक्त गोलाको ठुलो वृत्तको व्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

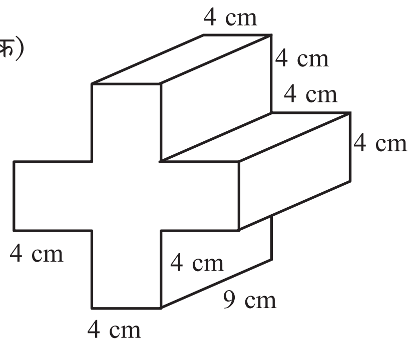
7. दिइएको अर्धगोलाकार ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



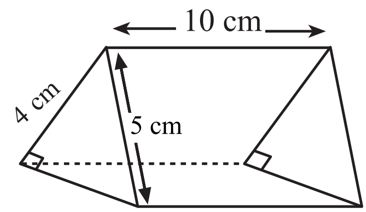
8. लम्बाइ 12 m र चौडाइ 10 m भएको कोठामा 2 m × 1.5 m को एउटा ढोका र 1m × 1.5 m का चारओटा झ्याल छन् । यदि प्रति वर्गमिटर रु.180 का दरले चार भित्तामा रङ लगाउँदा रु. 30,060 लाग्छ भने कोठाको उचाइ कति हुन्छ ?

9. दिइएका प्रिज्मको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

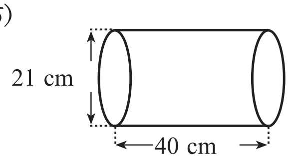


(ख)

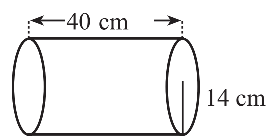


10. दिइएका काठको मुढा प्रति वर्ग सेन्टिमिटर रु.180 को दरले बाहिरी सतहमा रङ लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ :

(क)



(ख)



उत्तर

1. (क) 126 cm^2	(ख) 89.29 cm^2	2. रु. 15,120
3. 44 cm, 14 cm	4. 14 cm, 44 cm	5. 8624 cm^3
6. 14 cm	7. 7392 cm^3	8. 4 m
9. (क) 592 cm^2, 720 cm^3		(ख) 132 cm^2, 60 cm^3
10. (क) रु. 5,99,940		(ख) रु. 8,55,360

पाठ 8

अनुक्रम र श्रेणी
(Sequence and series)

8.1 पुनरवलोकन (Review)

दिइएका प्रश्नको समूहमा छलफल गरी उत्तर लेख्नुहोस् :

(क) दिइएको ढाँचामा अर्को पद कति होला ?

(a) 2, 4, 6, 8, ...

(b) 1, 4, 9, 16, ...

(ख) एउटा साइकलको पाङ्ग्राको परिधिको लम्बाइ 1.5 m छ भने उक्त पाङ्ग्राले प्रत्येक पटक फन्को लगाउँदा छैटौँ पटक सम्ममा पार गर्ने दुरी तल दिइएको छ, अब सातौँ पटकमा पार गर्ने दुरी कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

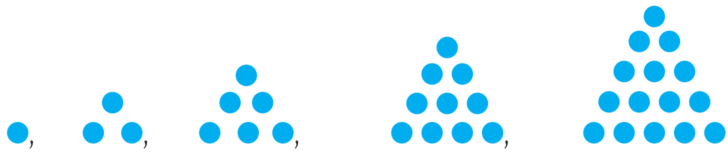
1.5 m, 3 m, 4.5 m, 6 m, 7.5 m, 9 m, ...

(ग) पेम्वाले रु. 500 प्रतिवर्ष 10% का दरले साधारण ब्याज पाउने गरी बैङ्कमा जम्मा गरेछ भने पहिलो, दोस्रो, तेस्रो र चौथो वर्षको अन्तमा पाउने ब्याज दिइएको छ । अध्ययन गरी पाँचौँ र छैटौँ वर्षको अन्तमा पाउने ब्याज तल दिएको ढाँचाको आधारमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

रु. 50, रु. 100, रु. 150, रु. 200, ...

माथिको तथ्यलाई अध्यन गरी त्यहाँ भएका सङ्ख्या बिचको सम्बन्ध दुई पदहरूबिचको फरक र निश्चित नियममा छ कि छैन कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।

8.1.1 अनुक्रमको परिचय (Introduction to sequence)



माथिको चित्रमा एउटा विद्यालयका कक्षा 9 का विद्यार्थीले खेल्ने चउरमा गुच्चाहरू मिलाएर बनाएको ढाँचा हो ।

(क) प्रत्येक ढाँचा भएका गुच्चाको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) अर्को नयाँ ढाँचा थप्नुहोस् ।

(ग) के माथिका ढाँचा निश्चित क्रममा राखिएको छ, समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

कुनै सङ्ख्याको समूहलाई एउटा निश्चित ढाँचामा राखिएको छ भने त्यसलाई अनुक्रम (Sequence) भनिन्छ ।

माथि मिलाइएका गुच्चाहरूको संरचनासँग आबद्ध सङ्ख्याहरू 1, 3, 6, 10, 15, ... अनुक्रमको एउटा उदाहरण हो ।

अनुक्रममा पदहरू निश्चित भएमा निश्चित अनुक्रम (Finite Sequence) र पदहरू यति नै छन् भनी भन्न नसकिनेलाई अनिश्चित अनुक्रम (Infinite Sequence) भनिन्छ । अर्को शब्दमा अन्तिम पद पत्ता लगाउन सकिने अनुक्रमलाई निश्चित अनुक्रम र अन्तिम पद पत्ता लगाउन नसकिने अनुक्रमलाई अनिश्चित अनुक्रम भनिन्छ ।

यहाँ 1, 3, 5, 7, . . . , 15 निश्चित अनुक्रम (Finite Sequence) हो र 10, 20, 30, 40, . . . अनिश्चित अनुक्रम हो ।

उदाहरण 1

4, 7, 10, 13, ... मा पाँचौ र छैटौँ पद के के होलान्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ 4, 7, 10, 13, ... मा दिएका सङ्ख्याको क्रमले एउटा ढाँचा जनाउँछ जसको पछिल्लो पद अघिल्लो पदभन्दा 3 ले बढी छ । त्यसैले थप दुईओटा पद क्रमशः $13 + 3 = 16$ र $16 + 3 = 19$ हुन्छन् ।

8.1.2 साधारण पद (General Term)

क्रियाकलाप 1

4, 8, 12, 16, ... एउटा अनुक्रम हो । यसका आधारमा तलका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

उक्त अनुक्रमको 25 औँ पद कति होला ?

उक्त अनुक्रमको 99 औँ पद कति होला ?

क्रियाकलाप 2

तल दिइएका अनुक्रममा n को मान 1 बाट सुरु हुँदा n औँ पद निकाल्ने तरिका के होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

अनुक्रम	n औँ पदको सूत्र
1, 3, 5, 7, 9, 11, ...	
1, 4, 9, 16, 25, ...	
1, 8, 27, ...	

कुनै पनि अनुक्रममा n औँ पदको मान अनुक्रमका पदहरूको ढाँचा अध्ययन गरी निकाल्ने गरिन्छ । उक्त n औँ पदलाई अनुक्रमको साधारण पद (General Term) भनिन्छ ।

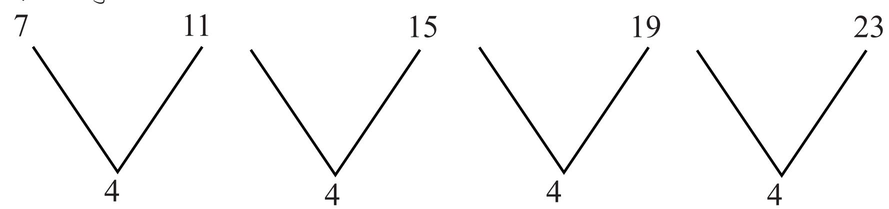
उदाहरण 2

दिइएको अनुक्रमको n औँ पद पत्ता लगाउनुहोस् :

7, 11, 15, 19, 23, ...

समाधान

यहाँ दिइएको अनुक्रमका पदबिचको फरकलाई अध्ययन गरौँ :



यहाँ, पदहरू बिचको समान अन्तर 4 छ । त्यसैले n औँ पदको स्वरूप $4n$ को प्रक्रियाबाट सुरु हुन्छ । तलको ढाँचालाई अध्ययन गरौँ ।

पहिलो पद $(t_1) = 7 \quad = 4 \times 1 + 3 \quad = 7$

पहिलो पद $(t_2) = 11 \quad = 4 \times 2 + 3 \quad = 11$

पहिलो पद $(t_3) = 15 \quad = 4 \times 3 + 3 \quad = 15$

पहिलो पद $(t_4) = 19 \quad = 4 \times 4 + 3 \quad = 19$

पहिलो पद $(t_5) = 23 \quad = 4 \times 5 + 3 \quad = 23$

$\vdots \qquad \vdots$

n औँ पद $(t_n) = 4 \times n + 3 = 4n + 3$

$\therefore$ दिइएको ढाँचालाई अध्ययन गर्दा n औँ पद तल $= 4n + 3$ रहेछ ।

उदाहरण 3

यदि साधारण पद $(t_n) = 2n-1$ भए उक्त साधारण पदका आधारमा पहिला 5 ओटा पद पत्ता लगाई अनुक्रममा लेख्नुहोस् । जहाँ n ले प्राकृतिक सङ्ख्यालाई जनाउँछ ।

समाधान

यहाँ $t_n = 2n-1$

यदि $n = 1$ राख्दा, $t_1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

$n = 2$ राख्दा, $t_2 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$n = 3$ राख्दा, $t_3 = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

$n = 4$ राख्दा, $t_4 = 2 \times 4 - 1 = 8 - 1 = 7$

$n = 5$ राख्दा, $t_5 = 2 \times 5 - 1 = 10 - 1 = 9$

$\therefore$ उक्त सङ्ख्याहरूको अनुक्रम 1, 3, 5, 7, 9 हुन्छ ।

अभ्यास 8.1

1. तल दिइएका अनुक्रममा थप दुई पदको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) 1, 2, 3, 4, ...
(b) 2, 4, 6, 8, 10, ...
(c) 5, 10, 15, 20, 25, ...
(d) 1, 2, 4, 8, 16, ...
(e) 22, 20, 18, 16, 14, ...
(f) –8, –6, –4, ...
(g) 2, 5, 9, 14, 20, ...
(h) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{7}, \frac{10}{9}, ...$

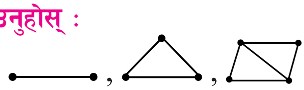
2. निम्न लिखित अनुक्रमहरूको साधारण पद (t_n) पत्ता लगाउनुहोस् :

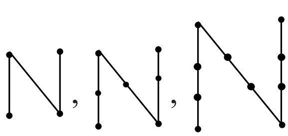
(a) 4, 6, 8, 10, ...
(b) 7, 11, 15, 19, 23, ...
(c) 2, 6, 10, 14, 18, ...
(d) 25, 22, 19, 16, ...
(e) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{7}, \frac{10}{9}, ...$
(f) $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{8}{9}, \frac{11}{10}, ...$
(g) 40, 38, 36, 34, ...
(h) $\frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{6}{11}, \frac{8}{14}, ...$

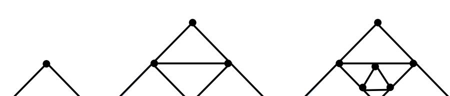
3. तल दिइएका साधारण पदहरूमा पहिला 5 पद पत्ता लगाउनुहोस् र ती पदलाई अनुक्रमका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् । '*n*' ले प्राकृतिक सङ्ख्यालाई जनाउँछ :

(a) $t_n = 2n + 4$
(b) $t_n = 3n - 1$
(c) $t_n = 3^n$
(d) $t_n = n^2 - 1$
(e) $t_n = (-1)^n . n^2$
(f) $t_n = n^2 + 2n + 3$
(g) $t_n = 3n^2 - 5$

4. तल दिइएका संरचना अध्ययन गर्नुहोस् अनि थप दुई संरचना बनाउनुहोस् र साधारण पद (t_n) पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) 

(b) 

(c) 

उत्तर

1. (a) 5, 6 (b) 12, 14 (c) 30, 35 (d) 32, 64 (e) 12, 10
   (f) –2, 0 (g) 27, 35 (h) $\frac{13}{11}, \frac{16}{13}$

2. (a) $2n + 2$ (b) $4n + 3$ (c) $4n - 2$ (d) $28 - 3n$ (e) $\frac{3n-2}{2n+1}$
   (f) $\frac{3n-1}{n+6}$ (g) $42 - 2n$ (h) $\frac{2n}{3n+2}$

3. (a) 6, 8, 10, 12, 14, ... (b) 2, 5, 8, 11, 14, ...
   (c) 3, 9, 27, 81, 243, ... (d) 0, 3, 8, 15, 24, ...
   (e) –1, 4, –9, 16, –25, ... (f) 6, 11, 18, 27, 28, ...
   (g) –2, 7, 22, 43, 70, ...

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8.2 श्रेणीको परिचय (Introduction to series)

तलका प्रश्नलाई समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) साधारण पद $(t_n) = 2n + 1$ भएको अनुक्रममा पहिला 5 ओटा पदहरूलाई जोड्दा कति होला ?

(ख) के यी 5 ओटा पदहरूलाई $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$ लेख्न सकिन्छ ? यसलाई के भनिन्छ होला ?

अनुक्रमका पदहरूलाई योगफलका रूपमा व्यक्त गरिएमा त्यसलाई उक्त अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणी भनिन्छ । यसलाई '$\sum$' (Sigma or Summation) चिह्नभित्र साधारण पद लेखिन्छ ।
जस्तै : 7, 11, 15, 19, 23, ... एउटा अनुक्रम हो । यससँग सम्बन्धित श्रेणी,
$7 + 11 + 15 + 19 + 23 + \ldots$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि साधारण पद $(t_n) = 2n + 3$ भएको अनुक्रमको

(क) पहिलो पाँचओटा पदको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यी पाँचओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त श्रेणीलाई '$\sum$' चिह्न प्रयोग गरी लेख्नुहोस् ।

समाधान

(क) यहाँ साधारण पद $(t_n) = 2n + 3$ मा n का मान क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 राख्दा,

$t_1 = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$t_2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$

$t_3 = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$

$t_4 = 2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$

$t_5 = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$

(ख) $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$

$= 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

$= 45$

(ग) उक्त श्रेणीलाई '$\sum$' चिह्न प्रयोग गरी लेख्दा $\sum_{n=1}^{5} 2n + 3$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

मान पत्ता लगाउनुहोस् :

$$\sum_{n=1}^{6} (2^n + 1)$$

समाधान

$$\sum_{n=1}^{6} (2^n + 1) = (2^1 + 1) + (2^2 + 1) + (2^3 + 1) + (2^4 + 1) + (2^5 + 1) + (2^6 + 1)$$

$$= (2 + 1) + (4 + 1) + (8 + 1) + (16 + 1) + (32 + 1) + (64 + 1)$$

$$= 3 + 5 + 9 + 17 + 33 + 65$$

$$= 132$$

अभ्यास 8.2

1. (a) अनुक्रमको परिभाषा उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

(b) अनुक्रम र श्रेणीबिच भिन्नता देखाउनुहोस् ।

2. **तल दिइएका मध्ये अनुक्रम र श्रेणी कुन हुन्, छुट्याउनुहोस् :**

(a) 3, 6, 9, 12, 15, ...

(b) 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ...

(c) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

(d) $\sum_{n=1}^{3} (3n + 1)$

(e) 1 + 4 + 9 + 16 + ...

(f) $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{7}{14}$

3. **मान पत्ता लगाउनुहोस् :**

(a) $\sum_{n=0}^{4} (2n - 1)$

(b) $\sum_{n=2}^{6} (3n + 2)$

(c) $\sum_{n=1}^{5} (n^2 + 1)$

(d) $\sum_{n=1}^{3} (n^2 + 2n + 1)$

(e) $\sum_{n=1}^{10} 5n$

(f) $\sum_{n=5}^{10} n^2$

(g) $\sum_{n=3}^{8} (n^2 - 2)$

(h) $\sum_{n=1}^{5} \left(\frac{2n + 1}{n}\right)$

(i) $\sum_{n=0}^{4} \left(\frac{n}{n + 1}\right)$

4. **तल दिइएका श्रेणीलाई $\sum$ चिह्न प्रयोग गरी लेख्नुहोस् :**

(a) 5 + 7 + 9 + 11 + ... + 21

(b) 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12

(c) 30 + 25 + 20 + ... + 5

(d) 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21

(e) 1 + 4 + 9 + 16

(f) $a + ab^1 + ab^2 + ab^3 + ab^4$

उत्तर

1 - 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (a) 15 (b) 70 (c) 60 (d) 29 (e) 275

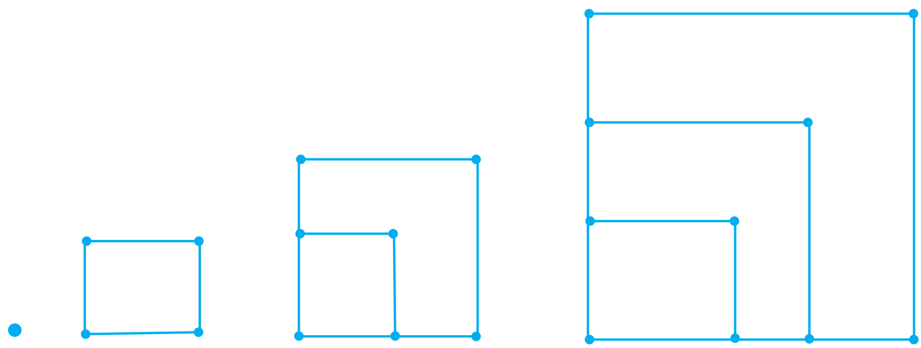
(f) 355 (g) 187 (h) $\frac{737}{60}$ (i) $\frac{163}{60}$

4. (a) $\sum_{n=1}^{9} (2n + 3)$ (b) $\sum_{n=1}^{6} 2n$ (c) $\sum_{n=1}^{6} (35 - 5n)$

(d) $\sum_{n=1}^{6} (4n - 3)$ (e) $\sum_{n=1}^{4} n^2$ (f) $\sum_{n=1}^{5} (ab^{n-1})$

8.3 अङ्कगणितीय अनुक्रम र श्रेणी (Arithmetic sequence and series)

सर्वप्रथम तल दिइएका चित्रहरूको ढाँचाको अध्ययन गर्नुहोस् :



चित्रहरूको ढाँचा अध्ययन गरिसकेपछि कस्ता कस्ता प्रश्न आएका छन्, छलफल गर्न सकिन्छ । जस्तैः

(क) थोप्लाहरूलाई अनुक्रममा कसरी लेख्न सकिन्छ ?

(ख) थोप्लाहरूको सङ्ख्या कसरी बढ्दै गएको छ ? कुनै नियम पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ग) चित्र नबनाई पदहरू (जस्तैः दसौँ पद) कसरी पत्ता लगाउन सकिएला ?

माथिका चारओटा चित्रमा भएका थोप्लालाई क्रमशः 1, 4, 7, 10 भनेर लेख्न सकिन्छ । यसलाई अनुक्रममा लेख्दा 1, 4, 7, 10 हुन्छ । यस अनुक्रममा भएका सङ्ख्या वा पद 3 ले बढ्दै गएका छन् वा समान अन्तर 3 छ । जस्तैः $10 - 7 = 3, 7 - 4 = 3, 4 - 1 = 3$

त्यसै गरी अनुक्रमहरू 5, 10, 15, 20, 25 र 50, 45, 40, 35, 30 का समान अन्तर के कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

तसर्थ कुनै अनुक्रमको प्रत्येक पद अघिल्लो पदभन्दा निश्चित सङ्ख्याले बढ्दै वा घट्दै गएमा त्यस्तो अनुक्रमलाई अङ्कगणितीय अनुक्रम भनिन्छ । अनुक्रममा हुने अघिल्लो पदभन्दा बढी वा घटी हुने निश्चित सङ्ख्यालाई समान अन्तर भनिन्छ । जस्तैः अङ्कगणितीय अनुक्रम 15, 25, 35, 45, 55 मा समान अन्तर 10 हुन्छ । अनुक्रम 100, 90, 80, 70 मा समान अन्तर –10 हुन्छ ।

अङ्कगणितीय अनुक्रममा समान अन्तरलाई 'd' र पहिलो पद, दोस्रो पद, तेस्रो पद, ..., n औँ पदलाई क्रमशः $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ ले जनाइन्छ ।

यदि $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_{n-1}, t_n$ तल एउटा अङ्कगणितीय अनुक्रम भए,

समान अन्तर $(d) = t_2 - t_1, t_3 - t_2, t_n - t_{n-1}$ हुन्छ ।

माथिको अङ्कगणितीय अनुक्रमसँग सम्वन्धित श्रेणीको योगफल

$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$ हुन्छ ।

सधारणतया $d = t_2 - t_1$ हुन्छ ।

8.3.1 अङ्कगणितीय अनुक्रमको साधारण पद

यदि $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_{n-1}, t_n$ एउटा अङ्कगणितीय अनुक्रम भए,

समान अन्तर $(d) = t_2 - t_1$ हुन्छ ।

पहिलो पद $(t_1) = a \quad = a + (1-1) \times d$

दोस्रो पद $(t_2) = a + d \quad = a + (2-1) \times d$

तेस्रो पद $(t_3) = a + 2d = a + (3-1) \times d$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

n औँ पद $(t_n) = a + (n-1) \times d$

$\therefore$ अङ्कगणितीय अनुक्रमको साधारण पद $(t_n) = a + (n-1)\, d$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

कुनै एक पैदल यात्री जसका प्रत्येक पाइलाले पार गरेको दुरी (Feet मा) निम्नअनुसार छ :

3, 6, 9, 12, 15, 18, …

उक्त पैदलयात्रीले कुनै पाइलामा पार गर्न सक्ने दुरी कति हुन सक्छ ?

समाधान

यहाँ,

अनुक्रम 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... छ । यो अङ्कगणितीय अनुक्रम हो ।

पहिलो पद $(t_1) = a = 3$

समान अन्तर $(d) = t_2 - t_1 = 6 - 3 = 3$

अब,

n औँ पद $(t_n) = a + (n-1) \times d$

$= 3 + (n-1) \times 3$

$= 3 + 3n - 3$

$= 3n$

तसर्थ उक्त पैदल यात्रीले कुनै पाइलामा जम्मा $3n$ फिट दुरी पार गर्छ ।

8.4 ज्यामितीय अनुक्रम र श्रेणी (Geometric sequence and series)

सर्वप्रथम तल दिइएका अनुक्रमको अध्ययन गर्नुहोस् :

2, 4, 8, 16, 32, 64, …

2, 6, 18, 54, ...

27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...

तलका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) अनुक्रमहरूको ढाँचा कसरी बनेको छ ?

(ख) प्रत्येक अनुक्रममा क्रमागत पदहरूको अन्तर बराबर छ कि छैन ?

(ग) प्रत्येक अनुक्रममा क्रमागत पदको अनुपात कति कति होला ?

(घ) एक पदबाट अर्को पद आउने नियम के होला ?

माथिका अनुक्रममा क्रमागत रूपमा आउने पदको अन्तर बराबर छैन । त्यसैले अब, क्रमागत पदहरूको अनुपात निकालेर हेर्नुहोस् ।

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \cdots = 2$$

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \cdots = 3$$

यहाँ प्रत्येक अनुक्रमको क्रमागत पदहरूको अनुपात समान छ। यस्ता अनुक्रमलाई ज्यामितीय अनुक्रम भनिन्छ। ज्यामितीय अनुक्रमसँग सम्वन्धित श्रेणीहरूलाई ज्यामितीय श्रेणी भनिन्छ।

जस्तै, 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + …

यदि ज्यामितीय अनुक्रमको n औँ पद (t_n) र $(n-1)$ औँ पद t_n-1 भए समान अनुपात $\frac{t_n}{t_{n-1}}$ हुन्छ ।

$t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$ एउटा ज्यामितीय श्रेणी हो। जसमा $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ज्यामितीय अनुक्रममा हुनुपर्छ।

8.4.1 ज्यामितीय अनुक्रमको साधारण पद

यदि $t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_{n-1}, t_n$ एउटा ज्यामितीय अनुक्रम भए,

समान अनुपात $(r) = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_n}{t_{n-1}}$

दोस्रो पद $(t_2) = ar = ar^{2-1}$

तेस्रो पद $(t_3) = ar^2 = ar^{3-1}$

⋮ ⋮ ⋮

n औँ पद $(t_n) = ar^{n-1}$

∴ ज्यामितीय अनुक्रमको साधारण पद $(t_n) = ar^{n-1}$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

कुनै व्यक्तिले बैङ्कमा रु. 200 रकम जम्मा गरेबापत प्रत्येक वर्षको अन्त्यमा 10% ब्याजसहित प्राप्त बैङ्कमा रकम जम्मा गर्दा दश वर्षपछि कति हुन आउला ?

समाधान

यहाँ कुनै व्यक्तिले बैङ्कमा रु. 200 रकम जम्मा गरेबापत प्रत्येक वर्षको अन्त्यमा 10% ब्याजसहित हुन आउने रकमलाई अनुक्रममा राख्दा निम्नलिखित तरिकाले राख्न सकिन्छ :

[जम्मा गरेको रकम = रु. 200]

200, 220, 242, …

यहाँ समान अनुपात $(r) = \frac{220}{200} = \frac{242}{220} = \frac{11}{10}$

उक्त व्यक्तिले दश वर्षसम्म बैङ्कमा रकम जम्मा गर्दा दश वर्षपछि हुन आउने रकम,

$$t_{10} = 200\left(\frac{11}{10}\right)^{10-1}$$

= रु. $200(1.1)^9$

= रु. 200×2.36

= रु. 471.59

उदाहरण 3

तलका अनुक्रम अङ्कगणितीय वा ज्यामितीय कुनमा छन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् :

(a) 4, 7, 10, 13, ... (b) 3, 6, 12, 24, ...

समाधान

(a) यहाँ,

पहिलो पद $(t_1) = 4$

दोस्रो पद $(t_2) = 7$

तेस्रो पद $(t_3) = 10$

$\therefore t_2 - t_1 = 7 - 4 = 3$

फेरी, $t_3 - t_2 = 10 - 7 = 3$

यस अनुक्रमका क्रमागत पदहरूको अन्तर समान रहेकोले यो अङ्कगणितीय अनुक्रम हो ।

(b) यहाँ,

पहिलो पद $(t_1) = 3$

दोस्रो पद $(t_2) = 6$

तेस्रो पद $(t_3) = 12$

समान अनुपात (r) $\frac{t_2}{t_1} = \frac{6}{3} = 2$

फेरी, $\frac{t_3}{t_2} = \frac{12}{6} = 2$

यस अनुक्रमका क्रमागत पदहरूको अनुपात एउटै रहेकोले यो ज्यामितीय अनुक्रम हो ।

उदाहरण 4

अङ्कगणितीय अनुक्रम 2, 7, 12, … को कुन पद 62 हुन्छ ?

समाधान

(a) यहाँ,

पहिलो पद $(t_1) = 2$

दोस्रो पद $(t_2) = 7$

मानौँ n औँ पद $(t_n) = 62$

पद सङ्ख्या $(n) = ?$

समान अन्तर $(d) = t_2 - t_1 = 7 - 2 = 5$

हामीलाई थाहा छ,

साधारण पद $(t_n) = a + (n - 1)d$

अथवा, $62 = 2 + (n - 1) \times 5$

अथवा, $62 - 2 = (n - 1) \times 5$

अथवा, $\frac{60}{5} = n - 1$

अथवा, $12 = n - 1$

अथवा, $n = 12 + 1 = 13$

∴ अङ्कगणितीय अनुक्रम 2, 7, 12, … को 13 औँ पद 62 हुन्छ ।

उदाहरण 5

एउटा ज्यामितीय अनुक्रमको दोस्रो पद 6 र पाँचौं पद 162 भए उक्त अनुक्रमको दसौं पद पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ,

दोस्रो पद $(t_2) = 6$

पाँचौं पद $(t_5) = 162$

दसौं पद $(t_{10}) = ?$

हामीलाई थाहा छ,

साधारण पद $(t_n) = a \cdot r^{n-1}$

$\therefore t_2 = ar$

or, $6 = ar$ …… (i)

$t_5 = ar^4$

or, $162 = ar^4$ …… (ii)

समीकरण (ii) लाई (i) ले भाग गर्दा,

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{162}{6}$$

अथवा, $r^3 = 27$

$r = \sqrt[3]{27}$

$\therefore r = 3$

समीकरण (i) मा $r = 3$ राख्दा,

$6 = 3a$

$\therefore a = 2$

अब,

दसौं पद (t_{10}) $= ar^9$

$= 2 \cdot (3)^9$

$= 2 \times 19683$

$= 39{,}366$

अभ्यास 8.3

1. दिइएका अनुक्रम र श्रेणीमध्ये अङ्कगणितीय वा ज्यामितीय कुन हुन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् :

(a) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$ (b) $4, 10, 16, \ldots$

(c) $a, ab, ab^2, \ldots$ (d) $6 + 12 + 24 + \ldots$

(c) $30 + 27 + 24 + \ldots$

2. यदि एउटा अङ्कगणितीय श्रेणीको तेस्रो पद र नवौँ पद क्रमशः 9 र 33 छन् भने उक्त श्रेणीको पाँचौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. अङ्कगणितीय अनुक्रम 2, 6, 10, 14, 18, ... को समान अन्तर र दसौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. यदि एउटा अङ्कगणितीय श्रेणीको चौथो पद 20 र सातौँ पद 35 भए दसौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. $x - 1$, $x + 2$ र $3x$ अङ्कगणितीय अनुक्रमका पहिला तीनओटा पद हुन् भने x को मान निकाली पहिलो पद र पाँचौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. कुनै अङ्कगणितीय श्रेणीको पाँचौँ पद 17 र आठौँ पद 26 भए कुन चाहिँ पद 44 होला ?

7. ज्यामितीय अनुक्रम 12, 6, 3, ... को समान अनुपात र दसौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. यदि एउटा ज्यामितीय श्रेणीको दोस्रो र पाँचौँ पद क्रमशः 6 र 162 भए उक्त श्रेणीको नवौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. $z + 6$, z, र $z - 3$ ज्यामितीय अनुक्रमका पहिला तीनओटा पद भए z को मान पत्ता लगाई यसको पाँचौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) ज्यामितीय (ख) अङ्कगणितीय (ग) ज्यामितीय
   (घ) ज्यामितीय (ङ) अङ्कगणितीय

2. $t_5 = 17$ 3. $d = 4,\ t_{10} = 38$ 4. $t_{10} = 50$

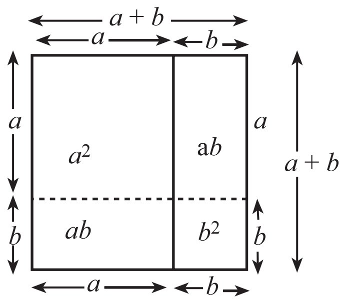
5. $x = \frac{5}{2},\ a = \frac{3}{2},\ t_5 = \frac{27}{2}$ 6. $n = 14$ 7. $r = \frac{1}{2},\ t_{10} = \frac{3}{128}$

8. 13, 122 9. $z = 6,\ t_5 = \frac{3}{4}$

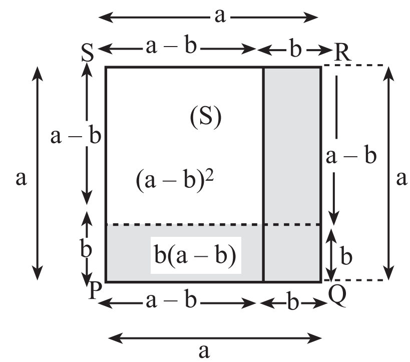
पाठ 9 खण्डीकरण (Factorization)

9.0 पुनरवलोकन (Review)

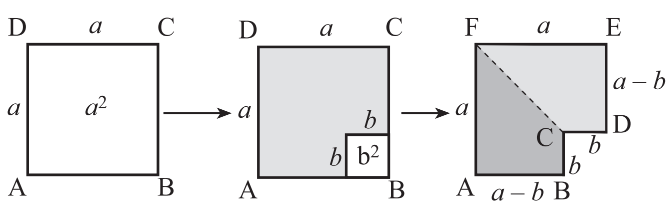
उपयुक्त सङ्ख्यामा समूहमा बस्नुहोस् । प्रत्येक समूहले तलका चित्र अवलोकन गर्नुहोस् । समूहमा छलफल गरी क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :



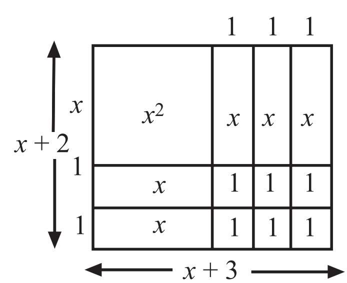
चित्र (a)



चित्र (b)



चित्र (c)



चित्र (d)

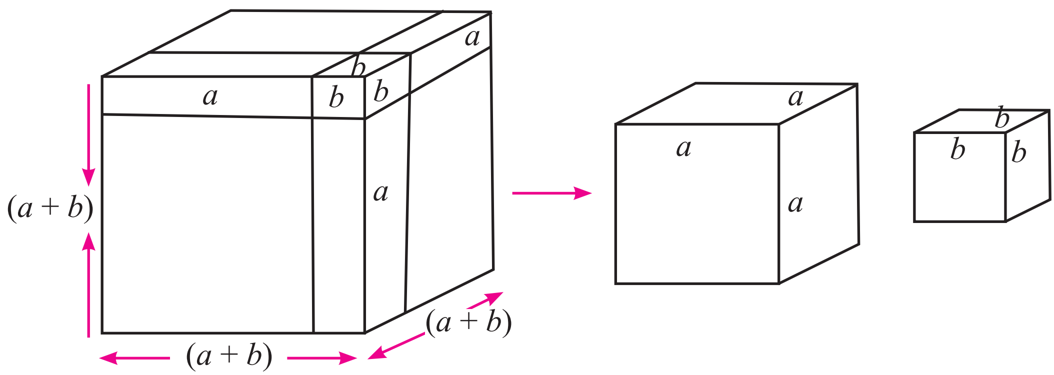
9.1 $(a + b)^3$, $(a^3 + b^3)$, $(a - b)^3$ र $(a^3 - b^3)$ स्वरूपका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण (Factorization of the expression in the form of $(a + b)^3$, $(a^3 + b^3)$, $(a - b)^3$ and $(a^3 - b^3)$)

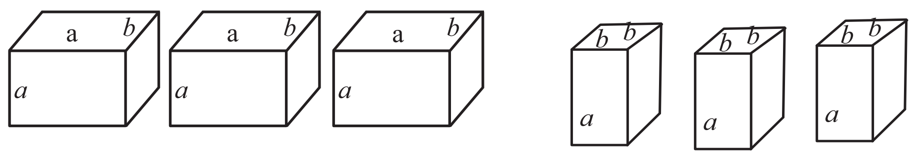
9.1.1 $(a + b)^3$ को ज्यामितीय अवधारणा (Geometrical concept of $(a + b)^3$)

क्रियाकलाप 1

विद्यार्थीहरू उपयुक्त सङ्ख्याका समूहमा विभाजित हुनुहोस् । प्रत्येक समूहले एक एकओटा काट्न मिल्ने घनाकार साबुन वा अन्य वस्तु लिनुहोस् । पहिलो (ठुलो) चित्रमा देखाए जस्तै गरी लम्बाइ, चौडाइ

र उचाइलाई $a:b$ को अनुपातमा चिह्न लगाउनुहोस् । अब चिह्न लगाएका ठाउँबाट काट्नुहोस् । कतिओटा कस्ता कस्ता आकृतिहरू पाउनुहुन्छ, समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :





प्रत्येक टुक्राहरूको छुट्टाछुट्टै आयतन पत्ता लगाउनुहोस् । घनको आयतन र सबै टुक्राहरूको आयतनको योगफलको सम्बन्ध कस्तो रह्यो समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

जस्तैः समूह A को कार्य निम्नानुसार रह्यो :

घनको आयतन = सबै टुक्राहरूको आयतनको योगफल हुन्छ ।

त्यसैले $(a + b)^3 \quad = a^3 + b^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(i) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(ii) $(a + b)^3 = a^3 + 3ab\,(a + b) + b^3$ (दोस्रो र तेस्रो पदमा $3ab$ साझा लिँदा)

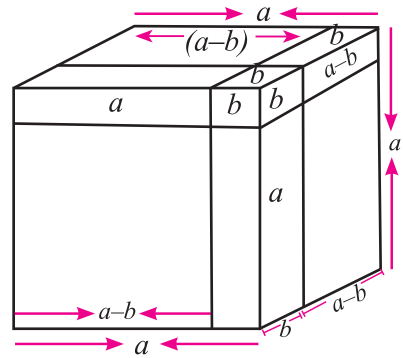
(iii) $(a + b)^3 = (a + b) \times (a + b) \times (a + b)$

9.1.2 $(a - b)^3$ को ज्यामितीय अवधारणा (Geometrical concept of $(a - b)^3$)

क्रियाकलाप 2

उपयुक्त सङ्ख्यामा विद्यार्थीको सूमह निर्माण गरी समूहमा बस्नुहोस् । प्रत्येक समूहले एउटा साबुन वा घनाकार ठोस वस्तु लिनुहोस् । जसका प्रत्येक किनाराको लम्बाइ *'a'* लिनुहोस् । प्रत्येक किनारामा *'b'* एकाइ लम्बाइ घटाएर रेखा तान्नुहोस् ।

उक्त घनाकार वस्तुलाई चित्रमा देखाइएको रेखाबाट 8 ओटा टुक्रामा काट्नुहोस् । प्रत्येक टुक्राको आयतन छुट्टाछुट्टै पत्ता लगाउनुहोस् । घनको आयतन र सबै टुक्राको आयतनको योगफलको सम्बन्ध कस्तो रह्यो समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् । जस्तै : समूह B को कार्य निम्नानुसार रह्यो :



अब, पूरा घनको आयतन = सबै टुक्राको आयतनको योगफल

$a^3 = (a-b)^3 + b^3 + (a-b)^2\cdot b + (a-b)^2\cdot b + (a-b)^2b + (a-b)b^2 + (a-b)b^2 + (a-b)b^2$

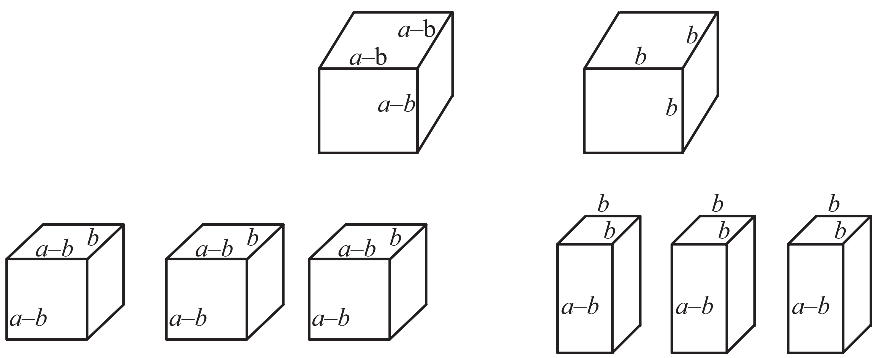
$= (a-b)^3 + b^3 + 3(a-b)^2b + 3(a-b)b^2$

$= (a-b)^3 + b^3 + 3b(a^2-2ab+b^2) + 3ab^2 - 3b^3$

$= (a-b)^3 + b^3 + 3a^2b - 6ab^2 + 3b^3 + 3ab^2 - 3b^3$

$= (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

अथवा, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$



$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$ ($\because$ दोस्रो र तेस्रो पदमा $3ab$ साझा लिएकाले)

(क) $(a-b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3ab^2 - b^3$ } विस्तारित रूप
(ख) $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$ } विस्तारित रूप
(ग) $(a-b)^3 = (a-b)\times(a-b)\times(a-b)$ गुणन खण्डीकृत रूप

9.1.3 $(a^3 + b^3)$ को सरलीकृत रूप

क्रियाकलाप 3

उपयुक्त सङ्ख्यामा समूह निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहले $(a + b)^3$ र $(a - b)^3$ को ज्यामितीय अवधारणालाई प्रयोग गरी $(a^3 + b^3)$ सरलीकृत रूपका सम्बन्धमा छलफल गरी प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

यहाँ, समूह C को प्रस्तुतिलाई दिइएको छ :

हामीलाई थाहा छ,

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$$

अथवा, $(a + b)^3 = 3ab\,(a + b) + a^3 + b^3$

अथवा, $(a + b)\,(a + b)^2 - 3ab\,(a + b) = a^3 + b^3$

अथवा, $(a + b)\,\{(a + b)^2 - 3ab\} = a^3 + b^3$ [$\because$ $(a + b)$ दुवैमा साझा भएकाले]

अथवा, $(a + b)\,(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = a^3 + b^3$ [$\because$ $(a + b)^2$ को सूत्र प्रयोग गर्दा]

अथवा, $(a + b)\,(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\,(a + b)$

(ii) $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$

9.1.4 $(a^3 - b^3)$ को सरलीकृत रूप

हामीलाई थाहा छ,

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$$

अथवा, $(a - b)^3 + 3ab\,(a - b) = a^3 - b^3$

अथवा, $(a - b)\,(a - b)^2 + 3ab\,(a - b) = a^3 - b^3$

अथवा, $(a - b)\,\{(a - b)^2 + 3ab\} = a^3 - b^3$ [$\because$ $(a - b)$ दुवैमा साझा लिँदा]

अथवा, $(a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = a^3 - b^3$

अथवा, $(a - b)\,(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(i) $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$

(ii) $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

उदाहरण 1

सूत्र प्रयोग गरेर $(x+3)$ को घन पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ,

$(x+3)$ को घन

$= (x+3)^3$

$= (x)^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3$

$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$[(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3]$

उदाहरण 2

$(x-2)$ को घन पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $(x-2)$ को घन

$= (x-2)^3$

$= (x)^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - (2)^3$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$[(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3]$

उदाहरण 3

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $(3x+5y)^3$ (ख) $(2x-7y)^3$

समाधान

यहाँ,

(क) $(3x+5y)^3 = (3x+5y)(3x+5y)(3x+5y)$

(ख) $(2x-7y)^3 = (2x-7y)(2x-7y)(2x-7y)$

उदाहरण 4

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $8x^3 + y^3$ (ख) $\frac{p^3}{q^3} - \frac{q^3}{p^3}$

समाधान

यहाँ,

(क) $8x^3 + y^3$

$= (2x)^3 + (y)^3$

$= (2x+y)\{(2x)^2 - 2x \cdot y + (y)^2\}$ $[\because a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)]$

$= (2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

(ख) $\frac{p^3}{q^3} - \frac{q^3}{p^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3 - \left(\frac{q}{p}\right)^3$

$= \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)\left(\frac{p^2}{q^2} + 1 + \frac{q^2}{p^2}\right)$ [$\because a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$]

$= \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + 1\right\}$

$= \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)\left\{\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)^2 - 2\frac{p}{q}.\frac{q}{p} + 1\right\}$

$= \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)\left\{\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)^2 - 1\right\}$

$= \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)\left\{\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)^2 - (1)^2\right\}$

$= \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q} + 1 + \frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q} - 1 + \frac{q}{p}\right)$

अभ्यास 9.1

1. सूत्र प्रयोग गरेर तलका अभिव्यञ्जकको घन पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $(x + 1)$ (ख) $(x - 3)$

(ग) $(x + 4)$ (घ) $(2x - 1)$

(ङ) $(3y + 2b)$ (च) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

2. तल दिइएका अभिव्यञ्जकलाई विस्तारित रूपमा लेख्नुहोस् :

(क) $(2x + 3y)^3$ (ख) $(5a - 8b)^3$

3. तल दिइएका अभिव्यञ्जकलाई $(a + b)^3$ का रूपमा लेख्नुहोस् :

(क) $27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$

(ख) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

4. तल दिइएका अभिव्यञ्जकलाई $(a - b)^3$ का रूपमा लेख्नुहोस् :

(क) $64m^3 - 48m^2n + 12\,mn^2 - n^3$

(ख) $125p^3 - 150p^2q + 60pq^2 - 8q^3$

5. **तल दिइएका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

(क) $8x^4 + 27x$ (ख) $x^3 + 8y^3$ (ग) $1 + 125x^3$

(घ) $8x^3 + \frac{1}{x^3}$ (ङ) $(a + b)^3 + 1$ (च) $x^6 + y^6$

6. **तल दिइएका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

(क) $250m^4 - 2m$ (ख) $x^3y - 64y^4$ (ग) $64p^6q^3 - 125$

(घ) $(a - b)^3 - 8(a + b)^3$

7. एउटा x ft किनारा भएको एउटा घनाकार काठको मुढाबाट 7 ft लम्बाइ भएको घनाकार टुक्रा काटेर निकालेपछि उक्त काठको मुढामा कति घनफिट काठ बाँकी रह्यो होला ($x > 7$ ft) ?

उत्तर

1. (क) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (ख) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ (ग) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

(घ) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ (ङ) $27y^3 + 54y^2b + 36yb^2 + 8b^3$

च) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

2. (क) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ (ख) $125a^3 - 600a^2b + 960ab^2 - 512b^3$

3. (क) $(3a + 4b)^3$ (ख) $(2x + 3y)^3$

4. (क) $(4m - n)^3$ (ख) $(5p - 2q)^3$

5. (क) $x(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$ (ख) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

(ग) $(1 + 5x)(1 - 5x + 25x^2)$ (घ) $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(4x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$

(ङ) $(a + b + 1)(a^2 + 2ab + b^2 - a - b + 1)$

(च) $(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

6. (क) $2m(5m - 1)(25m^2 + 5m + 1)$

(ख) $y(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$

(ग) $(4p^2q - 5)(16p^4q^2 + 20p^2q + 25)$

(घ) $-(a + 3b)(7a^2 + 6ab + 3b^2)$

7. $(x^3 - 343)$ ft^3

9.2 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ स्वरूपका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण (Factorization of the expression in the form of $a^4 + a^2b^2 + b^4$)

क्रियाकलाप 1

बीजीय अभिव्यञ्जक $a^4 + a^2b^2 + b^4$ लाई कसरी खण्डीकरण गर्न सकिन्छ, अध्ययन तथा छलफल गर्नुहोस् :

यहाँ, $a^4 + a^2b^2 + b^4$

$= (a^2)^2 + 2a^2b^2 - a^2b^2 + (b^2)^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$ $\quad$ [$\because (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]

$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$ $\quad$ [$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

क्रियाकलाप 2

अभिव्यञ्जक $a^4 + a^2b^2 + b^4$ लाई क्रियाकलाप 1 मा प्रस्तुत गरिएको तरिकाभन्दा भिन्न तरिकाले खण्डीकरण गर्न सकिन्छ ? आफ्नो समूहमा छलफल गर्नुहोस् । एक समूहले गरेको अर्को तरिका निम्नानुसार रह्यो :

$a^4 + a^2b^2 + b^4$

$= (a^2)^2 + (b^2)^2 + a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + a^2b^2$ $\quad$ [$\because a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$]

$= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$ $\quad$ [$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

माथिको प्रस्तुतिमा घाताङ्क 4 भएका पदहरूलाई सँगै राखी $a^2 + b^2$ को सूत्र $(a + b)^2 - 2ab$ प्रयोग गरिएको छ ।

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $y^4 + y^2 + 1$

समाधान

यहाँ $y^4 + y^2 + 1$

$= (y^2)^2 + (1)^2 + y^2$

$= (y^2 + 1)^2 - 2y^2 \cdot 1 + y^2$ $\quad [\because a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab]$

$= (y^2 + 1)^2 - (y)^2$

$= (y^2 + 1 + y)(y^2 + 1 - y)$ $\quad [\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

$= (y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)$

उदाहरण 2

$y^4 + 64$ को खण्डीकरण गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ $y^4 + 64$

$= (y^2)^2 + (8)^2$

$= (y^2 + 8)^2 - 2 \cdot y^2 \cdot 8$

$= (y^2 + 8)^2 - 16y^2$

$= (y^2 + 8)^2 - (4y)^2$

$= (y^2 + 8 + 4y)(y^2 + 8 - 4y)$

$= (y^2 + 4y + 8)(y^2 - 4y + 8)$

उदाहरण 3

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $49a^4 - 154a^2b^2 + 9b^4$

समाधान

यहाँ $49a^4 - 154a^2b^2 + 9b^4$

$= (7a^2)^2 + (3b^2)^2 - 154a^2b^2$

$= (7a^2 + 3b^2)^2 - 2 \cdot 7a^2 \cdot 3b^2 - 154a^2b^2$

$= (7a^2 + 3b^2)^2 - 42a^2b^2 - 154a^2b^2$

$= (7a^2 + 3b^2)^2 - 196a^2b^2$

$= (7a^2 + 3b^2)^2 - (14ab)^2$

$= (7a^2 + 3b^2 + 14ab)(7a^2 + 3b^2 - 14ab)$

$= (7a^2 + 14ab + 3b^2)(7a^2 - 14ab + 3b^2)$

उदाहरण 4

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $p^4 - 3p^2 + 1$

समाधान

यहाँ $p^4 - 3p^2 + 1$

$= (p^2)^2 + (1)^2 - 3p^2$

$= (p^2 - 1)^2 + 2 \cdot p^2 \cdot 1 - 3p^2$ $\quad [\because a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab]$

$= (p^2 - 1)^2 - p^2$

$= (p^2 - 1)^2 - (p)^2$

$= (p^2 - 1 + p)\,(p^2 - 1 - p)$

$= (p^2 + p - 1)\,(p^2 - p - 1)$

उदाहरण 5

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $\frac{x^4}{y^4} + \frac{x^2}{y^2} + 1$

समाधान

यहाँ,

$\frac{x^4}{y^4} + \frac{x^2}{y^2} + 1$

$= \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2 + (1)^2 + \frac{x^2}{y^2}$

$= \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{y^2} \cdot 1 + \frac{x^2}{y^2}$

$= \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^2 - \frac{x^2}{y^2}$

$= \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right)^2$

$= \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + 1 - \frac{x}{y}\right)$

$= \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1\right)\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1\right)$

उदाहरण 6

$x^2 - 10x + 24 + 6y - 9y^2$ को खण्डीकरण गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ,

$$x^2 - 10x + 24 + 6y - 9y^2$$
$$= (x)^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + (5)^2 - (5)^2 + 24 + 6y - 9y^2$$
$$= (x - 5)^2 - 25 + 24 + 6y - 9y^2$$
$$= (x - 5)^2 - 1 + 6y - 9y^2$$
$$= (x - 5)^2 - (1 - 6y + 9y^2)$$
$$= (x - 5)^2 - \{(1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3y + (3y)^2\}$$
$$= (x - 5)^2 - (1 - 3y)^2$$
$$= (x - 5 + 1 - 3y)(x - 5 - 1 + 3y)$$
$$= (x - 3y - 4)(x + 3y - 6)$$

अभ्यास 9.2

1. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (ख) $16x^4 + 7x^2 + 1$

(ग) $16x^4 + 36x^2y^2 + 81y^4$ (घ) $4m^4 + 35m^2n^2 + 121n^4$

(ङ) $48a^4 + 108a^2b^2 + 243b^4$ (च) $32p^4 + 72p^2q^2 + 162q^4$

2. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $x^4 + 4$ (ख) $4x^4 + 81y^4$

(ग) $64e^4 + f^4$ (घ) $m^4 + 4n^4$

(ङ) $81x^4 + 64y^4$ (च) $y^4 + 324x^4$

3. दिइएका अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$ (ख) $x^4 - 22x^2y^2 + 9y^4$

(ग) $b^4 - 3b^2 + 1$ (घ) $25x^4 - 34x^2y^2 + 9y^4$

(ङ) $49a^4 - 154a^2b^2 + 9b^4$ (च) $25a^5b - 9a^3b^3 + 16ab^5$

4. दिइएका अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $\frac{m^4}{n^4} + 1 + \frac{n^4}{m^4}$ (ख) $y^4 + \frac{1}{y^4} + 1$

(ग) $\frac{a^4}{b^4} - \frac{5a^2}{b^2} + 4$ (घ) $\frac{p^4}{q^4} + 1 + \frac{p^2}{q^2}$

(ङ) $\frac{a^4}{b^4} + 1 - \frac{7a^2}{b^2}$ (च) $x^4 + \frac{1}{x^4} - 7$

5. दिइएका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $p^2 - 10p + 24 + 6q - 9q^2$ (ख) $p^4 - 8p^2 - 33 - 14q - q^2$

(ग) $a^2 - 12a - 28 + 16b - b^2$ (घ) $x^4 + 9 - 7x^2 + 2xy - y^2$

(ङ) $25x^2 - 49y^2 + 30x + 70y - 16$ (च) $49x^2 + 16y^2 - 64z^2 + 56xy + 16z - 1$

6. अभिव्यञ्जक $x^{10} - 10x^6 + 9x^2$ को खण्डीकरण गरी गुणनखण्ड पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. दिइएका अभब्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^3}{y^3} - \frac{y^3}{x^3}$ (ख) $p^3 - \frac{1}{p^3}$

उत्तर

1. (क) $(x^2 + xy + y^2)\ (x^2 - xy + y^2)$ (ख) $(4x^2 + x + 1)\ (4x^2 - x + 1)$

(ग) $(4x^2 + 6xy + 9y^2)\ (4x^2 - 6xy + 9y^2)$

(घ) $(2m^2 + 3mn + 11n^2)\ (2m^2 - 3mn + 11n^2)$

(ङ) $3(4a^2 + 6ab + 9b^2)\ (4a^2 - 6ab + 9b^2)$

(च) $2(4p^2 + 6pq + 9q^2)\ (4p^2 - 6pq + 9q^2)$

2. (क) $(x^2 + 2x + 2)\ (x^2 - 2x + 2)$ (ख) $(2x^2 + 6xy + 9y^2)\ (2x^2 - 6xy + 9y^2)$

(ग) $(8e^2 + 4ef + f^2)\ (8e^2 - 4ef + f^2)$ (घ) $(m^2 + 2mn + 2n^2)\ (m^2 - 2mn + 2n^2)$

(ङ) $(9x^2 + 12xy + 8y^2)\ (9x^2 - 12xy + 8y^2)$

च) $(y^2 + 6xy + 18x^2)\ (y^2 - 6xy + 18x^2)$

3. (क) $(x^2 + 3xy + 2y^2)\ (x^2 - 3xy + 2y^2)$

(ख) $(x^2 + 4xy - 3y^2)\ (x^2 - 4xy - 3y^2)$ (ग) $(b^2 + b - 1)\ (b^2 - b - 1)$

(घ) $(5x^2 + 2xy - 3y^2)\ (5x^2 - 2xy - 3y^2)$

OR $(5x^2 + 8xy + 3y^2)\ (5x^2 - 8xy + 3y^2)$

(ङ) $(7a^2 + 14ab + 3b^2)\ (7a^2 - 14ab + 3b^2)$

(च) $ab\ (5a^2 + 7ab + 4b^2)\ (5a^2 - 7ab + 4b^2)$

4. (क) $\left(\frac{m}{n} + 1 + \frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n} - 1 + \frac{n}{m}\right)\left(\frac{m^2}{n^2} - 1 + \frac{n^2}{m^2}\right)$

(ख) $\left(y + 1 + \frac{1}{y}\right)\left(y - 1 + \frac{1}{y}\right)\ \left(y^2 - 1 + \frac{1}{y^2}\right)$

(ग) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{3a}{b} + 2\right).\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{3a}{b} + 2\right)$

(घ) $\left(\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 1\right).\left(\frac{p^2}{q^2} - \frac{p}{q} + 1\right)$

(ङ) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{3a}{b} + 1\right).\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{3a}{b} + 1\right)$

(च) $\left(x^2 + 3 + \frac{1}{x^2}\right).\left(x^2 - 3 + \frac{1}{x^2}\right)$

5. (क) $(p + 3q - 6)\ (p - 3q - 4)$

(ख) $[(p^2 + q + 3)\ (p^2 - q - 11)]$

(ग) $(a + b - 14)\ (a - b + 2)$

(घ) $(x^2 + x - y - 3) - (x^2 - x + y - 3)$

(ङ) $(5x - 7y + 8)\ (5x + 7y - 2)$

(च) $(7x + 4y + 8z - 1)\ (7x + 4y - 8z + 1)$

6. $x^2(x^2 + 3)\ (x^2 + 1)\ (x^2 - 3)\ (x + 1)\ (x - 1)$

7. (क) $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}\right)\ \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}\right)$

(ख) $\left(p - \frac{1}{p}\right)\left(p + \frac{1}{p} + 1\right)\ \left(p + \frac{1}{p} - 1\right)$

पाठ 10 महत्तम समापवर्तक र लघुत्तम समापवर्त्य (Highest Common Factor and Lowest Common Multiple)

10.0 पुनरवलोकन (Review)

कक्षामा सँगैको साथीसँग छलफल गरी तल दिइएका बीजीय अभिव्यञ्जकका म.स तथा ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ?

$2x^2 - 8y^2$ र $2x^4 + 16xy^3$

यहाँ दिइएका अभिव्यञ्जकको म.स. तथा ल.स. पत्ता लगाउन सुरुमा अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर्नुपर्छ । दिइएका अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्दा,

पहिलो अभिव्यञ्जक $= 2x^2 - 8y^2$

$= 2(x^2 - 4y^2)$

$= 2\{x^2 - (2y)^2\}$

$= 2(x - 2y)(x + 2y)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= 2x(x^3 + 8y^3)$

$= 2x\{(x)^3 + (2y)^3\}$

$= 2x(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

अब म.स. = साझा गुणनखण्ड $= 2 \times (x + 2y) = 2(x + 2y)$

ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= 2 \times (x + 2y) \times (x - 2y) \times x \times (x^2 - 2xy + 4y^2)$

$= 2x(x - 2y)(x^3 + 8y^3)$

10.1 महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor)

क्रियाकलाप 1

दुईपदीय बीजीय अभिव्यञ्जकहरू $x^2 - 4$ र $x^3 - 8$ लिई तल सोधिएका प्रश्नहरूमा समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) दिइएका अभिव्यञ्जकका गुणनखण्ड के के होलान् ?

(ख) तिनीहरूमा साझा गुणनखण्ड के के होलान् ?

(ग) ती साझा गुणनखण्डलाई के भनिन्छ ?

गुणनखण्ड विधिमा क्रमशः निम्नलिखित विधि अपनाउनु पर्छ :

- साझा लिने
- विजीय अभिव्यञ्जकका सूत्रको स्वरूपमा विस्तार गर्ने
- खण्डीकरण गर्ने

यहाँ,		**पहिलो अभिव्यञ्जक** $x^2 - 4$ का गुणनखण्ड $(x + 2)$ र $(x - 2)$ हुन् भने

दोस्रो अभिव्यञ्जक $x^3 - 8$ का गुणनखण्ड $(x - 2)$ र $(x^2 + 2x + 4)$ हुन् ।

साझा गुणनखण्ड भन्नाले दुवै अभिव्यञ्जकमा भएका गुणनखण्ड भन्ने बुझ्नुपर्छ त्यसैले यहाँ साझा गुणनखण्ड $(x - 2)$ छ ।

ती साझा गुणनखण्डलाई नै दिइएको अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक (म.स.) भनिन्छ ।

यहाँ, $(x - 2)$ नै म.स. हो ।

> दिइएका अभिव्यञ्जकको साझा गुणनखण्डको गुणनफललाई तिनीहरूको म.स. (HCF) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

म.स. पत्ता लगाउनुहोस् : $(x^2 - 9)$ र $x^3 + 27$

समाधान

यहाँ,

पहिलो अभिव्यञ्जक $= (x^2 - 9)$

$= (x + 3)(x - 3)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^3 + 27$

$= (x)^3 + (3)^3$

$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

$\therefore$ म.स. = साझा गुणनखण्ड $= (x + 3)$

उदाहरण 2

तल दिइएका अभिव्यञ्जकको म.स. (HCF) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $8x^3 + y^3$ र $16x^4 + 4x^2y^2 + y^4$

(ख) $p^3 - q^3$ र $p^3 + q^3$

(ग) $x^3y + y^4$, $x^4 + x^2y^2 + y^4$, $2x^3 - 2x^2y + 2xy^2$

(घ) $16a^4 - 4a^2 - 4a - 1$, $16a^4 + 16a^3 + 4a^2 - 1$, $16a^4 + 4a^2 + 1$

समाधान

यहाँ,

(क) **पहिलो अभिव्यञ्जक** $= 8x^3 + y^3$

$= (2x)^3 + (y)^3$

$= (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= 16x^4 + 4x^2y^2 + y^4$

$= (4x^2)^2 + (y^2)^2 + 4x^2y^2$

$= (4x^2 + y^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot y^2 + 4x^2y^2$ $[\because a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab]$

$= (4x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$

$= (4x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2$

$= (4x^2 + y^2 + 2xy)\ (4x^2 + y^2 - 2xy)$ $[\because a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)]$

$= (4x^2 + 2xy + y^2)\ (4x^2 - 2xy + y^2)$

अत: म.स.$= (4x^2 - 2xy + y^2)$

(ख) **पहिलो अभिव्यञ्जक** $= p^3 - q^3$

$= (p - q)\ (p^2 + pq + q^2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= p^3 + q^3$

$= (p + q)\ (p^2 - pq + q^2)$

अत: म.स. $= 1$

नोट : दिइएको अभिव्यञ्जकका अन्य साझा गुणनखण्ड नभएकाले म.स. = 1 हुन्छ ।

(ग) **यहाँ पहिलो अभिव्यञ्जक** $= x^3y + y^4$

$= y(x^3 + y^3)$

$= y(x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^4 + x^2y^2 + y^4$

$= (x^2)^2 + (y^2)^2 + x^2y^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + x^2y^2$ $[\because a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab]$

$= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$

$= (x^2 + y^2 + xy)\ (x^2 + y^2 - xy)$ $[\because a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)]$

$= (x^2 + xy + y^2)\ (x^2 - xy + y^2)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= 2x^3 - 2x^2y + 2xy^2$

$= 2x\ (x^2 - xy + y^2)$

अत: म.स. $= (x^2 - xy + y^2)$

(घ) **यहाँ पहिलो अभिव्यञ्जक** $= 16a^4 - 4a^2 - 4a - 1$

$= 16a^4 - (4a^2 + 4a + 1)$

$= 16a^4 - \{(2a)^2 + 2.2a.1 + (1)^2\}$

$= (4a^2)^2 - (2a + 1)^2$

$= (4a^2 + 2a + 1)(4a^2 - 2a - 1)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= 16a^4 + 16a^3 + 4a^2 - 1$

$= (4a^2)^2 + 2 \cdot 4a^2 \cdot 2a + (2a)^2 - 1$

$= (4a^2 + 2a)^2 - (1)^2$

$= (4a^2 + 2a + 1)(4a^2 + 2a - 1)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= 16a^4 + 4a^2 + 1$

$= (4a^2)^2 + (1)^2 + 4a^2$

$= (4a^2 + 1)^2 - 2 \cdot 4a^2 \cdot 1 + 4a^2$

$= (4a^2 + 1)^2 - 4a^2$

$= (4a^2 + 1)^2 - (2a)^2$

$= (4a^2 + 1 + 2a)(4a^2 + 1 - 2a)$

$= (4a^2 + 2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$

अत: म.स. $= 4a^2 + 2a + 1$

उदाहरण 3

तल दिइएका अभिव्यञ्जकका म.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $5m^3 - 20m$, $m^3 - 3m^2 - 10m$, $m^3 - m^2 - 2m + 8$

(ख) $(a - b)^2 + 4ab$, $(a + b)^3 - 3ab(a + b)$, $a^2 + (2a + b)b$

समाधान

यहाँ,

(क) **पहिलो अभिव्यञ्जक** $= 5m^3 - 20m$

$= 5m(m^2 - 4)$

$= 5m\{(m)^2 - (2)^2\}$

$= 5m(m + 2)(m - 2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= m^3 - 3m^2 - 10m$

$= m(m^2 - 3m - 10)$

$= m\{m^2 - (5 - 2)m - 10\}$

$= m\ (m^2 - 5m + 2m - 10)$

$= m\{m(m - 5) + 2(m - 5)\}$

$= m\ (m - 5)\ (m + 2)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= m^3 - m^2 - 2m + 8$

$= m^3 + 8 - m^2 - 2m$

$= (m)^3 + (2)^3 - m(m + 2)$

$= (m + 2)\ (m^2 - 2m + 4) - m(m + 2)$

$= (m + 2)\ (m^2 - 2m + 4 - m)$

$= (m + 2)\ (m^2 - 3m + 4)$

अतः म.स. $= (m + 2)$

(ख) यहाँ,

पहिलो अभिव्यञ्जक $= (a - b)^2 + 4ab$

$= a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$= (a + b)^2$

$= (a + b)\ (a + b)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= (a + b)^3 - 3ab\ (a + b)$

$= (a + b)\ \{(a + b)^2 - 3ab\}$

$= (a + b)\ (a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= a^2 + (2a + b)b$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$= (a + b)^2$

$= (a + b)\ (a + b)$

अतः म.स $= (a + b)$

अभ्यास 10.1

1. (क) बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको म.स. भन्नाले के बुझिन्छ ?

   (ख) कस्तो अवस्थामा बीजीय अभिव्यञ्जकको म.स. 1 हुन्छ ?

   (ग) अभिव्यञ्जकहरू $4x^3y$ र $3z^3$ को साझा गुणनखण्डको गुणनफल कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

2. **तल दिइएका अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक (म.स.) पत्ता लगाउनुहोस् :**

   (क) $(x + y)^2$ र $(x + y)(x - y)$

   (ख) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ र $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

   (ग) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$ र $4xy(2x - 3y)(2x + 3y)$

   (घ) $4a^3b(a - b)(a + b - 1)$ र $16a^2b^2(a + 2b)(a + b - 1)$

3. **तल दिइएका बीजीय अभिव्यञ्जकको म.स. पत्ता लगाउनुहोस् :**

   (क) $a^2 - ab$ र $a^3b - a^2b^2$

   (ख) $3x^2 + 9x$ र $7x + 21$

   (ग) $a^3 + 1$ र $a^4 + a^2 + 1$

   (घ) $8x^3 + 27y^3$ र $16x^4 + 36x^2y^2 + 81y^4$

   (ङ) $m^3 + 1 + 2m^2 + 2m$ र $m^3 - 1$

   (च) $8(6x^4 - x^3 - 2x^2)$ र $12(2x^6 + 3x^5 + x^4)$

   (छ) $a^2 + 4ab + 4b^2 - c^2$ र $a^2 - 4b^2 + ac - 2bc$

   (ज) $x^4 + 4y^4$ र $2x^3y + 4xy^3 + 4x^2y^2$

   (झ) $x^2 - 10x + 24 + 6y - 9y^2$ र $x^2 + 3xy - 6x$

   (ञ) $(1 - x^2)(1 - y^2) + 4xy$ र $1 - 2x + y - x^2y + x^2$

   (ट) $8a^3 + 1$ र $16a^4 - 4a^2 + 4a - 1$

   (ठ) $2a^3 - a^2 + a - 2$ र $a^3 - a^2 + a - 1$

4. **तल दिइएका बीजीय अभिव्यञ्जकको म.स. पत्ता लगाउनुहोस् :**

   (क) $a^3 + b^3$, $a^3 - a^2b + ab^2$ र $a^4 + a^2b^2 + b^4$

   (ख) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $x^3 - 1$ र $x^4 + x^2 + 1$

   (ग) $x^3 - 4x$, $4x^3 - 10x^2 + 4x$ र $3x^4 - 8x^3 + 4x^2$

   (घ) $y^2 + 2y - 8$, $y^2 - 5y + 6$ र $y^2 + 5y - 14$

   (ङ) $x^2 + 2x + 1$, $x^2 + 5x + 6$ र $2x^2 - 5x + 2$

   (च) $x^2 + 2x - 8$, $x^2 - 2x - 24$ र $x^2 + 5x + 4$

(छ) $x^3 + 2x^2 + 4x, x^4 + 4x^2 + 16$ र $x^3 - 8$

(ज) $8x^3 + 27y^3, 16x^4 + 36x^2y^2 + 81y^4$ र $4x^3 - 6x^2y + 9xy^2$

(झ) $2x^3 - 54, 24x^4 + 18x^2 + 162$ र $2x^2 + 6x + 18$

(ञ) $9x^2 - 4y^2 - 8yz - 4z^2, 4z^2 - 4y^2 - 9x^2 - 12xy$ र $9x^2 + 12xz + 4z^2 - 4y^2$

(ट) $2ax^2 + 2ax - 12a, 3a^2x^2 - 7a^2x - 6a^2$ र $a^3x^2 + 4a^3x - 21a^3$

(ठ) $x^3 + 64y^3, x^4 + 16x^2y^2 + 256y^4$ र $4x^3 - 16x^2y + 64y^2x$

(ड) $(a + b)^3 - 3ab(a + b), a^4 + a^2b^2 + b^4$ र $a^4 - a^3b + ab^3 - b^4$

5. तीनओटा आयताकार कोठाहरूको क्षेत्रफल क्रमशः $(x + 3)(x + 6), (x^2 + 8x + 15)$ र $(x^2 + 7x + 12)$ वर्ग एकाइ छन् । उक्त कोठाहरूको चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

2. (क) $x + y$ (ख) $(x^2 + xy + y^2)$
   (ग) $(2x - 3y)$ (घ) $4a^2b(a + b - 1)$
3. (क) $a(a - b)$ (ख) $(x + 3)$
   (ग) $(a^2 - a + 1)$ (घ) $(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
   (ङ) $(m^2 + m + 1)$ (च) $4x^2(2x + 1)$
   (छ) $(a + 2b + c)$ (ज) $(x^2 + 2xy + 2y^2)$
   (झ) $(x + 3y - 6)$ (ञ) $(1 - x + y + xy)$
   (ट) $(4a^2 - 2a + 1)$ (ठ) $a - 1$
4. (क) $(a^2 - ab + b^2)$ (ख) $x^2 + x + 1$
   (ग) $x(x - 2)$ (घ) $(y - 2)$
   (ङ) 1 च) $(x + 4)$
   (छ) $(x^2 + 2x + 4)$ (ज) $(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
   (झ) 2 (ञ) $(3x + 2y + 2z)$
   (ट) a (ठ) $(x^2 - 4xy + 16y^2)$
   (ड) $a^2 - ab + b^2$
5. $(x + 3)$ एकाइ

10.2 लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

क्रियाकलाप 1

प्रत्येक विद्यार्थीले दुई दुईओटा बिजीय अभिव्यञ्जक जस्तैः $x^3 - 125y^3$ र $x^4 - 15x^2y^2 + 25y^4$ लिनुहोस् । ती अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्नुहोस् । त्यसका गुणनखण्ड अवलोकन गर्नुहोस् र तलका प्रश्नहरूमा छलफल गरी समूहमा उत्तर खोज्नुहोस् :

(क) दिइएका अभिव्यञ्जकका साझा गुणनखण्ड के के छन्, लेख्नुहोस् ।

(ख) दिइएका अभिव्यञ्जकका साझाबाहेकका गुणनखण्ड के के छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) साझा गुणनखण्ड र बाँकी गुणनखण्ड गुणन गर्दा प्राप्त हुने नतिजालाई के भनिन्छ ?

(घ) दुईओटा बीजीय अभिव्यञ्जकको गुणनफल तथा ती अभिव्यञ्जकको ल.स र म.स.को गुणनफल पत्ता लगाई अवलोकन गर्नुहोस् र के नतिजा आयो, प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

यहाँ पहिलो प्रश्नमा साझा गुणनखण्ड पत्ता लगाउन दिइएका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर्नुपर्छ । दिइएका अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्दा,

पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^3 - 125y^3$

$= (x)^3 - (5y)^3$

$= (x - 5y)(x^2 + 5xy + 25y^2)$

त्यसैगरी दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^4 + 25x^2y^2 + 625y^4$

$= (x^2)^2 + (25y^2)^2 + 25x^2y^2$

$= (x^2 + 25y^2)^2 - 2\cdot x^2\cdot 25y^2 + 25x^2y^2$

$= (x^2 + 25y^2)^2 - 25x^2y^2$

$= (x^2 + 25y^2)^2 - (5xy)^2$

$= (x^2 + 25y^2 + 5xy)(x^2 + 25y^2 - 5xy)$

$= (x^2 + 5xy + 25y^2)(x^2 - 5xy + 25y^2)$

यसरी दिइएका दुईओटा अभिव्यञ्जकका गुणनखण्ड अवलोकन गर्दा,

साझा गुणनखण्ड $= x^2 + 5xy + 25y^2$

दोस्रो प्रश्नअनुसार साझाबाहेकका गुणनखण्ड $(x - 5y)$ र $(x^2 - 5xy + 25y^2)$ छन् ।

तेस्रो प्रश्नअनुसार साझा गुणनखण्ड र साझाबाहेकका गुणनखण्डको गुणनफल

$= (x^2 + 5xy + 25y^2) \times (x - 5y) \times (x^2 - 5xy + 25y^2)$

$= (x - 5y)\ (x^2 + 5xy + 25y^2)\ (x^2 - 5xy + 25y^2)$

$= (x^3 - 125y^3)\ (x^2 - 5xy + 25y^2)$

साझा गुणनखण्ड र बाँकी गुणनखण्डलाई गुणन गर्दा प्राप्त हुने नतिजालाई ल.स. भनिन्छ ।

दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणनखण्ड र बाँकी गुणनखण्डको गुणनफललाई लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple) भनिन्छ । यसलाई छोटकरीमा ल.स. (L.C.M.) लेखिन्छ ।

अब $(x^3 - 125y^3)$ र $(x^4 + 25x^2y^2 + 625y^4)$ को म.स.$= x^2 + 5xy + 25y^2$

फेरि $(x^3 - 125y^3)$ र $(x^4 + 25x^2y^2 + 625y^4)$ को ल.स.$= (x^3 - 125y^3)\ (x^2 - 5xy + 25y^2)$

$(x^3 - 125y^3)$ र $(x^4 + 25x^2y^2 + 625y^4)$ को म.स. र ल.स. को गुणनफल

$= (x^3 - 125y^3)\ (x^2 - 5xy + 25y^2)\ (x^2 + 5xy + 25y^2)$

$= (x^3 - 125y^3)\ (x^4 + 25x^2y^2 + 625y^4)$

$(x^3 - 125y^3)$ र $(x^4 + 25x^2y^2 + 625y^4)$ को गुणनफल $= (x^3 - 125y^3)\ (x^2 - 5xy + 25y^2)$

यदि दुईओटा अभिव्यञ्जकहरू मात्र भए,
म.स. × ल.स. = पहिलो अभिव्यञ्जक × दोस्रो अभिव्यञ्जक

क्रियाकलाप 2

प्रत्येक विद्यार्थीले तीनओटा बिजीय अभिव्यञ्जकहरू जस्तै : $(x - y)^2 + 4xy$, $(x + y)^3 - 3xy(x + y)$ र $x^2 + 2xy + y^2$ लिनुहोस् । उक्त अभिव्यञ्जकहरूबाट लघुत्तम समापवर्त्य पत्ता लगाई समूहको निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् । जस्तै : एक समूहले प्रस्तुत गरेको कार्य यस प्रकार छ :

पहिलो अभिव्यञ्जक $= (x - y)^2 + 4xy$

$= x^2 - 2xy + y^2 + 4xy$

$= x^2 + 2xy + y^2$

$= (x + y)^2 = (x + y)(x + y)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

$= (x + y)\{(x + y)^2 - 3xy\}$

$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2 - 3xy)$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2 + 2xy + y^2$

$= (x + y)^2$

$= (x + y)(x + y)$

साझा गुणनखण्ड $= (x + y)(x + y)$

बाँकी गुणनखण्ड $= (x^2 - xy + y^2)$

ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड = $(x + y)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

तीनओटा अभिव्यञ्जकमा ल.स पत्ता लगाउँदा कुनै दुईओटा अभिव्यञ्जकमा मात्र साझा गुणनखण्ड भए पनि त्यो साझा गुणनण्ड हुन्छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएका अभिव्यञ्जकबाट लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $a^3 - y^3$ र $a^4 + a^2y^2 + y^4$

(ख) $x^2 - y^2 - 2y - 1$ र $x^2 - 1 + 2xy + y^2$

(ग) $x^4 - 8xy^3$ र $3x^2 - 5xy - 2y^2$

समाधान

यहाँ,

(क) **पहिलो अभिव्यञ्जक** $= a^3 - y^3$

$= (a)^3 - (y)^3 = (a - y)(a^2 + ay + y^2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= a^4 + a^2y^2 + y^4$

$= (a^2)^2 + (y^2)^2 + a^2y^2$

$= (a^2 + y^2)^2 - 2a^2y^2 + a^2y^2$

$= (a^2 + y^2)^2 - a^2y^2$

$= (a^2 + y^2)^2 - (ay)^2$

$= (a^2 + y^2 + ay)(a^2 + y^2 - ay)$

$= (a^2 + ay + y^2)(a^2 - ay + y^2)$

साझा गुणनखण्ड $= (a^2 + ay + y^2)$

बाँकी गुणनखण्ड $= (a - y)(a^2 - ay + y^2)$

अतः लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= (a^2 + ay + y^2) \times (a - y) \times (a^2 - ay + y^2)$

$= (a - y)(a^2 + ay + y^2)(a^2 - ay + y^2)$

(ख) **पहिलो अभिव्यञ्जक** $= x^2 - y^2 - 2y - 1$

$= x^2 - (y^2 + 2y + 1)$

$= (x)^2 - (y + 1)^2$

$= (x + y + 1)(x - y - 1)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2 - 1 + 2xy + y^2$

$= (x^2 + 2xy + y^2) - 1$

$= (x + y)^2 - (1)^2$

$= (x + y + 1)(x + y - 1)$

साझा गुणनखण्ड $= (x + y + 1)$

बाँकी गुणनखण्ड $= (x - y - 1)(x + y - 1)$

∴ ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= (x + y + 1) \times (x - y - 1) \times (x + y - 1)$

$= (x + y + 1)(x - y - 1)(x + y - 1)$

(ग) पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^4 - 8xy^3$

$= x(x^3 - 8y^3) = x\{(x)^3 - (2y)^3\}$

$= x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= 3x^2 - 5xy - 2y^2$

$= 3x^2 - (6 - 1)xy - 2y^2$

$= 3x^2 - 6xy + xy - 2y^2$

$= 3x(x - 2y) + y(x - 2y)$

$= (x - 2y)(3x + y)$

साझा गुणनखण्ड $= (x - 2y)$

बाँकी गुणनखण्ड $= x(x^2 + 2xy + 4y^2)(3x + y)$

$\therefore$ ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= (x - 2y) \times x \times (3x + y) \times (x^2 + 2xy + 4y^2)$

$= x(x - 2y)(3x + y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

उदाहरण 2

तल दिइएका अभिव्यञ्जकको ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $(x^2 + xy + y^2)^3$, $x^3 - y^3$ र $x^4 + x^2y^2 + y^4$

(ख) $8x^3 + 125y^3$, $4x^3 - 10x^2y + 25xy^2$ र $16x^4 + 100x^2y^2 + 625y^4$

(ग) $3y^3 + 14y^2 - 5y$, $y^4 + 125y$ र $y^5 + 25y^3 + 625y$

समाधान

यहाँ,

(क) पहिलो अभिव्यञ्जक $= (x^2 + xy + y^2)^3$

$= (x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^3 - y^3$

$= (x)^3 - (y)^3$

$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= x^4 + x^2y^2 + y^4$

$= (x^2)^2 + (y^2)^2 + x^2y^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - 2.x^2y^2 + x^2y^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$

$= (x^2 + y^2 + xy)\ (x^2 + y^2 - xy)$

$= (x^2 + xy + y^2)\ (x^2 - xy + y^2)$

पहिले साझा गुणनखण्ड $= (x^2 + xy + y^2)$

बाँकी गुणनखण्ड $= (x^2 + xy + y^2)\ (x^2 + xy + y^2)\ (x - y)\ (x^2 - xy + y^2)$

$\therefore$ ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= (x^2 + xy + y^2) \times (x - y) \times (x^2 - xy + y^2) \times (x^2 + xy + y^2) \times (x^2 + xy + y^2)$

$= (x - y)\ (x^2 + xy + y^2)^3\ (x^2 - xy + y^2)$

(ख) **पहिलो अभिव्यञ्जक** $= 8x^3 + 125y^3$

$= (2x)^3 + (5y)^3$

$= (2x + 5y)\ (4x^2 - 10xy + 25y^2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= 4x^3 - 10x^2y + 25xy^2 = x(4x^2 - 10xy + 25y^2)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= 16x^4 + 100x^2y^2 + 625y^4$

$= (4x^2)^2 + (25y^2)^2 + 100x^2y^2$

$= (4x^2 + 25y^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 25y^2 + 100x^2y^2$

$= (4x^2 + 25y^2)^2 - 100\ x^2y^2$

$= (4x^2 + 25y^2)^2 - (10xy)^2$

$= (4x^2 + 25y^2 + 10xy)\ (4x^2 + 25y^2 - 10xy)$

$= (4x^2 + 10xy + 25y^2)\ (4x^2 - 10xy + 25y^2)$

$\therefore$ ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= (4x^2 - 10xy + 25y^2) \times x \times (2x + 5y) \times (4x^2 + 10xy + 25y^2)$

$= x(2x + 5y)\ (4x^2 - 10xy + 25y^2)\ (4x^2 + 10xy + 25y^2)$

(ग) **पहिलो अभिव्यञ्जक** $= 3y^3 + 14y^2 - 5y$

$= y(3y^2 + 14y - 5)$

$= y\{3y^2 + (15 - 1)y - 5\}$

$= y\,(3y^2 + 15y - y - 5)$

$= y\{3y\,(y + 5) - 1(y + 5)\}$

$= y\,(y + 5)\,(3y - 1)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= y^4 + 125y$

$= y(y^3 + 125)$

$= y\{(y)^3 + (5)^3\}$

$= y(y + 5)\,(y^2 - 5y + 25)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= y^5 + 25y^3 + 625y = y(y^4 + 25y^2 + 625)$

$= y\{(y^2)^2 + (25)^2 + 25y^2\}$

$= y\{(y^2 + 25)^2 - 2 \cdot y^2 \cdot 25 + 25y^2\}$

$= y\{(y^2 + 25)^2 - 25y^2\}$

$= y\{(y^2 + 25)^2 - (5y)^2\}$

$= y\{(y^2 + 25 + 5y)\,(y^2 + 25 - 5y)\}$

$= y(y^2 + 5y + 25)\,(y^2 - 5y + 25)$

∴ ल.स.= साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= y \times (y^2 - 5y + 25) \times (y + 5) \times (3y - 1)\,(y^2 + 5y + 25)$

$= y\,(y + 5)\,(3y - 1)\,(y^2 - 5y + 25)\,(y^2 + 5y + 25)$

अभ्यास 10.2

1. (क) ल.स.को परिभाषा लेख्नुहोस् ।

   (ख) दुईओटा अभिव्यञ्जक मात्र दिएको अवस्थामा ती दुई अभिव्यञ्जकसँग म.स. र ल.स.को सम्बन्ध के हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

2. **तल दिइएका अभिव्यञ्जकको लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउनुहोस् :**

   (क) $2x(x + 2)(x - 2)$ र $4x^2(3x + 7)(x - 2)$

   (ख) $3x^2y(x - y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$ र $10x(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

   (ग) $(2x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ र $25xy(2x - y)$

   (घ) $8x^3y^2(a + b + 1)(a - b + 1)$ र $5x^3y(a + b + 1)(a + b + 2)$

3. दुईओटा अभिव्यञ्जकको म.स. र ल.स. क्रमशः $(a + b)^2$ र $3a^2(a + b)(2a + b)$ तथा दोस्रो अभिव्यञ्जक $3a(a + b)^2$ भए पहिलो अभिव्यञ्जक कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. दुईओटा अभिव्यञ्जक क्रमशः $(x + 5)$ र $(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$ तथा म.स. $(x + 5)$ भए ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. **तल दिइएका अभिव्यञ्जकबाट लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउनुहोस् :**

   (क) $x^2 - x + 1$ र $x^4 + x$

   (ख) $4x + 16$ र $5x + 20$

   (ग) $3x + 27$ र $8x^3 + 72x^2$

   (घ) $(x - y)^3$ र $x^3 - y^3$

   (ङ) $(a + b)^3$ र $a^3 + b^3$

   (च) $x^4 + 4$ र $2x^3 - 4x^2 + 4x$

   (छ) $a^4 + a^2 + 1$ र $a^2 - a + 1$

   (ज) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ र $x^3 - y^3$

   (झ) $1 + 4p + 4p^2 - 16p^4$ र $1 + 2p - 8p^3 - 16p^4$

   (ञ) $x^3 + x^2 + x + 1$ र $x^3 - x^2 + x - 1$

   (ट) $y^4 + (2b^2 - a^2)y^2 + b^4$ र $y^3 - ay^2 + b^2y$

   (ठ) $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} + 1$ र $\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}$

6. **तल दिइएका अभिव्यञ्जकबाट लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउनुहोस् :**

   (क) $x^3 + 1$, $x^4 - x^3 + x^2$ र $x^3 - x^2 + x$

   (ख) $a^3 + 1$, $a^4 + a^2 + 1$ र $a^2 + a + 1$

   (ग) $x^2 - 3x + 2$, $x^2 - 5x + 6$ र $x^2 - 8x + 12$

   (घ) $2x^3 + 16$, $x^2 + 4x + 4$ र $x^2 + 3x + 2$

   (ङ) $x^6 - 1$, $x^3 - 1$ र $x^4 + x^2 + 1$

   (च) $x^6 - 16x^4$, $x^5 + 6x^4 + 8x^3$ र $x^4 + 8x^3 + 16x^2$

(छ) $x^4 + 8x^2 + 144$, $x^3 + x(x + 12) + 3x^2$ र $x^3 + 12x + 4x^2$

(ज) $x^4 - 8x^2 + 196$, $x^3 + x(x + 14) + 5x^2$ र $2x^2 + 12x + 28$

(झ) $x^4 + 10x^2 + 169$, $x^3 + 4x^2 + 13x$ र $x^3 + x(x + 13) + 3x^2$

(ञ) $(y + 3)^2 - 9y - 27$, $y^3 - 2y^2 - 15y$ र $y^5 - 13y^3 + 36y$.

7. **तल दिइएका अभिव्यञ्जकको ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $m^2 - 10m + 24 + 6n - 9n^2$, $m^2 + 6mn + 9n^2 - 36$ र $m^2 + 3mn - 6m$

(ख) $x^4 - 8x^2 - 33 - 14y - y^2$, $x^4 + 2x^2y - 9 + y^2$ र $x^3 + xy + 3x$

(ग) $a^4 + b^2(2a^2 - 1) + b^4$, $a^3 - \mathrm{b}(a + 1)(a - b) - b^3$ र $a^3 - b(a - 1)(a - b) - b^3$

उत्तर

2. (क) $4x^2 (x - 2) (x + 2) (3x + 7)$

(ख) $30x^2y (x - y) (x + y) (x^2 + y^2) (x^2 + 3xy + 9y^2)$

(ग) $25xy (2x - y) (x^2 + xy + y^2) (x^2 - xy + y^2)$

(घ) $40x^3y^2 (a + b + 1) (a - b + 1) (a + b + 2)$

3. $a(2a + b) (a + b)$

4. $(x + 5) (x^2 - 5x + 25)$

5. (क) $x(x + 1) (x^2 - x + 1)$ (ख) $20 (x + 4)$ (ग) $24x^2 (x + 9)$

(घ) $(x - y)^3 (x^2 + xy + y^2)$ ङ) $(a + b)^3 (a^2 - ab + b^2)$

(च) $2x (x^2 - 2x + 2) (x^2 + 2x + 2)$

(छ) $(a^2 + a + 1) (a^2 - a + 1)$ ज) $(x - y) (x^2 + xy + y^2) (x^2 - xy + y^2)$

(झ) $(1 + 2p) (1 - 2p) (1 + 2p + 4p^2) (1 + 2p - 4p^2)$

(ञ) $(x + 1) (x - 1) (x^2 + 1)$

(ट) $y (y^2 + ay + b^2) (y^2 - ay + b^2)$

(ठ) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{y^2} - 1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$

6. (क) $x^2 (x + 1) (x^2 - x + 1)$

(ख) $(a + 1) (a^2 - a + 1) (a^2 + a + 1)$

(ग) $(x - 1) (x - 2) (x - 3) (x - 6)$

(घ) $2(x + 2)^2 (x + 1) (x^2 - 2x + 4)$

(ङ) $(x^2 - 1) (x^4 + x^2 + 1)$

(च) $x^4 (x^2 - 16) (x^2 + 6x + 8)$

(छ) $x (x^2 + 4x + 12) (x^2 - 4x + 12)$

(ज) $2x (x^2 + 6x + 14) (x^2 - 6x + 14)$

(झ) $x(x^2 + 4x + 13) (x^2 - 4x + 13)$

(ञ) $y(y^2 - 9) (y^2 - 4) (y - 5) (y - 6)$

7. (क) $m(m + 3n - 6) (m - 3n - 4) (m + 3n + 6)$

(ख) $x(x^2 + y + 3) (x^2 - y - 11) (x^2 + y - 3)$

(ग) $(a - b) (a^2 + b^2 - b) (a^2 + b^2 + b)$

पाठ 11

रेखीय समीकरण
(Linear Equation)

11.0 पुनरवलोकन (Review)

होटलमा एक छाक सादा खाना खानका लागि रु.200 चाहिन्छ । रोनिसले आफूसँग भएको रकममा रु. 50 थप्यो भने उसले एक छाक सादा खाना खान सक्छ । यस भनाइलाई गणितीय भाषामा लेख्दा, x + रु. 50 = रु. 200 हुन्छ भने निम्नलिखित प्रश्नको समूहमा छलफल गरी उत्तर दिनुहोस् :

(क) माथिको गणितीय वाक्यमा चल र अचल राशिहरू कुन कुन हुन् ?

(ख) रोनिससँग सुरुमा कति रहेछ ?

(ग) माथिको गणितीय वाक्यमा दायाँ र बायाँ पक्षलाई कुन चिह्नले जोडेको छ ?

(घ) माथिको गणितीय वाक्यमा x को डिग्री कति छ ?

माथिका प्रश्नको सामूहिक छलफल गरी निम्नानुसारको निष्कर्ष पत्ता लगाउन सकिन्छ :

पहिलो प्रश्नमा, एउटा चल राशि (x) हो भने दुई अचल राशिहरू रु. 50 र रु. 200 हुन् ।

दोस्रो प्रश्नअनुसार रोनिससँग सुरुमा भएको रकम (x) = रु. 200 – रु.50 = रु. 150 रहेछ ।

तेसो प्रश्नअनुसार दायाँ र बायाँ पक्षलाई बराबर (=) चिह्नले जोडेको छ ।

चौथो प्रश्नमा, x को डिग्री 1 छ । माथिको गणितीय वाक्य रेखीय समीकरण हो ।

त्यसैले समीकरण x + रु. 50 = रु. 200 को हल गर्दा x = रु.150 हुन्छ ।

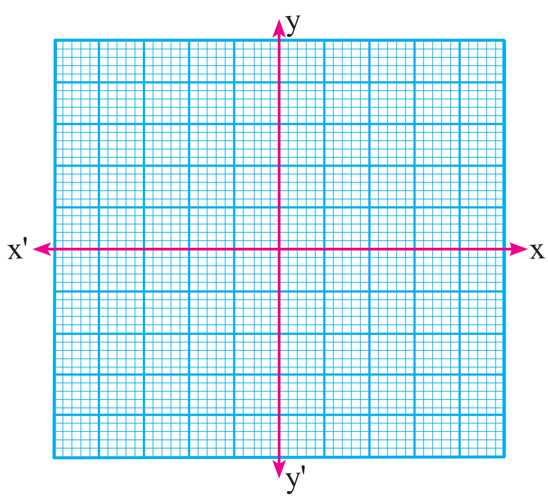
11.1 दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरण
(Simultaneous linear equations with two variables)

क्रियाकलाप 1

दुईओटा दुई चलयुक्त समीकरण लिनुहोस् :

$$5x + 2y = 12, \quad 3x + 4y = 10$$

दुवै समीकरणलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् र दुवै रेखाहरू कुन बिन्दुमा काटिएका छन् ? ती बिन्दुहरूको टिपोट गर्नुहोस् । यो साझा बिन्दु अन्य विधिबाट पनि पत्ता लगाउन सकिएला ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।



यसरी कुनै दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरणको लेखाचित्रबाट हल गर्ने विषयवस्तु हामीले अगिल्ला कक्षामा अध्ययन गरिसकेका छौँ । अब हामी यिनीहरूको अन्य विधिबाट कसरी हल गर्ने भन्नेबारे अध्ययन गर्ने छौँ ।

प्रथम डिग्रीको समीकरणलाई रेखीय समीकरण भनिन्छ । दुवै प्रथम डिग्रीको समीकरण भएकाले ग्राफमा प्रत्येक समीकरणले सरल रेखा दिन्छन् ।
यहाँ पत्ता लगाउनुपर्ने चलहरू x र y का मानहरू दुवै समीकरणलाई मान्य हुन्छ साथै x र y को मान पत्ता लगाउनु नै समीकरणको हल हो ।
यदि दुवै समीकरणहरूका चललाई एउटा निश्चित मान मात्र मान्य हुन्छ भने त्यस्ता समीकरणलाई युगपत रेखीय समीकरण भनिन्छ ।
युगपत रेखीय समीकरणमा दुईओटा चलराशि भएकाले ती समीकरणलाई दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरण पनि भनिन्छ ।

11.2 दुई चलयुक्त रेखीय समीकरण हल गर्ने विधिहरू (Methods of solving simultaneous linear equations with two variable)

क्रियाकलाप 2

मिलन र आशिष्लाई 3 ओटा बल आपसमा बाँड्नु छ, उनीहरूले कति कति पाउलान्, हेरौँ :
यहाँ, मानौँ मिलनले पाउने बलको सङ्ख्या $= x$
आशिष्ले पाउने बलको सङ्ख्या $= y$
अब तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

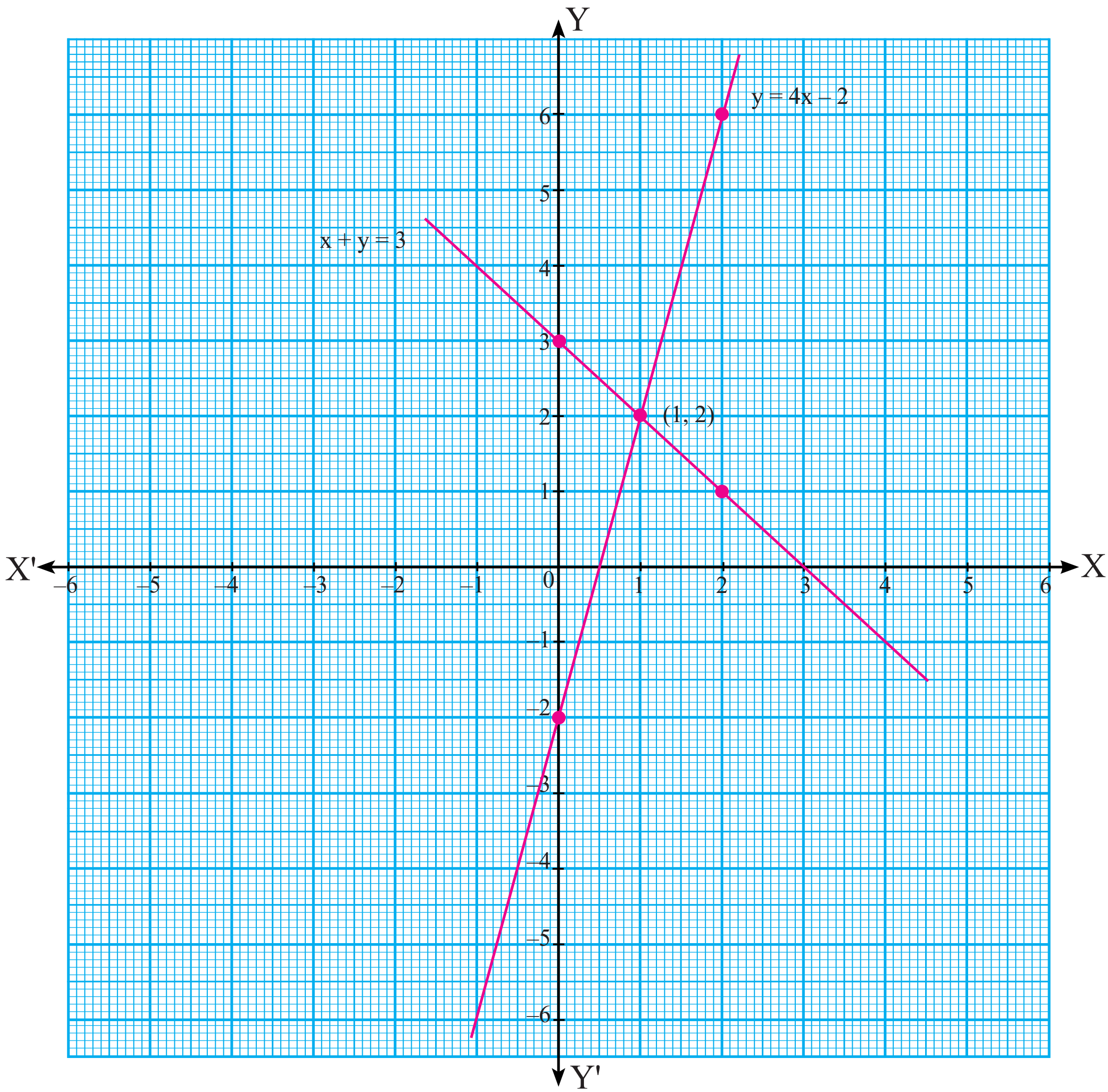
x	3	2	1	0
y	0	1	2	3

माथिको तालिकामा मिलन र आषिले पाउने जम्मा बल सबै अवस्थामा 3 छ ।
तसर्थ $x + y = 3$ ....(i)
यदि मिलनसँग भएको बलको सङ्ख्यालाई 4 ले गुणन गरी 2 घटाउँदा आशिष्सँग भएको बलको सङ्ख्यासँग बराबर हुन्छ भने,

$y = 4x - 2$ .... (ii)

यसलाई तालिकामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

x	1	2	0
y	2	6	–2



अब माथिका दुई समीकरण $x + y = 3$ र $y = 4x - 2$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा बिन्दु (1, 2) मा प्रतिच्छेदन भएका छन् । उक्त बिन्दु (1, 2) नै समीकरण (i) र (ii) को हल हो । किनकि बिन्दु (1, 2) लाई दुवै समीकरणमा प्रतिस्थापन गर्दा मान्य हुन्छ ।

11.2.1 प्रतिस्थापन विधि (Substitution method)

क्रियाकलाप 3

कुनै दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरण लिनुहोस्, जस्तै :

$5x + 2y = 240$........ (i)

$3x + 4y = 200$ .... (ii)

प्रतिस्थापन विधिबाट समाधान गरी चल राशिहरूको मान पत्ता लगाउनका लागि तल सोधिएका प्रश्न समूहमा छलफल गर्नुहोस् र उत्तर दिनुहोस् :

(क) समीकरण (i) बाट x को मान y का रूपमा कति हुन्छ ?

(ख) समीकरण (i) बाट y को मान x का रूपमा कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) समीकरण (i) बाट प्राप्त x को मान समीकरण (ii) को x को ठाउँमा राखी y को मान कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? माथिका प्रश्नमा छलफल गरी निम्नानुसारको निष्कर्ष पत्ता लगाउन सकिन्छ :

यहाँ,

(क) समीकरण (i) बाट x को मान y को मान व्यक्त गर्दा,

$$5x + 2y = 240$$

अथवा, $5x = 240 - 2y$

$x = \dfrac{240 - 2y}{5}$ हुन्छ ।

(ख) त्यसै गरी समीकरण (i) बाट y को मान x का रूपमा व्यक्त गर्दा,

$$2y = 240 - 5x$$

अथवा, $y = \dfrac{240 - 2x}{2}$ हुन्छ ।

(ग) प्रश्न (ग) को लागि तलको उदाहरण हेरौँ :

अब x को मानलाई समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$$3\left(\frac{240 - 2y}{5}\right) + 4y = 200$$

अथवा, $\dfrac{720 - 6y + 20y}{5} = 200$

अथवा, $720 + 14y = 200 \times 5$

अथवा, $14y = 1000 - 720$

अथवा, $14y = 280$

अथवा, $y = \dfrac{280}{14}$

$\therefore y = 20$

अब y को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

अथवा, $3x + 4 \times 20 = 200$

y को मान समीकरण (i) वा (ii) जुनमा प्रतिस्थापन गर्दा पनि हुन्छ, प्रतिस्थापन गर्दा आउने मानमा फरक हुँदैन ।

अथवा, $3x = 200 - 80$

अथवा, $3x = 120$

अथवा, $x = \dfrac{120}{3}$

$x = 40$

नोट : x र y को मानलाई समीकरण (i) र (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा मान्य हुन्छ ।

यसरी हल गर्दा प्राप्त भएको $x = 40$ र $y = 20$ लाई दिइएका समीकरणमा प्रतिस्थापन गरी जाँचेर हेर्दा,

पहिलो समीकरणमा x र y को मान राखेर परीक्षण गर्दा,

$5x + 2y = 240$

अथवा, $5 \times 40 + 2 \times 20 = 240$

अथवा, $200 + 40 = 240$

अथवा, $240 = 240$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

दोस्रो समीकरणमा x र y को मान राखेर परीक्षण गर्दा,

$3x + 4y = 200$

अथवा, $3 \times 40 + 4 \times 20 = 200$

अथवा, $120 + 80 = 200$

अथवा, $200 = 200$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

तसर्थ समाधान गर्दा प्राप्त x र y का प्रत्येक मान दुवै समीकरणमा मान्य छन् ।

> दुई वा सोभन्दा बढी युगपत रेखीय समीकरणमा एउटा समीकरणबाट एउटा चलको मान पत्ता लगाएर दोस्रो समीकरणमा राखेर चलहरूको मान पत्ता लगाउने तरिकालाई प्रतिस्थापन विधि भनिन्छ ।

11.2.2 हटाउने विधि (Elimination method)

क्रियाकलाप 4

विपनाले 4 ओटा साना र 3 ओटा ठुला कापीको जम्मा मूल्य रु. 100 तिरिन्, रमिलाले उस्तै 5 ओटा साना र 2 ओटा ठुला कापीको जम्मा मूल्य रु. 90 तिरिन् भने समूहमा छलफल गरी तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) माथिको तथ्यलाई गणितीय वाक्यमा लेख्नुहोस् ।

(ख) प्रति एकाइ साना र ठुला कापीको मूल्य हटाउने विधिद्वारा कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ग) दिइएको शाब्दिक समस्यालाई समीकरणमा रूपान्तरण गरेपछि दुवै समीकरणका कुनै एक चलराशीको गुणाङ्क एउटै नभएमा एउटै बनाउन सकिन्छ ? कसरी ।

(घ) के यसलाई अर्को विधि (प्रतिस्थापन विधि) बाट पनि समाधान गर्न सकिएला ?

(ङ) के अरू विधिबाट समाधान गर्दा पनि नतिजा एउटै आउँछ ? माथिका प्रश्नमा सामूहिक छलफल गरी निम्नानुसारको निष्कर्ष पत्ता लगाउन सकिन्छ :

पहिलो प्रश्नानुसार,

मानौँ साना कापीको बजार मूल्य प्रतिगोटा रु. x र ठुला कापीको बजार मूल्य प्रतिगोटा रु. y लाई समीकरणका रूपमा लेख्दा,

$4x + 3y = 100$ .... (i)

$5x + 2y = 90$ .... (ii) हुन्छ ।

यहाँ y लाई हटाएर x को मान निकाल्न समीकरण (i) लाई 2 ले र समीकरण (ii) लाई 3 ले गुणन गर्दा,

$[4x + 3y = 100] \times 2$

$8x + 6y = 200$ .... (iii)

र $[5x + 2y = 90] \times 3$

$15x + 6y = 270$ .... (iv)

∵ दुवै समीकरणका कुनै चलराशिको गुणाङ्कलाई निश्चित सङ्ख्याले गुणन गरी एउटै गुणाङ्क बनाइसकेपछि उक्त चलराशि एउटै चिह्नमा भए घटाउने र फरक फरक चिह्नमा भए जोड्ने गर्नुपर्छ ।

समीकरण (iv) बाट समीकरण (iii) घटाउँदा,

$$\begin{array}{r} 15x + \cancel{6y} = 270 \\ 8x + \cancel{6y} = 200 \\ - \quad - \quad - \\ \hline 7x = 70 \end{array}$$

अथवा, $x = \dfrac{70}{7}$

∴ $x = 10$

∵ दुवै समीकरणमा y को गुणाङ्क एउटै सङ्ख्या 6 छ र तिनीहरूको चिह्न पनि फरक छ, त्यसैले y हट्छ र x मात्र बाँकी रहन्छ ।

फेरि x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$5x + 2y = 90$

अथवा, $5 \times 10 + 2y = 90$

अथवा, $2y = 90 - 50$

अथवा, $2y = 40$

$y = \dfrac{40}{2}$

$\therefore \quad y = 20$

अत: साना कापीको मूल्य प्रतिगोटा रु. 10 पर्छ भने ठुला कापीको प्रतिगोटा मूल्य रु. 20 पर्छ ।

यसलाई अर्को विधि (प्रतिस्थापन विधि) बाट पनि समाधान गर्न सकिन्छ ।

जुन विधिबाट समाधान गरे पनि x र y को मान एउटै आउँछ ।

हटाउने विधिबाट समीकरणहरू हल गर्दा, x हटाउने हो भने दुवै समीकरणमा x को गुणाङ्क एउटै बनाउने र y हटाउने हो भने दुवै समीकरणमा y को गुणाङ्क एउटै बनाउनुपर्छ ।

जुन चल हटाउने हो त्यसको गुणाङ्क एउटै बनाएपछि तिनीहरूको चिह्न पनि फरक बनाउनुपर्छ ।

दुई वा दुईभन्दा बढी युगपत रेखीय समीकरणमा एउटा चललाई हटाएर अर्को चलको मान पत्ता लगाउने तरिकालाई हटाउने विधि (Elimination method) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएका जोडा समीकरणको हटाउने विधिद्वारा हल गरी जाँच्नुहोस् :

$11x + 17y - 67 = 0$ र $17x + 11y - 73 = 0$

समाधान

यहाँ दिइएका समीकरण

$11x + 17y - 67 = 0$ .... (i)

$17x + 11y - 73 = 0$ .... (ii)

समीकरण (i) लाई 11 ले समीकरण (ii) लाई 17 ले गुणन गरी समीकरण (i) बाट (ii) घटाउँदा,

$$\begin{array}{r} 121x + \cancel{187y} - 737 = 0 \\ 289x + \cancel{187y} - 1241 = 0 \\ - \quad - \qquad + \quad \\ \hline -168x + 504 = 0 \end{array}$$

अथवा, $-168x = -504$

अथवा, $x = \dfrac{-504}{-168} = 3$

$\therefore x = 3$

फेरि x को मान समीकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$11x + 17y - 67 = 0$

अथवा, $11 \times 3 + 17y - 67 = 0$

अथवा, $33 + 17y = 67$

अथवा, $17y = 67 - 33$

अथवा, $y = \frac{34}{17}$

$\therefore \quad y = 2$

अब $x = 3$ र $y = 2$ राखी जाँचेर हेर्दा

समीकरण (i) बाट,

$$11x + 17y - 67 = 0$$

अथवा, $11 \times 3 + 17 \times 2 - 67 = 0$

अथवा, $33 + 34 - 67 = 0$

अथवा, $67 - 67 = 0$

अथवा, $0 = 0$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

पुनः समीकरण (ii) बाट,

$$17x + 11y - 73 = 0$$

अथवा, $17 \times 3 + 11 \times 2 - 73 = 0$

अथवा, $51 + 22 - 73 = 0$

अथवा, $73 - 73 = 0$

$0 = 0$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

x र y का मान दुवै समीकरणलाई मान्य हुन्छ, त्यसैले x र y को मान ठिक छ ।

अभ्यास 11.1

1. तल दिइएका जोडा युगपत रेखीय समीकरणलाई प्रतिस्थापन विधिद्वारा हल गर्नुहोस् :

(क) $3x + 5y = 31$ र $2x - y = 12$

(ख) $5x + 6y = 27$ र $3x + 4y = 17$

(ग) $3x - 2y = 11$ र $x + 3y = 11$

(घ) $3x - 2y = 8$ र $x + 2y = 8$

(ङ) $4x - 3y + 1 = 0$ र $3x + 2y - 12 = 0$

(च) $5x - y + 1 = 0$ र $2x - 5y + 51 = 0$

(छ) $9x - 8y = 12$ र $2x + 3y = 17$

(ज) $y = 5x - 23$ र $3x - 2y = 4$

(झ) $2x - y = 7$ र $x + y = 5$

(ञ) $3x + 2y = 15$ र $5x - 3y - 25 = 0$

2. तल दिइएका जोडा युगपत रेखीय समीकरणलाई हटाउने विधिद्वारा हल गरी जाँच्नुहोस् :

(क) $x + y = 16$, $x - y = -4$

(ख) $3x - 2y = 4$, $5x - y = 23$

(ग) $5x - 2y = 2$, $2x + 3y = 16$

(घ) $2x + 5y + 7 = 0$, $2x - 2y = 14$

(ङ) $9x - 8y = 12$, $2x + 3y = 17$

(च) $3x + 4y = 17$, $5x + 6y = 27$

(छ) $7x + 8y = -1$, $10x + 15y = -5$

(ज) $4x - 16 = 3y$, $5y = 12 - 3x$

(झ) $3x - 3y + 6 = 0$, $4y - 2 - 2x = 0$

(ञ) $3x = 4y + 18$, $5x = 7y + 31$

3. तल दिइएका जोडा युगपत रेखीय समीकरणलाई हल गर्नुहोस् :

(क) $3x + 4y = 2$, $5x + 3y + 4 = 0$

(ख) $2x + 5y = 120$, $8x - 9y + 100 = 0$

(ग) $\frac{6x}{5} + \frac{7y}{5} = 1$, $\frac{7x}{3} + \frac{8y}{3} = 2$

(घ) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6$, $\frac{3x}{8} + 1 = \frac{2y}{3}$

उत्तर

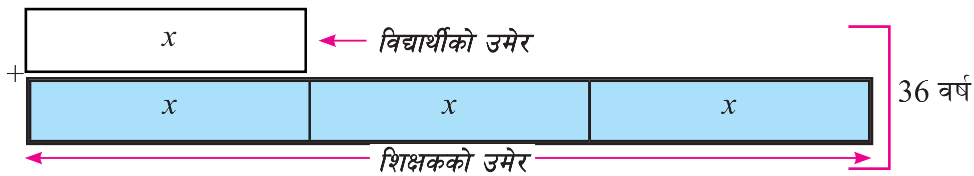
1. (क) $x = 7, y = 2$ (ख) $x = 3, 2, y = 2$ (ग) $x = 5, y = 2$
   (घ) $x = 4, y = 2$ (ङ) $x = 2, y = 3$ (च) $x = 2, y = 11$
   (छ) $x = 4, y = 3$ (ज) $x = 6, y = 7$ (झ) $x = 4, y = 1$
   (ञ) $x = 5, y = 0$
2. (क) $x = 6, y = 10$ (ख) $x = 6, y = 7$ (ग) $x = 2, y = 4$
   (घ) $x = 4, y = -3$ (ङ) $x = 4, y = 3$ (च) $x = 3, y = 2$
   (छ) $x = 1, y = -1$ (ज) $x = 4, y = 0$ (झ) $x = -3, y = -1$
   (ञ) $x = 2, y = -3$
3. (क) $x = -2, y = 2$ (ख) $x = 10, y = 20$ (ग) $x = 2, y = -1$
   (घ) $x = 8, y = 6$

11.2.3 युगपत रेखीय समीकरणसम्बन्धी शाब्दिक समस्या (Word problems related to simultaneous equation)

क्रियाकलाप 1

एक जना शिक्षक र एक जना विद्यार्थीको अहिलेको उमेरको योगफल 36 वर्ष छ । शिक्षकको अहिलेको उमेर विद्यार्थीको उमेरको तीन गुणा छ भने उनीहरूको हालको उमेर कति कति छ ? समूहमा छलफल गरी समाधानसहितको निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

एउटा समूहले प्रस्तुत गरेको निष्कर्ष यसप्रकार छ :



$4x = 36$

$x = \dfrac{36}{4}$

$x = 9$

त्यसैले विद्यार्थीको उमेर $(x) = 9$ वर्ष

शिक्षकको उमेर $(3x) = 3 \times 9 = 27$ वर्ष

अत: शिक्षकको हालको उमेर $= 27$ वर्ष

विद्यार्थीको हालको उमेर $= 9$ वर्ष

दोस्रो समूहले प्रस्तुत गरेको निष्कर्ष (अर्को तरिका)

मानौँ शिक्षकको अहिलेको उमेर $= x$ वर्ष

विद्यार्थीको अहिलेको उमेर $= y$ वर्ष

पहिलो सर्तअनुसार,

$x + y = 36$

$x = 36 - y$ .... (i)

दोस्रो सर्तअनुसार,

$x = 3y$ .... (ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$36 - y = 3y$

अथवा, $36 = 4y$

अथवा, $y = \frac{36}{4}$

$\therefore\ y = 9$

y को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$x = 3 \times 9 = 27$

अतः शिक्षकको अहिलेको उमेर = 27 वर्ष

विद्यार्थीको अहिलेको उमेर = 9 वर्ष

तेस्रो समूहले प्रस्तुत गरेको निष्कर्ष

मानौँ विद्यार्थीको हालको उमेर = x वर्ष

शिक्षकको हालको उमेर = $3x$ वर्ष

प्रश्नअनुसार,

$x + 3x = 36$

अथवा, $4x = 36$

अथवा, $x = \frac{36}{4}$

$x = 9$

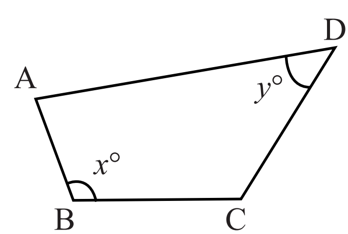
अतः विद्यार्थीको अहिलेको उमेर = 9 वर्ष

शिक्षकको अहिलेको उमेर = 3 × 9 वर्ष = 27 वर्ष

उदाहरण 1

एउटा चतुर्भुजमा कुनै दुई सम्मुख कोणको योग 150° र तिनीहरूको फरक 48° छ भने कोणको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान



यहाँ मानौँ सम्मुख कोण x र y छन् । (चित्रको प्रयोगबाट)

पहिलो सर्तअनुसार, $x + y = 150°$

$x = 150° - y$ .... (i)

दोस्रो सर्तअनुसार,

$x - y = 48°$ ... (ii) [$\because x > y$ भएको अवस्थामा]

समीकरण (i) बाट x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$150° - y - y = 48°$

अथवा, $150° - 2y = 48°$

अथवा, $150° - 48° = 2y$

अथवा, $102° = 2y$

$$y = \frac{102°}{2} = 51°$$

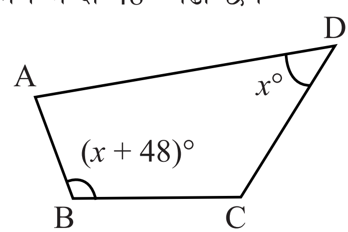
y को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$$x = 150° - 51° = 99°$$

अतः उक्त कोणहरू 99° र 51° हुन् ।

वैकल्पिक तरिका

दुईओटा कोणको फरक 48° छ भन्नुको अर्थ एउटा कोण अर्को कोण भन्दा 48° बढी छ ।



अथवा, $x + 48 + x = 150$

अथवा, $2x = 150 - 48$

अथवा, $x = 51°$

त्यसैले एउटा कोण $= x = 51°$

अर्को कोण $= x + 48 = 51 + 48 = 99°$

उदाहरण 2

मनिष र सीमाले कक्षा 9 को सुरुमा उत्रै र उस्तै कापी बराबर सङ्ख्यामा किनेका थिए । कक्षा 9 पूरा गर्दा मनिष र सीमाले क्रमशः 25 र 31 ओटा कापी सिध्याउँदा मनिषसँग बाँकी भएका कापीको सङ्ख्या सीमासँग बाँकी भएका कापी सङ्ख्याको दुई गुणा हुन्छ भने सुरुमा तिनीहरूसँग कति कतिओटा कापी रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ,

मानौँ मनिषसँग सुरुमा भएका कापी सङ्ख्या $= x$

सीमासँग सुरुमा भएका कापी सङ्ख्या $= y$

पहिलो सर्तअनुसार,

$x = y$ .... (i)

दोस्रो सर्तअनुसार,

$x - 25 = 2(y - 31)$

अथवा, $x - 25 = 2y - 62$

अथवा, $x = 2y - 62 + 25$

$x = 2y - 37$ .... (ii)

समीकरण (i) बाट x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$y = 2y - 37$

अथवा, $37 = 2y - y$

अथवा, $y = 37$

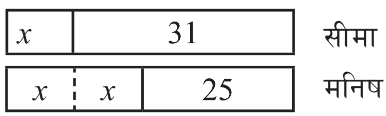
y को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$x = 37$

अतः सीमासँग सुरुमा भएका कापी सङ्ख्या $= 37$

मनिषसँग सुरुमा भएका कापी सङ्ख्या $= 37$

नमुना चित्रण विधिबाट समाधान गर्दा,



$x + 25 = 31$

अथवा, $x = 31 - 25$

अथवा, $x = 6$

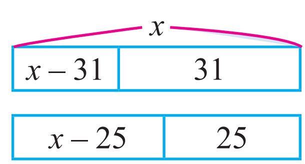
अतः सीमासँग सुरुमा भएका कापी सङ्ख्या $x + 31 = 6 + 31 = 37$ ओटा

मनिषसँग सुरुमा भएका कापी सङ्ख्या $= 37$ ओटा

वैकल्पिक तरिका

मानौँ सीमा र मनिषसँग सुरुमा भएको कापी सङ्ख्या = x

सीमाले 25 ओटा र मनिषले 31 ओटा कापी खर्च गरेपछिको अवस्था,



अब $2(x - 31) = x - 25$

अथवा, $2x - 62 = x - 25$

अथवा, $2x - x = 62 - 25$

अथवा, $x = 37$

अतः सीमा र मनिषसँग सुरुमा भएका कापीको सङ्ख्या $= 37$ ओटा

उदाहरण 3

अहिले आमाको उमेर छोराको उमेरको 3 गुणा छ । 12 वर्षपछि आमाको उमेर छोराको उमेरको दुई गुणाभन्दा 1 ले कम हुन्छ भने उनीहरूको अहिलेको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ मानौँ आमाको अहिलेको उमेर = x वर्ष

छोराको अहिलेको उमेर = y वर्ष

पहिलो सर्तअनुसार,

$x = 3y$ .... (i)

दोस्रो सर्तअनुसार,

$x + 12 = 2(y + 12) – 1$

अथवा, $x + 12 = 2y + 24 – 1$

अथवा, $x = 2y + 23 – 12$

अथवा, $x = 2y + 11$ ..... (ii)

समीकरण (i) बाट x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$3y = 2y + 11$

अथवा, $3y – 2y = 11$

$\therefore y = 11$

फेरि y को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$x = 3y = 3 \times 11 = 33$

अतः आमाको अहिलेको उमेर $(x) = 33$ वर्ष

छोराको अहिलेको उमेर $(y) = 11$ वर्ष

वैकल्पिक तरिका

छोराको उमेर = x वर्ष

आमाको उमेर = $3x$ वर्ष

दोस्रो सर्तअनुसार

$\{(x + 12) \times 2\}– 1 = 3x + 12$

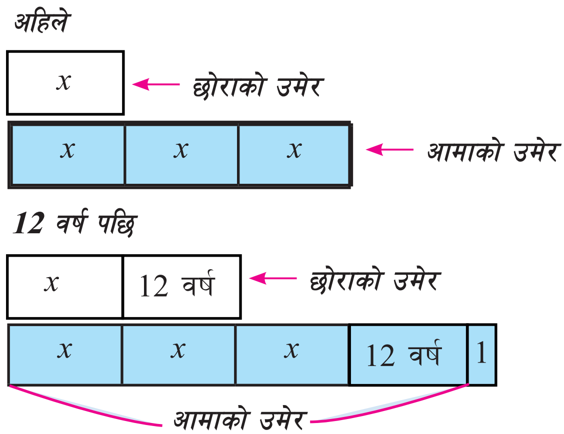
अथवा, $2x + 23 = 3x + 12$

$\therefore x = 11$

छोराको उमेर = 11 वर्ष

आमाको उमेर = 33 वर्ष

वैकल्पिक तरिका



प्रश्नमा 12 वर्षपछि आमाको उमेर छोराको उमेरको दुई गुणाभन्दा 1 ले कम हुन्छ भनेकाले आमाको उमेरमा 1 थप्दा दुई गुणा हुन्छ ।

अब $2(x + 12) = 3x + 12 + 1$

अथवा, $2x + 24 = 3x + 13$

अथवा, $x = 11$

अत: छोराको अहिलेको उमेर $= x = 11$ वर्ष

आमाको अहिलेको उमेर $= 3x = 3 \times 11 = 33$ वर्ष

उदाहरण 4

एउटा भिन्नको अंशलाई 4 ले गुणन गरी हरबाट 2 घटाउँदा नतिजा 2 हुन्छ । यदि सो भिन्नको अंशमा 15 जोडी हरको दोब्बरबाट 2 घटाइयो भने नतिजा $\frac{9}{7}$ हुन्छ, भने सो भिन्न पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ मानौं आवश्यक भिन्न $\frac{x}{y}$ छ, जहाँ x भिन्नको अंश हो भने y हर हो ।

पहिलो सर्तअनुसार,

$$\frac{x \times 4}{y - 2} = 2$$

अथवा, $4x = 2(y - 2)$

अथवा, $x = \frac{2(y-2)}{4}$

अथवा, $x = \frac{y-2}{2}$ .... (i)

दोस्रो सर्तअनुसार,

$$\frac{x+15}{2y-2} = \frac{9}{7}$$

अथवा, $7(x + 15) = 9(2y - 2)$

अथवा, $7x + 105 = 18y - 18$

अथवा, $7x = 18y - 18 - 105$

अथवा, $7x = 18y - 123$

$$x = \frac{18y - 123}{7} \text{ .... (ii)}$$

समीकरण (i) बाट x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$$\frac{y-2}{2} = \frac{18y-123}{7}$$

अथवा, $7y - 14 = 36y - 246$

अथवा, $246 - 14 = 36y - 7y$

अथवा, $232 = 29y$

अथवा, $y = \frac{232}{29} = 8$

y को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$$x = \frac{y-2}{2} = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

अतः आवश्यक भिन्न $= = \frac{x}{y} = \frac{3}{8}$

उदाहरण 5

दुई अङ्कले बनेको एउटा सङ्ख्यामा एकको स्थानमा रहेको अङ्क दशको स्थानमा रहेको अङ्कको 3 गुणा छ । उक्त सङ्ख्याको अङ्कको स्थान बदल्दा बन्ने सङ्ख्या र सुरुको सङ्ख्याको योगफल 88 छ भने सुरुको सङ्ख्या कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ,

मानौँ दुई अङ्कले बनेको सङ्ख्या $= 10x + y$ छ जहाँ x र y क्रमशः दशको स्थान र एकको स्थानमा रहेका अङ्क हुन् ।

पहिलो सर्तअनुसार,

$$3x = y$$

अथवा, $y = 3x$ .... (i)

दोस्रो सर्तअनुसार,

$$(10x + y) + (10y + x) = 88$$

अथवा, $10x + y + 10y + x = 88$

अथवा, $11x + 11y = 88$

अथवा, $11(x + y) = 88$

अथवा, $x + y = 8$ .... (ii)

समीकरण (i) बाट x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

अथवा, $x + 3x = 8$

अथवा, $4x = 8$

अथवा, $x = \frac{8}{4} = 2$

x को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$y = 3x = 3 \times 2 = 6$

अतः सुरुको सङ्ख्या $= 10x + y = 10 \times 2 + 6 = 26$ हुन्छ ।

वैकल्पिक तरिका

सुरुको सङ्ख्या र अङ्कको स्थान बदल्दा बन्ने सङ्ख्याको योगफल 88 हुन्छ ।

ती सङ्ख्याहरू, 17 र 71, 26 र 62, 35 र 53 तथा 44 र 44 हुन सक्छन् ।

पहिलो सर्तअनुसार,

एकको स्थानमा रहेको अङ्क दशको स्थानमा रहेको अङ्कको 3 गुणा हुन्छ भन्दा 26 एक मात्र ठिक विकल्प हुन्छ ।

त्यसैले आवश्यक सङ्ख्या = 26 हुन्छ ।

उदाहरण 6

6 kg स्याउ र 5 kg आँपको जम्मा मूल्य रु. 560 पर्छ । त्यसै गरी 9 kg स्याउ र 7 kg आँपको जम्मा मूल्य रु. 820 पर्छ । 1 kg स्याउ र 1 kg आँपको छुट्टाछुट्टै मूल्य कति पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ,

1 kg स्याउको मूल्य रु. x र 1 kg आँपको मूल्य रु. y मानौँ,

पहिलो सर्तअनुसार,

$6x + 5y = 560$ .... (i)

दोस्रो सर्तअनुसार,

$9x + 7y = 820$ .... (ii)

समीकरण (i) लाई 3 ले र समीकरण (ii) लाई 2 ले गुणन गरी (i) बाट (ii) घटाउँदा,

$$\begin{array}{r} 18x + 15y = 1680 \\ 18x + 14y = 1640 \\ - \quad - \qquad - \\ \hline y = 40 \end{array}$$

फेरि y को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$6x + 5y = 560$

अथवा, $6x + 5 \times 40 = 560$

अथवा, $6x = 560 - 200$

अथवा, $x = \frac{360}{6} = 60$

त्यसैले 1 kg स्याउको मूल्य रु. 60 र 1 kg आँपको मूल्य रु. 40 पर्छ ।

उदाहरण 7

एउटा विद्यालयको निबन्ध प्रतियोगितामा केही सङ्ख्यामा विजेताहरू घोषित गरिने नियम बनाइएको छ । त्यस प्रतियोगितामा 63 जनाको सहभागिता रहेको छ । उक्त प्रतियोगितामा प्रत्येक विजेताले रु. 100 पाउँछन् भने सहभागी प्रत्येकले रु. 25 प्राप्त गर्छन् । वितरण गरिएको कुल रकम रु. 3000 हो भने जम्मा विजेता र सहभागी मात्र हुनेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ,

जम्मा विजेताको सङ्ख्या x र सहभागी मात्र हुनेको सङ्ख्या y मानौँ

पहिलो सर्तअनुसार,

$x + y = 63$

$x = 63 - y$ .... (i)

दोस्रो सर्तअनुसार,

$100x + 25y = 3000$ ... (iii)

समीकरण (i) बाट x को मान समीकरण (ii) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$100(63 - y) + 25y = 3000$

अथवा, $6300 - 100y + 25y = 3000$

अथवा, $6300 - 3000 = 75y$

अथवा, $3300 = 75y$

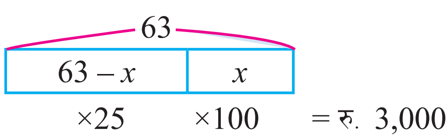
$$y = \frac{3300}{75} = 44$$

y को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$x = 63 - 44 = 19$

अत: जम्मा विजेताको सङ्ख्या 19 र सहभागी मात्र हुनेको सङ्ख्या 44 हुन्छ ।

वैकल्पिक तरिका



$25(63 - x) + 100x = 3,000$

अथवा, $1575 - 25x + 100x = 3,000$

अथवा, $75x = 3,000 - 1,575$

अथवा, $75x = 1,425$

अथवा, $x = 19$

अत: जम्मा विजेताको सङ्ख्या $= x = 19$

सहभागी मात्र हुनेको सङ्ख्या $= 63 - x = 63 - 19 = 44$

अभ्यास 11.2

1. (क) दुई धनात्मक सङ्ख्या x र y को योगफलको 3 गुणाभन्दा 1 ले बढीलाई कसरी लेखिन्छ ?

(ख) राम र सीताको हालको उमेर x वर्ष र y वर्ष भए 10 वर्षपछि तिनीहरूको उमेर कति कति होला, लेख्नुहोस् ।

(ग) दुई दाजुभाइको अहिलेको उमेर 15 वर्ष र 11 वर्ष छ । 'm' वर्ष पहिले तिनीहरूको उमेर कति कति थियो, लेख्नुहोस् ।

(घ) y र x क्रमशः एक स्थान र दश स्थानमा भएका दुई अङ्कका सङ्ख्यालाई केले जनाइन्छ ? साथै उक्त सङ्ख्याको विपरीत सङ्ख्या पनि लेख्नुहोस् ।

2. दुईओटा धनात्मक सङ्ख्याको योगफल 128 र तिनीहरूको फरक 16 छ भने ती सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा सङ्ख्या अर्को सङ्ख्याको 5 गुणा छ । तिनीहरूको योगफल 72 छ भने ती सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा त्रिभुजमा भएका दुईओटा न्यूनकोणहरूको योगफल 105° र फरक 15° छ भने ती कोणको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. विशाल र सुमिताले एउटै मूल्य पर्ने बराबर सङ्ख्यामा चकलेट किनेका थिए । एकछिन पछि विशाल र सुमिताले क्रमशः 5 र 12 ओटा चकलेट खाइसकेपछि विशालसँग बाँकी भएका चकलेटको सङ्ख्या सुमितासँग बाँकी रहेका सङ्ख्याको 2 गुणाभन्दा 2 ले कम हुन्छ । सुरुमा उनीहरूसँग कति कति चकलेट थिए, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. पाँच वर्षअघि बुबाको उमेर छोराको उमेरको 5 गुणा थियो । अहिले बुबा र छोराको उमेर जोड्दा 46 वर्ष छ भने बुबा र छोराको अहिलेको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. 15 वर्षअघि बुबाको उमेर उसको छोरीको उमेरको चार गुणा थियो । यदि 5 वर्षपछि बुबाको उमेर छोरीको उमेरको 2 गुणा हुने छ भने तिनीहरूको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एक वर्षपछि आमाको उमेर उसको छोराको उमेरको चार गुणा हुने छ । दुई वर्ष अघि आमाको उमेर छोराको 4 वर्षपछि हुने उमेरको तीन गुणा थियो भने तिनीहरूको हालको उमेर कति कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. तीन वर्षअघि रमेश र निमेशको उमेरको अनुपात 4:3 थियो । तीन वर्षपछि तिनीहरूको उमेरको अनुपात 11:9 हुने छ भने तिनीहरूको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. 10 वर्षअघि बुबाको उमेर र छोराको उमेरको अनुपात 11:3 थियो । 5 वर्षपछि बुबाको उमेर छोराको उमेरको 2 गुणाभन्दा 10 वर्ष बढी हुने छ । छोराको उमेर कति वर्षमा अहिलेको बुबाको उमेर बराबर हुने छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. एउटा भिन्नको अंश र हरको योगफल हरको 2 गुणाभन्दा 3 ले कम छ । यदि अंश र हरबाट 1 घटाउँदा अंश हरको आधा हुन्छ भने सो भिन्न पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. दुई अङ्कको कुनै सङ्ख्या त्यसका अङ्कको योगफलको तीन गुणा छ । यदि सो सङ्ख्यामा 45 जोड्यो भने अङ्कको स्थान बदलिन्छ भने सुरुको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. दुई अङ्कको एउटा सङ्ख्या छ । यदि अङ्कको स्थान बदल्दा बन्ने सङ्ख्या उक्त सङ्ख्यामा जोड्दा योगफल 121 हुन्छ र सोही सङ्ख्या घटाउँदा 27 बाँकी हुन्छ भने उक्त सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. 10 र 100 का बिचमा पर्ने एउटा सङ्ख्यामा अङ्कको योगफल 9 छ । यदि सो सङ्ख्यालाई 7 ले गुणा गरियो भने अङ्कको स्थान बदल्दा बन्ने सङ्ख्याको चार गुणा हुन्छ । उक्त सङ्ख्याका अङ्क प्रतिशतमा तुलना गर्नुहोस् ।

15. 5 kg प्याज र 7 kg चिनीको जम्मा मूल्य रु. 810 पर्छ । यदि 5 kg प्याजको मूल्य बराबर 2 kg चिनकिो मूल्य छ भने 1 kg प्याज र 1 kg चिनीको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।

16. एउटा गाउँपालिकाले सरकारी जग्गाबाट विद्यालयको लागि आयताकार जग्गा छुट्याएको छ । सो जग्गाको लम्बाइ र चौडाइको अनुपात 11:4 छ । उक्त जग्गाको चारैतिर तारले एक फन्को लगाउँदा एक मिटरको रु. 100 का दरले गाउँपालिकाको जम्मा रु. 75,000 खर्च हुन्छ । सो जग्गाको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

17. कुनै विद्यालयको खेलमैदानको चौडाइ लम्बाइको एक तिहाइ छ । यदि उक्त आयताकार खेल मैदानको परिमिति 32 मिटर भए सो खेलमैदानको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

18. समृद्धिले रु. 2,000 को रु. 50 र रु. 100 का नयाँ नोट सटही गर्न नेपाल राष्ट्र बैङ्कमा गइन् । बैङ्कले जम्मा 25 ओटा नोट दियो भने रु. 50 र रु. 100 का कति कतिओटा नोट लिएर आइन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

आफ्नो घरबाट नजिकको पसलमा गई कुनै दुईओटा दैनिक उपभोग्य सामानको आधा दर्जन वा एक दर्जन वा एक कार्टुन (बक्स) पुरै किन्दा मूल्य कति पर्छ सोध्नुहोस्। उक्त मूल्यका आधारमा युगपत रेखीय समीकरण बनाई ती सामानको एकाइ मूल्य पत्ता लगाउनुहोस्। साथै धेरै सामान किन्दाको एकाइ मूल्य र एउटा मात्र सामान अथवा, 1 kg सामान किनेको अवस्थामा मूल्यमा के कति फरक पाउनुहुन्छ ? यस आधारमा प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस्।

उत्तर

1. (a) $3(x + y) + 1$ (b) $(x + 10)$ वर्ष र $(y + 10)$ वर्ष
   (c) $(15 - m)$ वर्ष र $(11 - m)$ वर्ष (d) $10x + y$, $10y + x$
2. 72, 56
3. 12, 60
4. 60, 45
5. 21, 21
6. 35 वर्ष, 11 वर्ष
7. 55 वर्ष, 25 वर्ष
8. 47 वर्ष, 11 वर्ष
9. 19 वर्ष, 15 वर्ष
10. 40 वर्ष
11. $\frac{4}{7}$
12. 27
13. 74
14. 100 % ठुलो वा 50% सानो
15. प्याज रु. 36 प्रति kg चिनी रु. 90 प्रति kg
16. 275 *m*, 100 *m*
17. 12 *m*, 4 *m*
18. रु. 50 का 10 र रु. 100 का 15 ओटा

पाठ 12 घाताङ्क (Indices)

12.0 पुनरवलोकन (Review)

पृथ्वी र सूर्यबिचको दुरी करिब 1,49,60,00,00,000 km छ। त्यसै गरी प्रकाशको गति 30,00,00,000 मिटर/सेकेन्ड छ । यी तथ्यका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) पृथ्वी र सूर्यबिचको दुरीलाई छोटो रूपमा कसरी लेखिन्छ ?

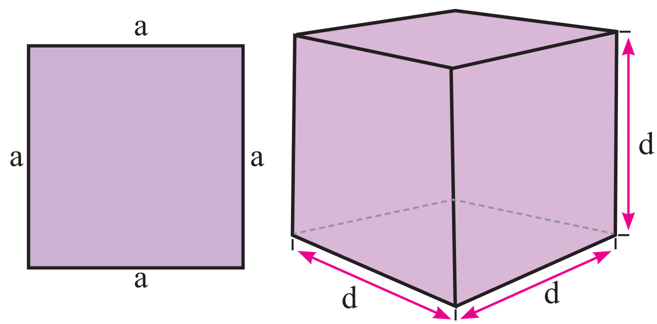
(ख) प्रकाशको गतिलाई छोटो रूपमा कसरी व्यक्त गरिन्छ ?

(ग) छोटो रूपमा लेख्दा सङ्ख्याको कुन ढाँचामा लेखिन्छ ?

12.1 घाताङ्क (Indices)

क्रियाकलाप 1

उपयुक्त सङ्ख्यामा समूह निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहले एउटा वर्गाकार कार्डबोर्ड र घनाकार वस्तु लिनुहोस् र तल सोधिएका प्रश्नमा समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् :



(क) वर्गाकार कार्डबोर्डको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

(ख) घनाकार वस्तुको आयतन कति हुन्छ ? कसरी निकालिन्छ ?

(ग) (क) र (ख) मा प्राप्त क्षेत्रफल र आयतनमा आधार र घाताङ्क छुट्याउनुहोस् ।

वर्गाकार कार्डबोर्डको क्षेत्रफल = $a \times a = a^2$ हुन्छ । यहाँ a लाई आधार (base) र 2 लाई घाताङ्क (Index) भनिन्छ । त्यसै गरी घनाकार वस्तुको आयतन = $d \times d \times d = d^3$ हुन्छ । जहाँ d आधार (base) हो भने 3 घाताङ्क (Index) हो ।

एउटै सङ्ख्या वा चललाई सोही सङ्ख्या वा चलले दुई वा सोभन्दा बढी पटक गुणन गर्दा उक्त गुणनलाई छोटकरीमा घाताङ्कको प्रयोग गरिन्छ । त्यसै गरी a लाई n पटकसम्म गुणन गरेमा,

$a \times a \times a \times \ldots$ (n पटक) = a^n हुन्छ ।

12.2 घाताङ्कका नियम (Laws of indices)

(क) **घाताङ्कको गुणन नियम (Multiplication Law of indices)**

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ जहाँ m र n

(ख) **घाताङ्कको भाग नियम (Division law of Indices)**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ जहाँ } m > n$$

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ जहाँ } n > m$$

(ग) **घाताङ्कको पनि घाताङ्क नियम (Power law of indices)**

$$(a^m)^n = a^{m \times n}, (ab)^m = a^m b^m, \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

(घ) **ऋणात्मक घाताङ्कको नियम (Law of Negative Indices)**

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ अथवा } a^m = \frac{1}{a^{-m}}$$

(ङ) **शून्य घाताङ्कको नियम (Law of zero index)**

$a^\circ = 1$ $b^\circ = 1, x^\circ = 1, (abx)^\circ = 1$ जहाँ $a \neq 0, b \neq 0, x \neq 0$

(च) **घाताङ्कको मूल नियम (Root law of indices)**

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

12.3 घाताङ्कसम्बन्धी समस्याको सरलीकरण (Simplification of problems related to indices)

क्रियाकलाप 2

तल सोधिएका प्रश्नमा छलफल गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस्:

(क) 10^4 र $\frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10}$ मा के फरक छ ?

(ख) के $(6)^3$ र $(6)^{-3}$ को मान एउटै हुन्छ ?

(ग) के $\sqrt[3]{64}$ र $\sqrt{64}$ ले एउटै मान दिन्छ ?

पहिलो प्रश्नअनुसार 10^4 मा आधार 10 र 4 घाताङ्क हो। $\frac{1}{10^4} = 10^{-4}$ मा आधार 10 र -4 घाताङ्क हो।

दोस्रो प्रश्नअनुसार $(6)^3 = 216$ र $6^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ हुन्छ, त्यसैले एउटै मान हुँदैन।

तेस्रो प्रश्नअनुसार $\sqrt[3]{64} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4$ र $\sqrt{64} = (8^2)^{\frac{1}{2}} = 8$ हुन्छ।

त्यसैले तिनीहरूको मान बराबर हुँदैन।

> $a^m \neq 0$ को लागि $a^m \neq \frac{1}{a^m}$ त्यसै गरी a^m र $(a)^{-m}$ ले दिने नतिजा फरक हुन्छ। $\sqrt[n]{a^m}$ र $\sqrt[m]{a^n}$ ले दिने नतिजामा पनि फरक हुन्छ।

उदाहरण 1

मान निकाल्नुहोस् :

(क) $(16)^{\frac{3}{2}}$ (ख) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{-2}{3}}$ (ग) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

समाधान

यहाँ,

(क) $(16)^{\frac{3}{2}} = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^{2 \times \frac{3}{2}} = 4^3 = 64$

(ख) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{-2}{3}} = \left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{\frac{-2}{3}} = \frac{3^{3 \times \frac{-2}{3}}}{4^{3 \times \frac{-2}{3}}} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

(ग) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{\sqrt{8^2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left\{\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right\}$

(ख) $(8x^3 y^9)^{\frac{1}{3}} \div (16x^4y^{12})^{\frac{1}{4}}$

(ग) $\sqrt{(x+y)^{-3}} \times (x+y)^{\frac{2}{3}}$

समाधान

यहाँ,

(क) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left\{\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right\}$ $\left[\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}\right\}\right]$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^{3 \times \frac{1}{3}} \times \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{5 \times \frac{1}{5}} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right\} = \frac{3}{2} \times \left\{\frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right\} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^{1+1-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 1$ $[\because a^{o} = 1]$

(ख) $(8x^3y^9)^{\frac{1}{3}} \div (16x^4y^{12})^{\frac{1}{4}}$

$= \{2^3\, x^3\, y^9\}^{\frac{1}{3}} \div (2^4\, x^4\, y^{12})^{\frac{1}{4}} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} x^{3 \times \frac{1}{3}} \div 2^{4 \times \frac{1}{4}} \times x^{4 \times \frac{1}{4}} \times y^{12 \times \frac{1}{4}}$

$= 2xy^3 \div 2xy^3 = \frac{2xy^3}{2xy^3} = 2^{1-1}\, x^{1-1}\, y^{3-3} = 2^0\, x^0\, y^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

(ग) $\sqrt{(x+y)^{-3}} \times (x+y)^{\frac{2}{3}}$ $\left[\because \sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}\right]$

$= (x+y)^{-\frac{3}{2}} \times (x+y)^{\frac{2}{3}} = (x+y)^{-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}} = (x+y)^{\frac{-9+4}{6}} = (x+y)^{\frac{-5}{6}} = \frac{1}{(x+y)^{\frac{5}{6}}}$

उदाहरण 3

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$

(ख) $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l^2+lm+n^2} \times \left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2} \times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n^2+nl+l^2}$

समाधान

यहाँ,

(क) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$

$= (x^{a-b})^{a+b} \times (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a} \quad \left[\because \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\right]$

$= x^{a^2-b^2} \times x^{b^2-c^2} \times x^{c^2-a^2} \quad [\because (a-b)(a+b) = a^2 - b^2]$

$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2} \quad [\because x^m \times x^n = x^{m+n}]$

$= x^0 = 1$

(ख) $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l^2+lm+m^2} \times \left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2} \times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n^2+nl+l^2}$

$= (x^{l-m})^{l^2+lm+m^2} \times (x^{m-n})^{m^2+mn+n^2} \times (x^{n-l})^{n^2+nl+l^2}$

$[\because x^m \div x^n = x^{m-n}]$

$= x^{(l-m)(l^2+lm+m^2)} \times x^{(m-n)(m^2+mn+n^2)} \times x^{(n-l)(n^2+nl+l^2)}$

$[\because (x^m)^n = x^{mn}]$

$= x^{(l^3-m^3)} \times x^{(m^3-n^3)} \times x^{(n^3-l^3)} \quad [\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)]$

$= x^{l^3-m^3+m^3-n^3+n^3-l^3} \quad [\because x^m \times x^n \times x^p = x^{m+n+p}]$

$= x^0 = 1 \quad [\because a^0 = 1]$

उदाहरण 4

प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sqrt[bc]{\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}} = 1$ जहाँ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ छ ।

(ख) $\frac{1}{1 + a^{x-y} + a^{z-y}} + \frac{1}{1 + a^{y-z} + a^{x-z}} + \frac{1}{1 + a^{z-x} + a^{y-x}} = 1$

समाधान

यहाँ,

(क) L.H.S $= \sqrt[bc]{\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}}$

$= \left(\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}\right)^{1/bc} \times \left(\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}\right)^{1/ac} \times \left(\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}\right)^{1/ab}$ $\left[\because \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\right]$

$= \frac{x^{b/c \times 1/bc}}{x^{c/b \times 1/bc}} \times \frac{x^{c/a \times 1/ca}}{x^{a/c \times 1/ca}} \times \frac{x^{a/b \times 1/ab}}{x^{b/a \times 1/ab}}$ $\left[\because (x^m)^n = x^{m \times n}\right]$

$= \frac{x^{1/c^2}}{x^{1/b^2}} \times \frac{x^{1/a^2}}{x^{1/c^2}} \times \frac{x^{1/b^2}}{x^{1/a^2}}$

$= x^{1/c^2 - 1/b^2} \times x^{1/a^2 - 1/c^2} \times x^{1/b^2 - 1/a^2}$ $\left[\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$

$= x^{1/c^2 - 1/b^2 + 1/a^2 - 1/c^2 + 1/b^2 - 1/a^2}$ $\left[\because a^0 = 1\right]$

$= x^0 = 1 =$ R.H.S.

(ख) LHS

$= \frac{1}{1 + a^{x-y} + a^{z-y}} + \frac{1}{1 + a^{y-z} + a^{x-z}} + \frac{1}{1 + a^{z-x} + a^{y-x}}$

$= \frac{1}{1 + \frac{a^x}{a^y} + \frac{a^z}{a^y}} + \frac{1}{1 + \frac{a^y}{a^z} + \frac{a^x}{a^z}} + \frac{1}{1 + \frac{a^z}{a^x} + \frac{a^y}{a^x}}$ $\left[\because a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}\right]$

$= \frac{1}{\frac{a^y + a^x + a^z}{a^y}} + \frac{1}{\frac{a^z + a^y + a^x}{a^z}} + \frac{1}{\frac{a^x + a^z + a^y}{a^x}}$

$= \frac{a^y}{a^y + a^x + a^z} + \frac{a^z}{a^y + a^z + a^x} + \frac{a^x}{a^y + a^z + a^x}$

$= \frac{a^y + a^z + a^x}{a^y + a^z + a^x} = 1$ RHS

उदाहरण 5

सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^x \times \left(p-\frac{1}{q}\right)^{y-x}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^y \times \left(q+\frac{1}{p}\right)^{x-y}}$$

समाधान

यहाँ,

$$\frac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^x \times \left(p-\frac{1}{q}\right)^{y-x}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^y \times \left(q+\frac{1}{p}\right)^{x-y}}$$

$$= \frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^x \left(p-\frac{1}{q}\right)^x \times \left(p-\frac{1}{q}\right)^{y-x}}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^y \left(q-\frac{1}{p}\right)^y \times \left(q+\frac{1}{p}\right)^{x-y}}$$

$$= \frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^x \left(p-\frac{1}{q}\right)^{x+y-x}}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^{y+x-y} \left(q-\frac{1}{p}\right)^y}$$

$$= \frac{\left(\frac{pq+1}{q}\right)^x \left(\frac{pq-1}{q}\right)^y}{\left(\frac{pq+1}{p}\right)^x \left(\frac{pq-1}{p}\right)^y}$$

$$= \left(\frac{pq+1}{q} \times \frac{p}{pq+1}\right)^x \times \left(\frac{pq-1}{q} \times \frac{p}{pq-1}\right)^y$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^x \times \left(\frac{p}{q}\right)^y$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^{x+y}$$

उदाहरण 6

यदि $a + b + c = 0$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{1}{1 + x^a + x^{-b}} + \frac{1}{1 + x^b + x^{-c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{-a}} = 1$$

समाधान

यहाँ,

$a + b + c = 0$

अथवा $a + b = -c$ .... (i)

$$\text{L.H.S} = \frac{1}{1 + x^a + x^{-b}} + \frac{1}{1 + x^b + x^{-c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{-a}}$$

$$= \frac{1}{1 + x^a + \frac{1}{x^b}} + \frac{1}{1 + x^b + x^{a+b}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{-a}}$$ [∵ समीकरण (i) बाट]

$$= \frac{1}{\frac{x^b + x^{a+b} + 1}{x^b}} + \frac{1}{1 + x^b + x^{a+b}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{-a}}$$

$$= \frac{x^b}{x^b + 1 + x^{a+b}} + \frac{1}{x^b + 1 + x^{a+b}} + \frac{x^{a+b}}{x^{a+b}(1 + x^c + x^{-a})}$$

[∵ तेस्रो पदको अंश र हरमा x^{a+b} ले गुणन गर्दा]

$$= \frac{x^b + 1}{x^b + 1 + x^{a+b}} + \frac{x^{a+b}}{x^{a+b} + x^{a+b+c} + x^{a+b-a}}$$

$$= \frac{x^b + 1}{x^b + 1 + x^{a+b}} + \frac{x^{a+b}}{x^{a+b} + 1 + x^b}$$ [$\because x^{a+b+c} = x^0 = 1$]

$$= \frac{x^b + 1}{x^b + 1 + x^{a+b}} + \frac{x^{a+b}}{x^b + 1 + x^{a+b}}$$

$$= \frac{x^b + 1 + x^{a+b}}{x^b + 1 + x^{a+b}} = 1 = \text{R.H.S.}$$

अभ्यास 12.1

1. मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $3^5 \times 3^{-5}$ (ख) $9^4 \times \frac{1}{9^3}$ (ग) $5^3 \times \frac{1}{5^2}$

(घ) $(64)^{\frac{2}{3}}$ (ङ) $\left(\frac{81}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (च) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

(छ) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{-2}{3}}$ (ज) $\left\{\left(\frac{216}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^2$ (झ) $\left(\frac{1}{128}\right)^{\frac{1}{7}} + \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{6}}$

(ञ) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \times (8)^{\frac{4}{3}}$ (ट) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{8}\right)^{0}$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $(125\, m^3 \div 27b^{-3})^{-\frac{2}{3}}$ (ख) $(64a^3 \div 125b^{-3})^{-\frac{2}{3}}$

(ग) $x^{a-b} \times x^{b-c} \times x^{c-a}$ (घ) $x^{b^2 - c^2} \times x^{c^2 - a^2} \times x^{a^2 - b^2}$

(ङ) $x^{ab} \times x^{bc} \times x^{ca} \times x^{-ab} \times x^{-bc} \times x^{-ca}$ (च $\frac{x^{2m + 3n} \times x^{3m + 6n}}{x^{2m + 3n} \times x^{4m - 4n}}$

(छ) $\frac{a^{9n + 3} \times a^{-4n}}{a^{2n + 10} \times a^{3n - 7}}$ ज) $\frac{7^{n+1} \times 7^{n^2 - 1}}{7^{n^2 - n} \times 7^{2n+2}}$

3. मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{-1}{3}}\left[\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \div \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{-1}{2}}\right]$ (ख) $\left(\frac{25}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{-1}{3}}\right]$

(ग) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]$ (घ) $\frac{3^4 \times 27^3 \times 9^5}{81^6 \times 3^3 \times 9^{-2}}$

(ङ) $\frac{2^4 \times 8^3 \times 4^5}{16^6 \times 2^3 \times 4^{-2}}$

4. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{1 + x^{a - b}} + \frac{1}{1 + x^{b-a}}$ (ख) $\frac{1}{1 - a^{x-y}} + \frac{1}{1 - a^{y-x}}$

(ग) $\dfrac{(x^{a+b})^2 \times (x^{b+c})^2 \times (x^{c+a})^2}{(x^a . x^b . x^c)^4}$ (घ) $\dfrac{(a^{x+y})^3 \times (a^{y+z})^3 \times (a^{z+x})^3}{(a^x . a^y . a^z)^6}$

(ङ) $\dfrac{27^{3a+1} \times (243)^{\frac{-4a}{5}}}{9^{a+5} \times 3^{3a-7}}$ (च) $\dfrac{(32)^{\frac{2n}{5}} \times 2^{2n+1}}{4^{n+1} \times 2^{2(n-2)}}$

5. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\left(\dfrac{x^b}{x^{-a}}\right)^{b-a} \times \left(\dfrac{x^a}{x^{-c}}\right)^{a-c} \times \left(\dfrac{x^c}{x^{-b}}\right)^{c-b}$

(ख) $\left(\dfrac{x^{-b}}{x^{-a}}\right)^{a+b} \times \left(\dfrac{x^{-c}}{x^{-b}}\right)^{c+b} \times \left(\dfrac{x^{-a}}{x^{-c}}\right)^{c+a}$

(ग) $\left(\dfrac{x^m}{x^{-n}}\right)^{m^2-mn+n^2} \times \left(\dfrac{x^n}{x^{-l}}\right)^{n^2-nl+l^2} \times \left(\dfrac{x^l}{x^{-m}}\right)^{l^2-ml+m^2}$

(घ) $\left(\dfrac{x^{a+b}}{x^c}\right)^{a-b} \times \left(\dfrac{x^{b+c}}{x^a}\right)^{b-c} \times \left(\dfrac{x^{c+a}}{x^b}\right)^{c-a}$

(ङ) $\sqrt[a+b]{x^{a^2-b^2}} \times \sqrt[b+c]{x^{b^2-c^2}} \times \sqrt[c+a]{x^{c^2-a^2}}$

(च) $\left(\dfrac{x^{a^2+b^2}}{x^{-ab}}\right)^{a-b} \times \left(\dfrac{x^{b^2+c^2}}{x^{-bc}}\right)^{b-c} \times \left(\dfrac{x^{c^2+a^2}}{x^{-ca}}\right)^{c-a}$

(छ) $\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} \times \left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}}$ (ज) $\left\{(a^x.a^y)^{x-y}\left(\dfrac{a^y}{a^z}\right)^{y+z}\right\} \times \left(\dfrac{a^z}{a^x}\right)^{z+x}$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sqrt[bc]{\dfrac{x^b}{x^c}} \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} \times \sqrt[ab]{\dfrac{x^a}{x^b}} = 1$

(ख) $\sqrt{\dfrac{x^a}{x^b}} \times \sqrt{\dfrac{x^b}{x^c}} \times \sqrt{\dfrac{x^c}{x^a}} = 1$

(ग) $\sqrt[bc]{\dfrac{x^{b/c}}{x^{c/b}}} \times \sqrt[ca]{\dfrac{x^{c/a}}{x^{a/c}}} \times \sqrt[ab]{\dfrac{x^{a/b}}{x^{b/a}}} = 1$

(घ) $$\frac{1}{1 + x^{a-b} + x^{c-b}} + \frac{1}{1 + x^{b-c} + x^{a-c}} + \frac{1}{1 + x^{c-a} + x^{b-a}} = 1$$

(ङ) $$\frac{\left(p + \frac{1}{q}\right)^m \times \left(p - \frac{1}{q}\right)^m}{\left(q + \frac{1}{p}\right)^m \times \left(q - \frac{1}{p}\right)^m} = \left(\frac{p}{q}\right)^{2m}$$

(च) $$\frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^a \times \left(x - \frac{1}{y}\right)^{b-a}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^b \times \left(y + \frac{1}{x}\right)^{a-b}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{a+b}$$

(छ) $$\frac{\left(a^2 - \frac{1}{b^2}\right)^x \times \left(a - \frac{1}{b}\right)^{y-x}}{\left(b^2 - \frac{1}{a^2}\right)^y \times \left(b + \frac{1}{a}\right)^{x-y}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{x+y}$$

7. **यदि $p^3 + q^3 + r^3 = 1$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :**

$$\left(\frac{x^p}{x^{-q}}\right)^{p^2 - pq + q^2} \times \left(\frac{x^q}{x^{-r}}\right)^{q^2 - qr + r^2} \times \left(\frac{x^r}{x^{-p}}\right)^{r^2 - rp + p^2} = x^2$$

8. **यदि $x^2 + y^2 + z^2 = (xy + yz + zx)$, भए प्रमाणित गर्नुहोस् :**

$$\left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{x-y} \times \left(\frac{a^y}{a^z}\right)^{y-z} \times \left(\frac{a^z}{a^x}\right)^{z-x} = 1$$

9. **यदि $a + b + c = 0$ भए $x^{b^{-1}c^{-1}} \times x^{c^{-1}a^{-1}} \times x^{a^{-1}b^{-1}} = 1$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।**

10. **यदि $g + h + f = 0$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :**

$$\frac{1}{1 + m^g + m^{-h}} + \frac{1}{1 + m^h + m^{-f}} + \frac{1}{1 + m^f + m^{-g}} = 1$$

11. **यदि $r + s + t = 0$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :**

$$\frac{1}{1 + x^r + x^{-s}} + \frac{1}{1 + x^s + x^{-t}} + \frac{1}{1 + x^t + x^{-r}} = 1$$

12. **यदि $xyz = 1$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :**

$$\frac{1}{1 + x + y^{-1}} + \frac{1}{1 + y + z^{-1}} + \frac{1}{1 + z + x^{-1}} = 1$$

उत्तर

1.	(क) 1		(ख) 9		(ग) 5	
	(घ) 16		(ङ) 3		(च) $\frac{1}{5}$	
	(छ) $\frac{16}{9}$		(ज) $\frac{25}{36}$		(झ) 1	
	(ञ) 8		(ट) 39			
2.	(क) $\frac{9}{25m^2b^2}$		(ख) $\frac{25}{16a^2b^2}$		(ग) 1	
	(घ) 1		(ङ) 1		(च) x^{10n-m}	
	(छ) 1		(ज) $\frac{1}{49}$			
3.	(क) $\frac{2}{5}$		(ख) $\frac{2}{3}$		(ग) 1	
	(घ) 1		(ङ) 1			
4.	(क) 1		(ख) 1		(ग) 1	
	(घ) 1		(ङ) 1		(च) 8	
5.	(क) 1		(ख) 1		(ग) $2(l^3 + m^3 + n^3)$	
	(घ) 1		(ङ) 1		(च) 1	
	(छ) 1		(ज) 1			

मिश्रित अभ्यास

1. तल दिइएका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $216a^3 + \frac{1}{8}$ (ख) $8x^3 - 125y^3$

(ग) $(x + 2)^3$ (घ) $(x - 3)^3$

(ङ) $16m^4 - 65m^2n^2 + 49n^4$ (च) $9x^4 - \frac{2x^2}{y^2} + \frac{1}{9y^4}$

(छ) $64 - 144a + 108a^2 - 27a^3$ (ज) $a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4$

2. तल दिइएका अभिव्यञ्जकबाट म.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $x^2 + 2x - 8 - y^2 - 6y, x^2 + 2xy + y^2 - 16, x^2 + xy + 4x$

(ख) $9(a + b)^2 + a + b - 8, a^2 + 2ab + b^2 - 1, a^2 + ab + a$

(ग) $x^2 - 10x + 24 + 6y - 9y^2, x^2 + 6xy + 9y^2 - 36$ र $x^2 + 3xy - 6x$

(घ) $\frac{x^4}{y^4} + 1 + \frac{y^4}{x^4}, \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}$ र $\frac{x^3}{y^2} - x + \frac{y^2}{x}$

3. तल दिइएका अभिव्यञ्जकबाट ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $a^5 + 2a^4 - 9a^3 - 18a^2, a^5 - 2a^4 + 8a^2 - 4a^3, a^4 - 4a^2$

(ख) $x^4 - 8x^2 - 33 - 14y - y^2, (x^2 + y)^2 - 9, x^3 + xy + 3x$

(ग) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2, y^2 + 2yz + z^2 - x^2, z^2 + 2zx + x^2 - y^2$

(घ) $a(a + c) - b(b + c), b(a + b) - c(c + a)\ c(b + c) - a(a + b)$

4. यदि दुईओटा बिजीय अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक $2u + 5v$, लघुत्तम समापवर्त्य $3u(2u + 5v)(2u - 5v)$ र एउटा अभिव्यञ्जक $4u^2 - 25v^2$ छ भने अर्को अभिव्यञ्जक पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. महत्तम समापर्वतक (म.स.) र लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $(p + 3)^3, p^2 + 6p + 9, 2p^3 + 18p^2 + 54p + 54$

(ख) $q^2 - 6q - 40 + 14r - r^2, q^2 - 2qr + r^2 - 16, q^2 - qr + 4r$

6. तल दिइएका जोडा रेखीय समीकरणलाई प्रतिस्थापन विधिद्वारा हल गर्नुहोस् :

(क) $2x + 3y = 8, 3x + 2y = 7$

(ख) $\frac{2}{3}x + 2y = 1, \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$

(ग) $5x - 2y = 10, 4x - 3y = -6$

7. तल दिइएका जोडा रेखीय समीकरणलाई हटाउने विधिद्वारा हल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x}{6} - y = -6$

$\frac{3x}{4} - 1 = y$

(ख) $\frac{x + y}{2} = \frac{3x - 5y}{4}$

$\frac{x - 3y}{2} = \frac{x - 1}{3}$

8. A को अहिलेको उमेर B को अहिलेको उमेरको 2 गुणाभन्दा 4 वर्षले बढी छ । B को अहिलेको उमेर A को अहिलेको उमेरको $\frac{2}{5}$ गुणाभन्दा 2 वर्षले बढी छ । तिनीहरूको अहिलेको उमेरको फरक कति छ, पत्ता लगानुहोस् ।

9. राम र हरिशको अहिलेको उमेरको अनुपात 5:7 छ। आठ वर्षअघि उनीहरूको उमेरको अनुपात 7:13 थियो भने उनीहरूको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. दुई अङ्कले बनेको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् जसको एकको स्थानको अङ्क दशको स्थानको अङ्कको तिन गुणा छ र सो सङ्ख्यामा 36 जोड्यो भने अङ्कको स्थान बदलिन्छ ।

11. विकासले नयाँ अफिस खोल्न थालेका छ । त्यसैले उनले नजिकको फर्निचर पसलमा टेबुल र कुर्सीको मूल्य सोधे । जसअनुसार 3 टेबुल र 2 कुर्सीको मूल्य रु. 1,900 पर्छ । 2 टेबुल र 4 कुर्सीको मूल्य रु. 1,800 पर्छ भने एक टेबुल र एक कुर्सीको मूल्य कति पर्छ ?

12. सरल गर्नुहोस् :

$$\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m-p+n} \times \left(\frac{x^n}{x^p}\right)^{n-m+p} \times \left(\frac{x^p}{x^m}\right)^{p-n+m}$$

13. सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{1}{1+x^{p-q}+x^{p-r}} + \frac{1}{1+x^{q-p}+x^{q-r}} + \frac{1}{1+x^{r-p}+x^{r-q}}$$

14. सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{\left(9x^2-\frac{1}{9y^2}\right)^{3x}\left(3x-\frac{1}{3y}\right)^{3y-3x}}{\left(9y^2-\frac{1}{9x^2}\right)^{3y}\cdot\left(3y+\frac{1}{3y}\right)^{3x-3y}}$$

15. यदि $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$(1+x^a+x^{-b})^{-1}+(1+x^b+x^{-c})^{-1}+(1+x^c+x^{-a})^{-1}=1$$

उत्तर

1. (क) $\left(6a + \frac{1}{2}\right)(36a^2 - 3a + \frac{1}{4})$

(ख) $(2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$

(ग) $(x + 2)(x + 2)(x + 2)$

(घ) $(x - 3)(x - 3)(x - 3)$

(ङ) $(4m^2 + 3mn - 7n^2)(4m^2 - 3mn - 7n^2)$

(च) $\left(3x^2 - \frac{1}{3y^2}\right)\left(3x^2 - \frac{1}{3y^2}\right)$

(छ) $(4 - 3a)(4 - 3a)(4 - 3a)$

(ज) $(a - 2b)(a + 2b)(a + b)(a - b)$

2. (क) $(x + y + 4)$ (ख) $(a + b + 1)$

(ग) $x + 3y - 6$ (घ) $\left(\frac{x^2}{y^2} - 1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$

3. (क) $a^2(a + 2)(a - 2)^2(a^2 - 9)$

(ख) $x(x^2 + y + 3)(x^2 - y - 11)(x^2 + y - 3)$

(ग) $(x + y + z)(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$

(घ) $(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$

4. $6u^2 + 15uv$

5. (क) म.स. $= (p + 3)^2$ ल.स. $= 2(p + 3)^3$

(ख) म.स. $= (q - r + 4)$ ल.स. $= q(q - r + 4)(q + r - 10)(q - r - 4)$

6. (क) $x = 1, y = 2$

(ख) $x = \frac{21}{8}, y = -\frac{3}{8}$

(ग) $x = 6, y = 10$

7. (क) $x = 12, y = 8$

8. 22 वर्ष

9. 15 वर्ष, 21 वर्ष

10. आवश्यक सङ्ख्या = 26

11. रु. 500, रु. 200 12. 1 13. 1

14. $\left(\frac{x}{y}\right)^{3(x+y)}$

पाठ 13 त्रिभुज (Triangle)

13.0 पुनरवलोकन (Review)

विद्यार्थीले जोडीमा एक जोडा त्रिभुज लिनुहोस् । प्रत्येक त्रिभुजका सबै कोण र भुजा नाप्नुहोस् ।

कोण तथा भुजाका आधारमा दुई अलग त्रिभुज कस्ता प्रकारका रहेछन् ? दुवै त्रिभुज समरूप वा अनुरूप छन् वा छैनन् भनी कसरी छुट्याउन सकिन्छ ? जोडीमा छलफल गरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् र जोडीका कार्यलाई न्युजप्रिन्ट पेपरमा चित्रसहित लेखी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

13.1 त्रिभुजका गुणहरू र तिनीहरूको परीक्षण (Properties of triangles and their verification)

विद्यार्थीहरू उपयुक्त सङ्ख्याका समूहहरूमा बस्नुहोस् । प्रत्येक समूहले एक जोडा त्रिभुज बनाउनुहोस्, जस्तैः समबाहु, समद्विबाहु, समकोणी, विषमबाहु ।

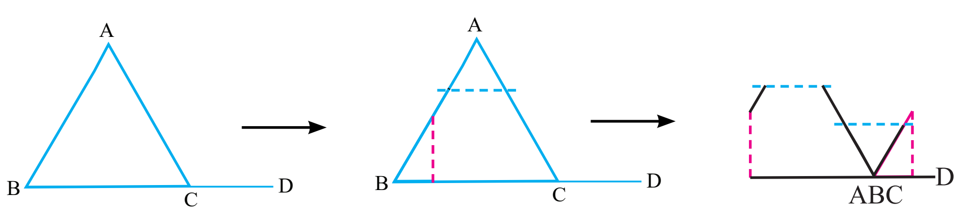
प्रत्येक समूहले आफ्ना त्रिभुजका भुजा तथा कोणको नाप लिई त्यसका विशेषताको खोजी गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 1

त्रिभुजको एउटा भुजालाई लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरी कोण त्यस कोणसँग अनासन्न दुईओटा भित्री कोणको योगफलसँग बराबर हुन्छ भनी प्रयोगात्मक परीक्षणबाट पुष्टि गर्नुहोस् ।

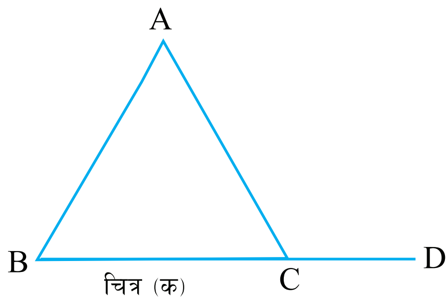
(I) कागज काटेर

प्रत्येकले एउटा कागजको पानामा तल दिइएको जस्तै चित्र बनाउनुहोस् । एउटा भुजालाई बढाउँदा बनेको बाहिरी कोणमा त्यससँग अनासन्न दुईओटा भित्री कोण काटेर चित्रमा जस्तै गरी राख्नुहोस् र तिनीहरूबिचको सम्बन्ध पत्ता लगाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

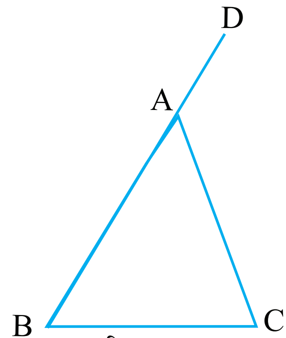


(II) कोण नापेर

प्रत्येकले तल दिइएका जस्तै चित्रहरू बनाउनुहोस् :



चित्र (क)



चित्र (ख)

माथि दिइएका प्रत्येक चित्रका तलका तालिकामा देखाइएका कोण चाँद (protractor) को प्रयोग गरी नाप्नुहोस् । उक्त नापलाई तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

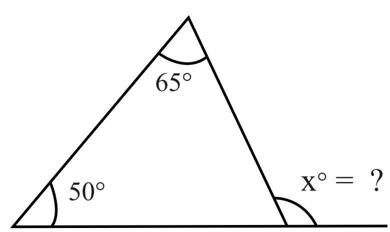
चित्र	अनासन्न भित्री कोण		बाहिरी कोण	अन्नासन्न भित्री कोणको जोड	नतिजा
क	$\angle ABC =$	$\angle BAC =$	$\angle ACD =$	$\angle ABC + \angle BAC =$	
ख	$\angle ABC =$	$\angle ACB =$	$\angle CAD =$	$\angle ABC + \angle ACB =$	

माथिको तालिकाअनुसार प्रत्येक समूहका कार्यलाई कक्षामा पालैपालो प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

> निष्कर्ष : त्रिभुजको एउटा भुजालाई लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरी कोण त्यस कोणसँग अनासन्न दुईओटा भित्री कोणको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ,

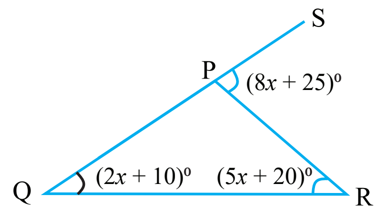
$x = 50° + 65°$

$= 115°$

[∵ त्रिभुजको एउटा भुजालाई लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरी कोण र त्यस कोणसँग अनासन्न दुईओटा भित्री कोणको योगफल बराबर हुने भएकाले ।]

उदाहरण 2

दिइएको त्रिभुजमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ,

चित्रअनुसार, $\angle SPR = (8x + 25)°$

$\angle PQR = (2x + 10)°$ र $\angle PRQ = (5x + 20)°$

हामीलाई थाहा छ, $\angle PQR + \angle PRQ = \angle SPR$

अथवा, $(2x + 10) + (5x + 20) = (8x + 25)$

अथवा, $2x + 10 + 5x + 20 = 8x + 25$

अथवा, $7x + 30 = 8x + 25$

अथवा, $x = 30 - 25 = 5$

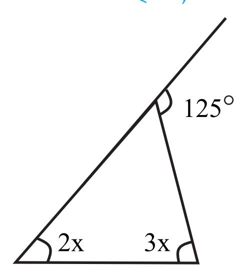
तसर्थ $\angle SPR = 8x + 25 = 8 \times 5 + 25 = 40 + 25 = 65^o$

$\angle PQR = 2x + 10 = 2 \times 5 + 10 = 10 + 10 = 20^o$

र $\angle PRQ = 5x + 20 = 5 \times 5 + 20 = 25 + 20 = 45^o$

उदाहरण 3

कुनै त्रिभुजको एउटा भुजालाई लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरी कोण 125° छ र त्यस बाहिरी कोणसँग अनासन्न हुने दुईओटा भित्री कोणको अनुपात 3 : 2 छ भने त्रिभुजका तिनओटा भित्री कोणको मान कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ बाहिरी कोणको मान = 125°

मानौँ बाहिरी कोणसँग अनासन्न हुने दुईओटा भित्री कोण 3x र $2x$ छन् ।

भित्री अनासन्न कोणको योगफल = $3x + 2x = 5x$

प्रश्नअनुसार,

$5x = 125°$

अथवा, $x = \dfrac{125}{5} = 25°$

अतः त्रिभुजका भित्री कोण,

एउटा कोण $= 3x = 3 \times 25° = 75°$

दोस्रो कोण $= 2x = 2 \times 25° = 50°$

र तेस्रो कोण $= 180° - 125° = 55°$

अभ्यास 13.1

1. तलका वाक्यहरू सही वा गलत के हुन् र किन, कारण लेख्नुहोस् ।

(क) त्रिभुजमा दुईओटा समकोण हुन्छन् ।

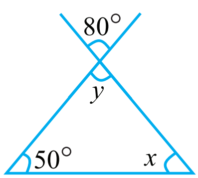
(ख) त्रिभुजका सबै कोण न्यूनकोणी हुन्छन् ।

(ग) त्रिभुजमा बाहिरी कोणको मान 130^0 छ भने यसको आसन्न भित्री कोण अधिक कोण नै हुन्छ ।

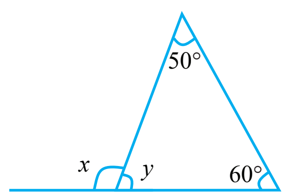
(घ) भित्री कोण न्युनकोण भएको त्रिभुजको त्यसैसँग आसन्न बाहिरी कोण अधिक कोण हुन्छ ।

2. तलका चित्रमा x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

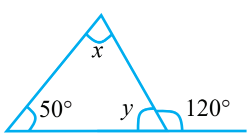
(क)



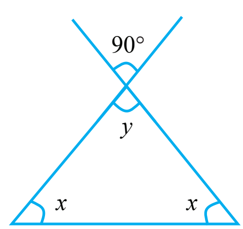
(ख)



(ग)

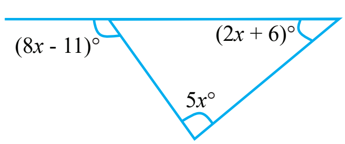


(घ)

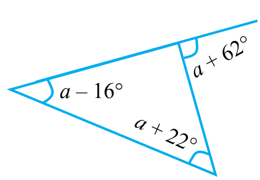


3. तल दिइएका अवस्थामा x, y, z र a को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

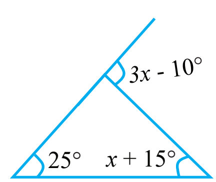
(क)

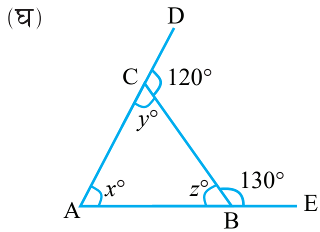


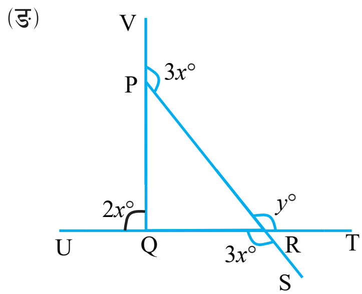
(ख)

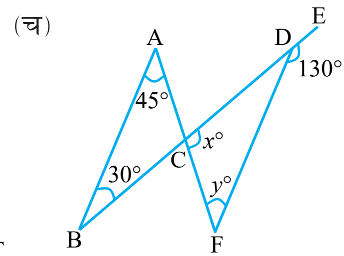


(ग)



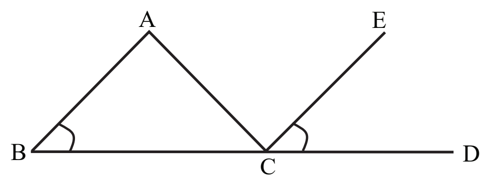






4. कुनै त्रिभुजको एउटा बाहिरी कोण 120° छ र त्यससँग अनासन्न दुईओटा भित्री कोण 1 : 2 को अनुपातमा छन् भने उक्त त्रिभुजका तिनैओटा भित्री कोणको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. दिइएको चित्रमा $\angle BAC:\angle ABC:\angle ACB = 2:1:1$ र $\angle ABC = \angle ECD$ भए $\angle ACE$ को नाप कति होला ?



उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (क) $x = 50^o$, $y = 80°$ (ख) $x = 110^o$, $y = 70^o$ (ग) $x = 70^o$, $y = 60^o$
   (घ) $x = 45^o$, $y = 90°$
3. (क) 17^o (ख) 56^o (ग) 25^o
   (घ) $x = 70°$, $y = 60°$, $z = 50°$ (ङ) 45°, 135° (च) $x = 105^o$, $y = 25$
4. 40^o, 60°, 80° 5. 90°

13.2 समद्विबाहु त्रिभुजका गुणहरूको परीक्षण (Verification of properties of isosceles triangle)

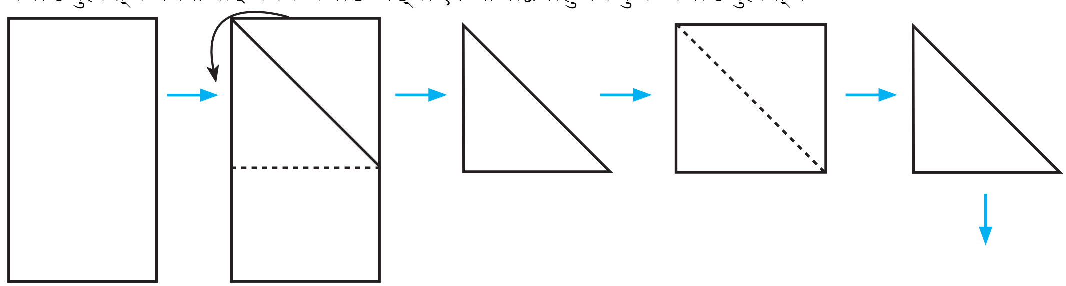
प्रत्येक समूहमा एक एक जोडा समद्विबाहु त्रिभुज बनाउनुहोस् । रुलर र चाँदको प्रयोग गरी प्रत्येकका भुजा र कोण नाप्नुहोस् । भुजा तथा कोणको सम्बन्ध कस्तो पाउनुभयो, समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 1

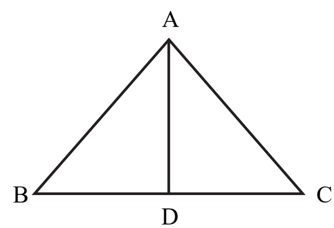
(क) समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षकोणको अर्धक आधारमा लम्ब हुन्छ र आधार भुजालाई समद्विभाजन गर्छ भनी प्रयोगात्मक परीक्षणबाट पुष्टि गर्नुहोस् ।

(I) **कागज पट्याएर**

एउटा आयतकार कागजको पाना लिनुहोस् । त्यसका दुईओटा आसन्न किनारालाई खप्टाएर वर्गाकार बनाउनुहोस् । त्यसलाई विकर्णबाट पट्याएर समद्विबाहु त्रिभुज बनाउनुहोस् ।



अब उक्त समद्विबाहु त्रिभुजलाई चित्रमा देखाएझैँ शीर्षकोणलाई आधा गर्ने गरी पट्याउनुहोस् र निम्नलिखित कोण तथा भुजा नाप्नुहोस् :



(क) ∠BDA र ∠CDA

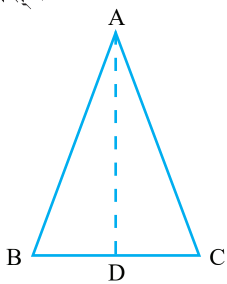
(ख) BD र CD

सबैको निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

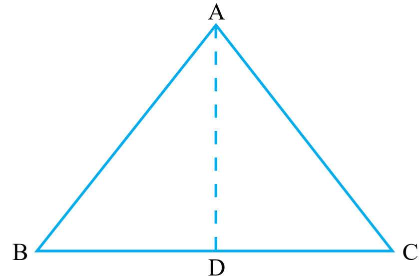
(II) **कोण तथा भुजा नापेर**

उपयुक्त समूहमा विभाजन भई प्रत्येक समूहले दुई दुईओटा फरक फरक नापका समद्विबाहु त्रिभुज ABC खिच्नुहोस् :

जस्तै,



चित्र (क)



चित्र (ख)

कम्पास वा चाँदको प्रयोग गरेर सबै त्रिभुजमा शीर्षकोण A को अर्धक खिच्नुहोस् । उक्त अर्धकले आधार BC मा काट्ने बिन्दुलाई D नाम दिनुहोस् ।

अब कोण $\angle ADB$ र $\angle ADC$ तथा भुजा BD र DC को नाप लिएर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	$\angle ADB$	$\angle ADC$	BD	DC	नतिजा
क					
ख					

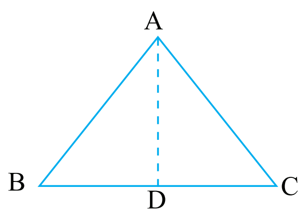
निष्कर्ष : समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षकोणको अर्धक आधारमा लम्ब हुन्छ र आधार भुजालाई समद्विभाजन गर्छ ।

क्रियाकलाप 2

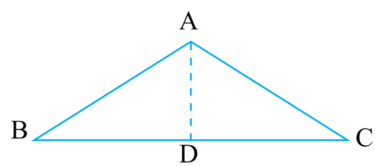
(ख) समद्विबाहु त्रिभुजमा आधारको लम्बार्धकले शीर्षकोणलाई आधा गर्छ भनी प्रयोगात्मक परीक्षणबाट पुष्टि गर्नुहोस् ।

सँगैको साथीसँग मिलेर दुईओटा फरक फरक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खिच्नुहोस् :

जस्तै,



चित्र (क)



चित्र (ख)

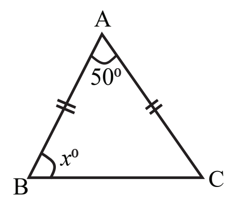
सबै त्रिभुजमा आधार BC को लम्बार्धक खिच्नुहोस् । उक्त लम्बार्धकले आधार BC मा काट्ने बिन्दुलाई D नाम दिनुहोस् ।

अब चित्रमा कोण ∠BAD र ∠CAD को नापलाई तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	∠BAD	∠CAD	नतिजा
क			
ख			

निष्कर्ष : समद्विबाहु त्रिभुजमा आधारको लम्बार्धकले शीर्षकोणलाई आधा गर्छ ।

उदाहरण 1



दिइएको चित्रमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, ∠BAC = 50°, AB = AC

समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोण

∠ABC = ∠ACB = x

∠ABC + ∠ACB + ∠BAC = 180° [∵ त्रिभुजका भित्री कोणको योगफल 180° हुन्छ ।]

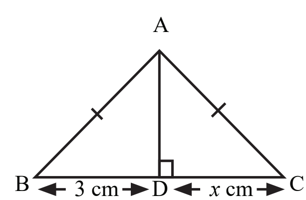
अथवा, $x + x + 50° = 180°$

अथवा, $2x = 130°$

अथवा, $x = \frac{130°}{2}$

अथवा, $x = 65°$

उदाहरण 2



चित्रमा दिइएको जानकारीका आधारमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ AB = AC, AD ⊥ BC, DC = x cm, BD = 3 cm छ ।

समद्विबाहु त्रिभुज ΔABC मा लम्ब AD ले आधार BC लाई दुई बराबर भागमा बाँड्छ ।

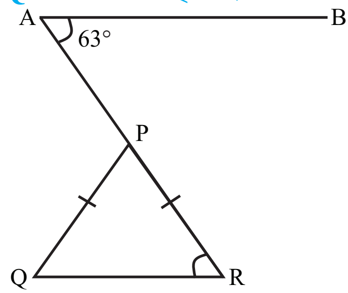
तसर्थ BD = DC हुन्छ ।

अथवा, 3 cm = x

x = 3 cm

उदाहरण 3

दिइएको चित्रमा PQ = PR र ∠BAR = ∠PRQ छन् भने ∠APQ को मान कति होला ?



समाधान

यहाँ PQ = PR र ∠BAR = ∠PRQ

$\therefore \angle PRQ = 63^\circ$

ΔPQR समद्विबाहु त्रिभुज भयो ।

तसर्थ ∠PRQ = ∠PQR = 63°

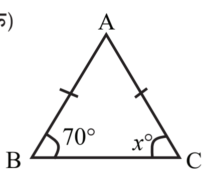
ΔPQR मा, ∠APQ = ∠PRQ + ∠PQR = 63° + 63° = 126°

$\therefore \angle ARQ = 126^\circ$

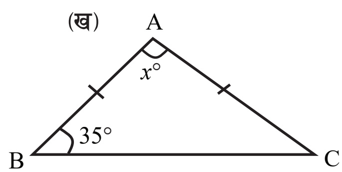
अभ्यास 13.2

1. तल चित्रमा दिइएको जानकारीका आधारमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

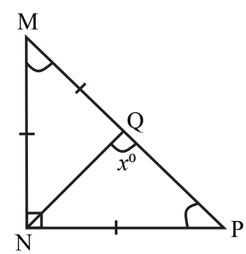
(क)



(ख)

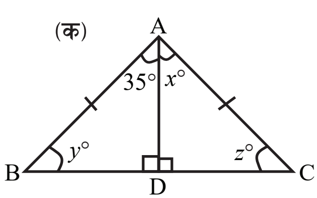


(ग)

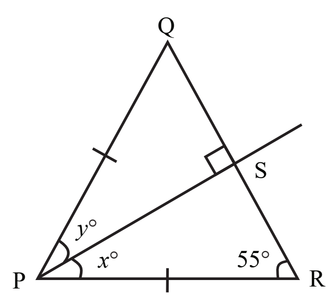


2. तल चित्रमा दिइएको जानकारीका आधारमा $x°$, $y°$ र $z°$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

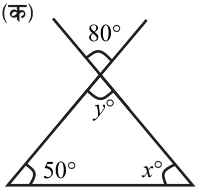


(ख)

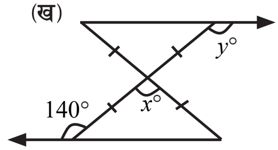


3. तल दिइएका चित्रहरूमा x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

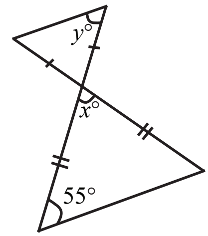
(क)



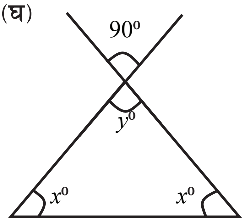
(ख)



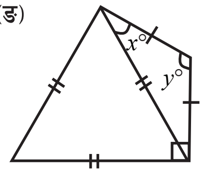
(ग)



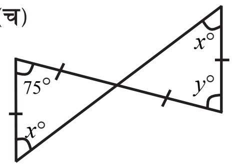
(घ)



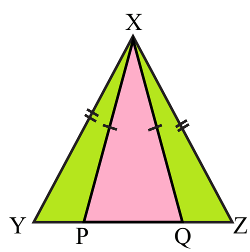
(ङ)



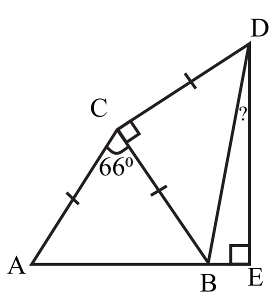
(च)



4. सँगैको चित्रमा यदि XY = $3y$, XZ = $7x$, XP = $9x$ र XQ = $13 + 2y$ भए x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



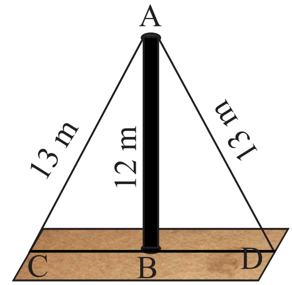
5. सँगैको चित्रमा यदि त्रिभुज ABC र BCD समद्विबाहु त्रिभुज हुन् भने $\angle$BDE को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



6. एउटा खम्बाको टुप्पाबाट बराबर लम्बाइका तार जमिनमा गाडिएका छन् । यदि जमिन बाहिर देखिएको तारको लम्बाइ 13 m र खम्बाको उचाइ 12 m भएमा

(क) खम्बादेखि तार गाडिएको स्थानसम्मको दुरी कति होला ?

(ख) के चित्रमा बन्ने त्रिभुज ABC र ABD को क्षेत्रफल बराबर होला ?



उत्तर

1. (क) 70° (ख) 110° (ग) 112.5°
2. (क) $x = 35°, y = 55°, z = 55°$ (ख) $x = 35°,\ y = 35°$
3. (क) $x = 50°$, y = 80° (ख) $x = 100°$, y = 140°
   (ग) $x = 70°$, y = 55° (घ) $x = 45°$, y = 90°
   (ङ) $x = 30°$, y = 120° (च) $x = 52.5°$, y = 75°
4. $x = 3$, y = 7
5. 12°
6. 5 m

13.3 त्रिभुजका भुजा र कोणबिचको सम्बन्ध (Relation among sides and angles of triangle)

क्रियाकलाप 1

उपयुक्त समूहमा बस्नुहोस् । प्रत्येक समूहले तीन तीनओटा सिन्का सङ्कलन गर्नुहोस् । उक्त तीनओटा सिन्काका छेउ जोडेर त्रिभुजाकार आकृति बनाउनुहोस् ।

के सबै समूहको आकृति त्रिभुज बन्यो ? यदि बनेको भए कस्तो बन्यो र नबनेको भए किन बनेन ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

जुनसुकै नापका तीनओटा सिन्का मिलेर त्रिभुज बन्दैन । सिन्काका लम्बाइका आधारमा फरक फरक किसिमका त्रिभुज बन्छन् ।

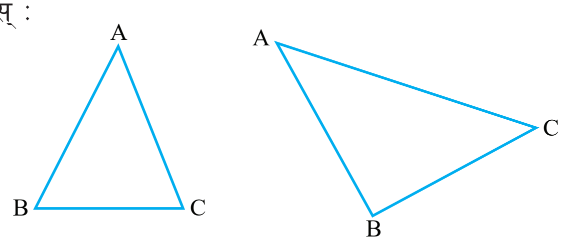
(क) त्रिभुजका दुई भुजाको लम्बाइको योगफल र तेस्रो भुजाको लम्बाइको सम्बन्ध (Relation between the sum of two sides and the third side of the Triangle)

क्रियाकलाप 2

कुनै पनि त्रिभुजका दुई भुजाको लम्बाइको योगफल तेस्रो भुजाको लम्बाइभन्दा सधैँ बढी हुन्छ भनी प्रयोगात्मक परीक्षणद्वारा पुष्टि गर्नुहोस् :

(क) उपयुक्त समूहमा बस्नुहोस् ।

(ख) हरेक समूहका प्रत्येक सदस्यले तल दिइएका जस्तै फरक फरक प्रकार र नापका एक एकओटा त्रिभुज खिच्नुहोस् :



चित्र (क) चित्र (ख)

(ग) प्रत्येक त्रिभुजका भुजा नाप्नुहोस् र दुईओटा भुजाको योगफल पनि निकाल्नुहोस् । प्राप्त नतिजालाई तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् :

त्रिभुज	AB	BC	AC	AB + AC	AB + BC	BC + AC	नतिजा
(क)							
(ख)							

(iv) माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निस्कियो, समूहमा छलफल गरी लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : कुनै पनि त्रिभुजका दुई भुजाको लम्बाइको योगफल तेस्रो भुजाको लम्बाइभन्दा सधैँ बढी हुन्छ ।

यदि कुनै त्रिभुजका दुई भुजाको लम्बाइको योगफल तेस्रो भुजाको लम्बाइसँग बराबर वा कम भएमा के हुन्छ होला ?

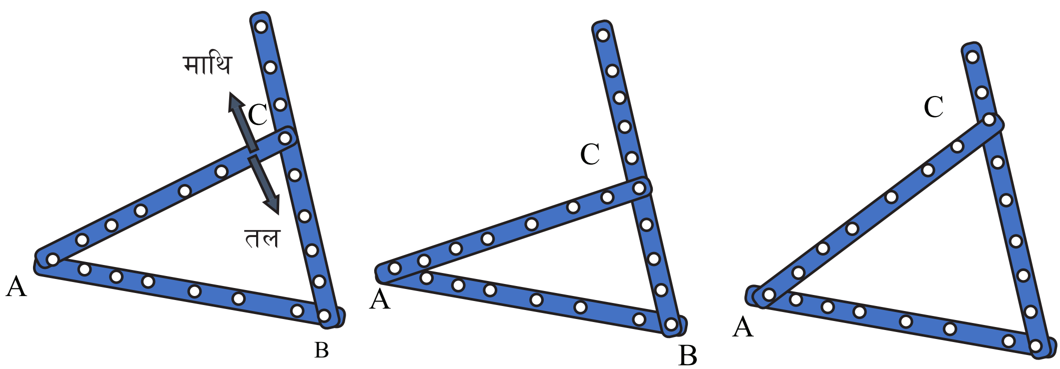
(ख) त्रिभुजका भुजा र कोणको सम्बन्ध (Relation between the sides and angles of a triangle)

क्रियाकलाप 3

त्रिभुजको लामो भुजाको सम्मुख कोण ठुलो हुन्छ भने छोटो भुजाको सम्मुख कोण सानो हुन्छ भनी प्रयोगात्मक परीक्षणद्वारा पुष्टि गर्नुहोस् ।

(I) मेकानो स्ट्रिप्स प्रयोग गरेर

प्रत्येक समूहले मेकानो स्ट्रिपको प्रयोग गरी एउटा त्रिभुज ABC बनाउनुहोस् :



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

उक्त त्रिभुजमा शीर्षकोण A र B लाई नचलाईकन बिन्दु C लाई चित्रमा देखाएजस्तै पहिले तलतिर सार्दै जानुहोस् ।

फेरि उक्त बिन्दु C लाई चित्रमा बाणले देखाएको माथितिर दिशामा सार्नुहोस् ।

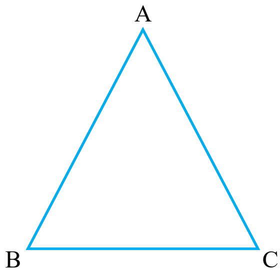
प्रत्येक अवस्थामा ∠CAB र भुजा BC को लम्बाइ टिपोट गर्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

चित्र	AB	AC	BC	∠CAB	BC र ∠CAB को सम्बन्ध	नतिजा
(क)						
(ख)						
(ग)						

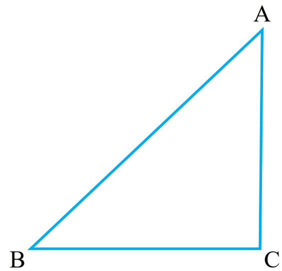
माथिको तालिकाबाट त्रिभुजको एउटा कोण र उक्त कोणको सम्मुख भुजाको सम्बन्ध खोज्नुहोस् ।

(II) भुजा तथा कोण नापेर

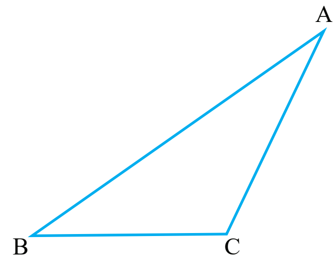
कोणका आधारमा तीन प्रकारका त्रिभुज (न्यूनकोणी, समकोणी र अधिककोणी) खिच्नुहोस् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

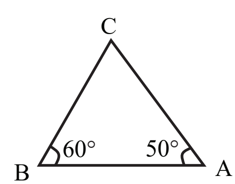
तीनओटै त्रिभुजका सबै कोण तथा सम्मुख भुजाको नाप तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	AB	$\angle ACB$	BC	$\angle BAC$	AC	$\angle ABC$	नतिजा
(क)							
(ख)							
(ग)							

निष्कर्ष : त्रिभुजको लामो भुजाको सम्मुखको कोण ठुलो हुन्छ भने छोटो भुजाको सम्मुख कोण सानो हुन्छ ।

उदाहरण 1

ΔABC मा यदि $\angle BAC = 50°$ र $\angle ABC = 60°$ भए सबैभन्दा लामो भुजा र सबैभन्दा छोटो भुजा कुन होला, पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ $\angle BAC = 50°$, $\angle ABC = 60°$

हामीलाई थाहा छ, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$

[त्रिभुजका तीनओटा भित्री कोणको योग 180° हुन्छ ।]

अथवा, $50° + 60° + \angle ACB = 180°$

अथवा, $110° + \angle ACB = 180°$

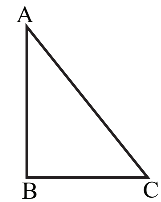
अथवा, $\angle ACB = 180° - 110°$

अथवा, $\angle ACB = 70°$

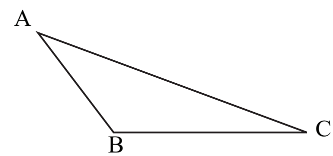
तसर्थ सबैभन्दा लामो भुजा 70° को सम्मुख भुजा AB, र सबैभन्दा छोटो भुजा 50° को सम्मुख भुजा BC हुन्छ ।

अभ्यास 13.3

1. दिइएको त्रिभुज ΔABC मा भुजाको नाप लिनुहोस् र त्यसका आधारमा सबैभन्दा ठुलो कोण र सबैभन्दा सानो कोण पत्ता लगाउनुहोस् :



2. दिइएको त्रिभुज ΔABC मा कोणको नाप लिनुहोस् र त्यसका आधारमा सबैभन्दा लामो भुजा र सबैभन्दा छोटो भुजा पत्ता लगाउनुहोस् :

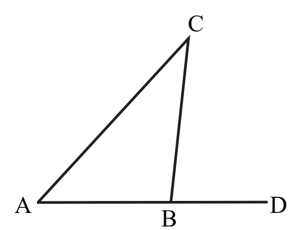


3. **एउटा त्रिभुजका तीनओटा भुजाको लम्बाइ क्रमशः 5 cm, 6 cm र x cm छ । यदि x cm सबैभन्दा लामो भुजाको लम्बाइ भएमा x को मान तलका मध्ये कुन ठिक होला ?**

   (क) 11 cm (ख) <11 cm (ग) >11 cm (घ) ≤ 11 cm

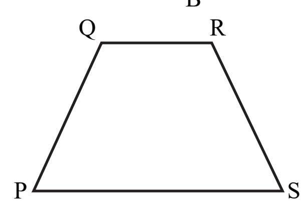
4. एउटा समद्विबाहु त्रिभुजको आधारको लम्बाइ 24 cm र क्षेत्रफल 60 cm^2 भएमा उक्त त्रिभुजका अन्य भुजाको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. **दिइएको चित्रमा यदि $\angle ABC > \angle DBC$ भए $AC > BC$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।**



6. **दिइएको चित्रमा PQ + QR + RS > SP हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।**

   (hints: P र R जोड्नुहोस् ।)



उत्तर

1 - 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (ख) <11

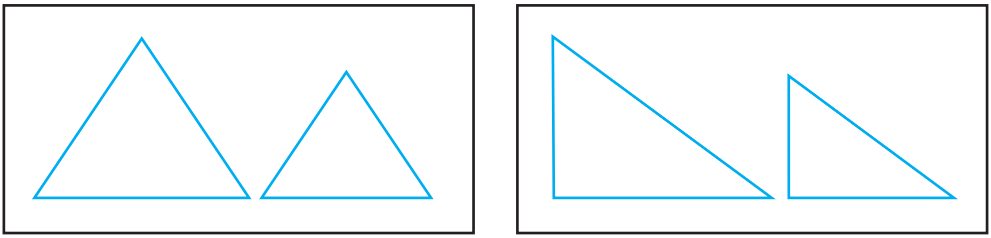
4. 13 cm

5 - 6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

13.4 समरूप त्रिभुज (Similar triangles)

क्रियाकलाप 1

तलका चित्रको अध्ययन तथा अवलोकन गरी दिइएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) माथिका चित्रहरूमा भएका जोडा आकृति कस्ता कस्ता होलान् ?

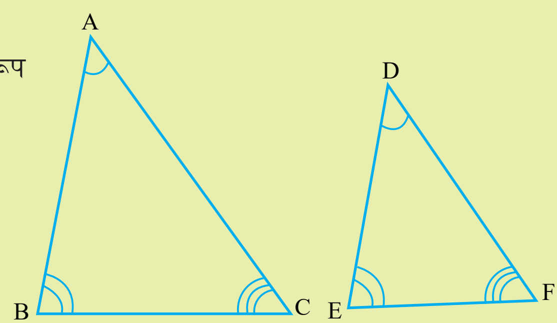
(ख) प्रत्येक जोडा आकृतिका भुजाको लम्बाइ बराबर छन् कि छैनन् ?

(ग) साथै सम्बन्धित कोणको नाप बराबर छन् कि छैनन् ?

दिइएका जोडा आकृति हेर्दा उस्तै तर फरक नापका छन् । यस्ता आकृतिलाई समरूप आकृति भनिन्छ ।

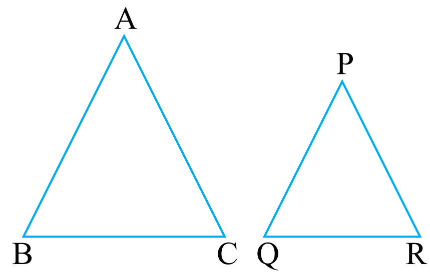
उस्तै आकारका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई समरूप आकृति (similar figures) भनिन्छ । समरूप त्रिभुजमा बराबर कोणलाई सङ्गति कोण भनिन्छ र बराबर कोणका सम्मुख भुजालाई सङ्गति भुजा भनिन्छ ।

दिइएका दुई त्रिभुज ABC र DEF समरूप त्रिभुज हुन् र कोण $\angle A, \angle B$ र $\angle C$ क्रमशः कोण $\angle D, \angle E$ र $\angle F$ सँग बराबर छन् भने कोण $\angle A, \angle B$ र $\angle C$ क्रमशः कोण $\angle D, \angle E$ र $\angle F$ का सङ्गति कोण हुन् । भुजा AB, BC र AC क्रमशः भुजा DE, EF र DF का सङ्गति भुजा हुन् ।



क्रियाकलाप 2

चित्रमा देखाएजस्तै दुईओटा त्रिभुज कार्डबोर्डमा खिच्नुहोस्। तिनीहरूलाई कैँचीले काटेर त्रिभुजाकार आकृति बनाऔँ। अब सबै शीर्षकोण क्रमशः आपसमा खप्ट्याउँदा ठिक मिल्ने छन् वा छैनन्, अवलोकन गर्नुहोस् । यसरी सबै शीर्षकोण आपसमा ठिक मिल्ने गरी खप्टिए भने तिनीहरूका कोण बराबर छन्। सबै कोण बराबर भएकाले ती त्रिभुज आपसमा समरूप त्रिभुज हुन्।



यसरी कुनै पनि त्रिभुजका तीनओटै कोण अर्को त्रिभुजका तीनओटै कोणसँग क्रमशः बराबर भएमा ती दुई त्रिभुज समरूप हुन्छन् । माथिका त्रिभुज ABC र PQR मा ∠A र ∠P, ∠B र ∠Q, ∠C र ∠R सङ्गति कोण हुन् ।

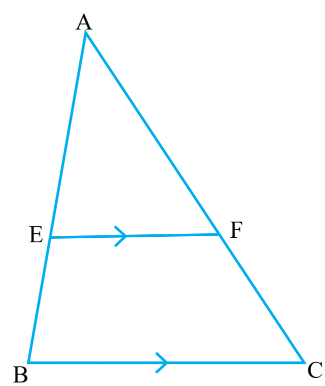
यदि दुईओटा त्रिभुजका सङ्गति कोण बराबर भएमा ती त्रिभुज समरूप हुन्छन्।

समरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजाको सम्बन्ध

क्रियाकलाप 3

एउटा त्रिभुज ABC लिनुहोस्। सेट स्क्वायरको प्रयोग गरी BC सँग समानान्तर हुने गरी रेखाखण्ड EF खिच्नुहोस्। अब त्यहाँ दुईओटा त्रिभुज ABC र त्रिभुज AEF देखिन्छन् । के त्रिभुज AEF र ABC समरूप छन् ?अब ती दुई त्रिभुजका भुजा AB, BC, AC तथा AE, EF, AF को लम्बाइ नाप्नुहोस् ।

अब फेरि $\frac{AE}{AB}, \frac{EF}{BC}$ र $\frac{AF}{AC}$ पत्ता लगाउनुहोस् र भुजाका सम्बन्धको बारेमा कक्षामा छलफल गरी प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

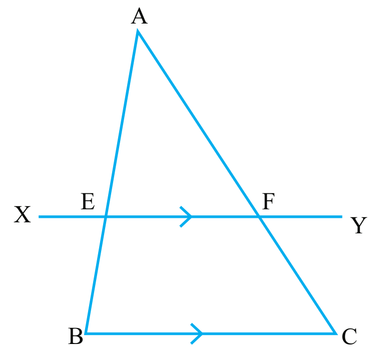


यदि दुईओटा त्रिभुज समरूप छन् भने सङ्गति भुजाको अनुपात बराबर हुन्छ ।

माथिको चित्रमा $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC}$ हुन्छ। यसलाई $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{AF}$ पनि लेख्न सकिन्छ।

साध्य 1

त्रिभुजको एउटा भुजासँग समानान्तर हुने गरी खिचिएको रेखाले बाँकी दुई भुजालाई समान अनुपातमा विभाजन गर्दछ ।



यहाँ,

थाहा दिइएको : त्रिभुज ABC मा BC सँग समानान्तर हुने गरी खिचिएको रेखा XY ले AB र AC लाई क्रमशः E र F मा काटेको छ ।

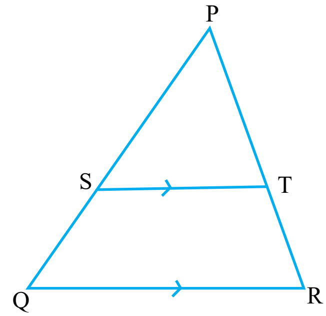
प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

प्रमाण :

	तथ्य		कारण
1.	ΔABC र ΔAEF मा	1.	
(i)	$\angle ABC = \angle AEF$ (को.)	(i)	सङ्गत कोण भएकाले (XY ∥ BC)
(ii)	$\angle ACB = \angle AFE$ (को.)	(ii)	सङ्गत कोण भएकाले (XY ∥ BC)
(iii)	$\angle BAC = \angle EAF$ (को.)	(iii)	साझा कोण
2.	$\Delta ABC \sim \Delta AEF$	2.	दुईओटा त्रिभुजका तीनओटै कोण अलग अलग भएकाले
3.	$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$ अथवा, $\frac{AE+EB}{AE} = \frac{AF+FC}{AF}$ अथवा, $\frac{AE}{AE} + \frac{EB}{AE} = \frac{AF}{AF} + \frac{FC}{AF}$ अथवा, $1 + \frac{EB}{AE} = 1 + \frac{FC}{AF}$ अथवा, $\frac{EB}{AE} = \frac{FC}{AF}$ अथवा, $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$	3.	समरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजाको अनुपात

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 1



दिइएको चित्रमा त्रिभुज PQR र PST समरूप त्रिभुज हुन्। जसमा PQ = 8 cm, PR = 6 cm र PT = 4 cm भए

(क) PS को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस्।

(ख) यदि ST = 6 cm भए QR को लम्बाइ कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ त्रिभुज PQR र PST समरूप त्रिभुज हुन्।

तसर्थ,

$$\frac{PQ}{PS} = \frac{PR}{PT} = \frac{QR}{ST} \text{ हुन्छ।}$$

अथवा, $\frac{8\text{ cm}}{PS} = \frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{QR}{6\text{ cm}}$

(क) पहिलो दुई अनुपातलाई लिँदा,

$$\frac{8\text{ cm}}{PS} = \frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}}$$

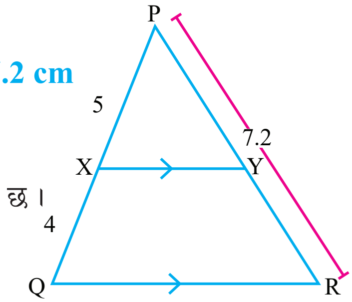
अथवा, $PS = \frac{8\text{ cm} \times 4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 5.34\text{ cm}$

(ख) फेरि दोस्रो र अन्तिम अनुपातलाई लिँदा,

$$\frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{QR}{6\text{ cm}}$$

अथवा, $QR = \frac{6\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 9\text{ cm}$

उदाहरण 2



सँगैको चित्रमा XY||QR, PX र XQ को अनुपात 5 : 4 र PR = 7.2 cm भए PY को मान कति होला ?

समाधान

यहाँ चित्रअनुसार, XY||QR र PX : XQ = 5 : 4, PR = 7.2 cm छ ।

भने PY = ?

मानौँ PY = x cm तसर्थ

YR = 7.2 cm – x cm

हामीलाई थाहा छ, $\frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$

अथवा, $\frac{5}{4} = \frac{x}{7.2 - x}$

अथवा, $36 - 5x = 4x$

अथवा, $9x = 36$

$\therefore x = PY = 4$ cm

वैकल्पिक तरिका

$\frac{PX}{PQ} = \frac{PY}{PR}$ [ΔPXY र ΔPQR समरूप भएकाले]

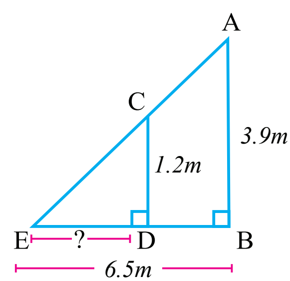
अथवा, $\frac{5}{9} = \frac{PY}{7.2}$

अथवा, 9PY = 36

अथवा, 9 PY = 36

अथवा, PY = 4 cm

उदाहरण 3



दीपिकाको उचाइ 1.2 मिटर छ । उनी 3.9 मिटर अग्लो खम्बा अगाडि उभिएकी छिन् । उक्त खम्बाको छायाको लम्बाइ 6.5 मिटर भएको समयमा उनीले बनाएको छाया कति लामो हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ चित्रमा AB बत्तीको खम्बाको उचाइ, CD दीपिकाको उचाइ, BE खम्बाको छायाको लम्बाइ र ED दीपिकाको छायाको लम्बाइ छ ।

प्रश्नानुसार,

AB = 3.9 m, BE = 6.5 m, CD = 1.2 m, ED = ?

ΔCDE र ΔABE समरूप छन् ।

[∵ दुवै समकोणी त्रिभुज हुन् र ∠E दुवैमा साझा कोण भएकाले]

अथवा, $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$ [∵समरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाको अनुपात भएकाले]

अथवा, $\frac{3.9}{1.2} = \frac{6.5}{DE}$

अथवा, $3.9\ DE = 6.5 \times 1.2$

अथवा, $DE = \frac{6.5 \times 1.2}{3.9} = 2$ m

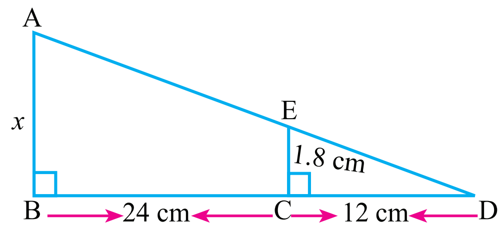
त्यसैले उक्त समयमा दीपिकाको छायाको लम्बाइ 2 मिटर हुन्छ ।

अभ्यास 13.4

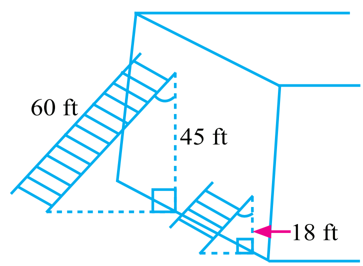
1. त्रिभुज ABC मा यदि BC || DE, AD : BD = 2 : 3 र EC = 12 cm भए AE को मान कति होला ?

2. त्रिभुज XYZ मा यदि YZ || PQ, XQ : QZ = 3:5 र PY = 7.5 cm भए XY को मान कति होला ?

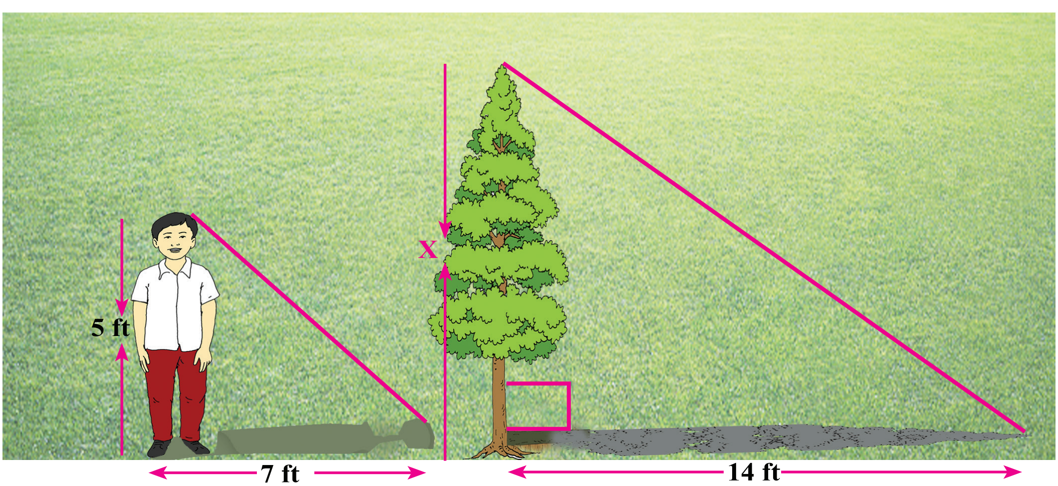
3. **दिइएको चित्रबाट x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :**



4. **दुबै भऱ्याङले भित्तामा बनाएका कोण बराबर छन् । सँगैको चित्रमा सानो भऱ्याङको लम्बाइ कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् :**

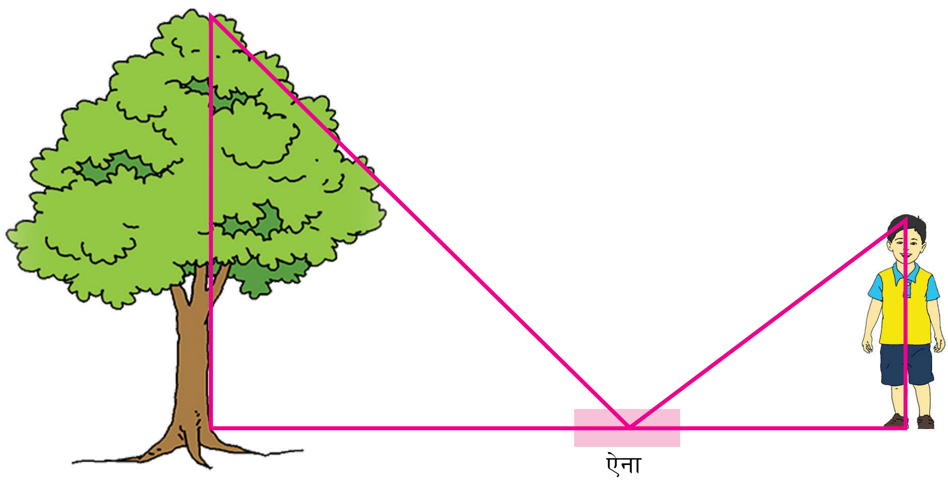


5. (क) **सँगैका चित्रमा रूखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् :**



(ख) **एउटा 20 m अग्लो स्तम्भको छायाको लम्बाइ 30 m हुँदा स्तम्भसँगै रहेको खम्बाको छायाको लम्बाइ 7.5 m हुन्छ भने खम्बाको उचाइ कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।**

6. **एन्जलले विद्यालयको खेलमैदानमा बिचमा ऐना राखेर ऐनामा अगाडि रहेको रूख पूरा नदेखेसम्म पछाडि हिँडे । अब उक्त अवस्थामा रूखको उचाइ कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, समूहमा छलफल गरी लेख्नुहोस् ।**



परियोजना कार्य

विद्यार्थीहरू उपयुक्त सङ्ख्यामा समूहमा बस्नुहोस् । तपाइँको उचाइ र तपाइँको छायाको नाप कुनै साथीलाई लिन लगाउनुहोस् । सोही समयमा तपाइँको विद्यालयको खेलमैदानको बिचमा रहेको भलिबल कोर्टको कुनै एउटा खम्बाको छायाको नाप लिनुहोस् । यी तीन नापका आधारमा हिसाब गरेर खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् र प्रक्रियासहित कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. 8 cm	2. 12 cm	3. 5.4 cm	4. 24 ft
5. (क) 10 ft	(ख) 5 m	6 . शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।	

पाठ 14 चतुर्भुज (Quadrilateral)

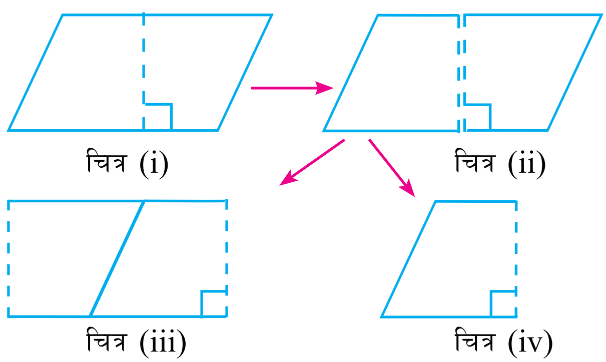
14.0 पुनरवलोकन (Review)

क्रियाकलाप 1

(क) कक्षामा विद्यार्थीहरू उपयुक्त समूहहरूमा बस्नुहोस् ।

(ख) प्रत्येक समूहले मेटाकार्डको प्रयोग गरी एउटा समानान्तर चतुर्भुज तयार गर्नुहोस् ।

(ग) त्यसलाई बिचबाट चित्रमा देखाएजस्तै दुई भागमा काट्नुहोस् ।



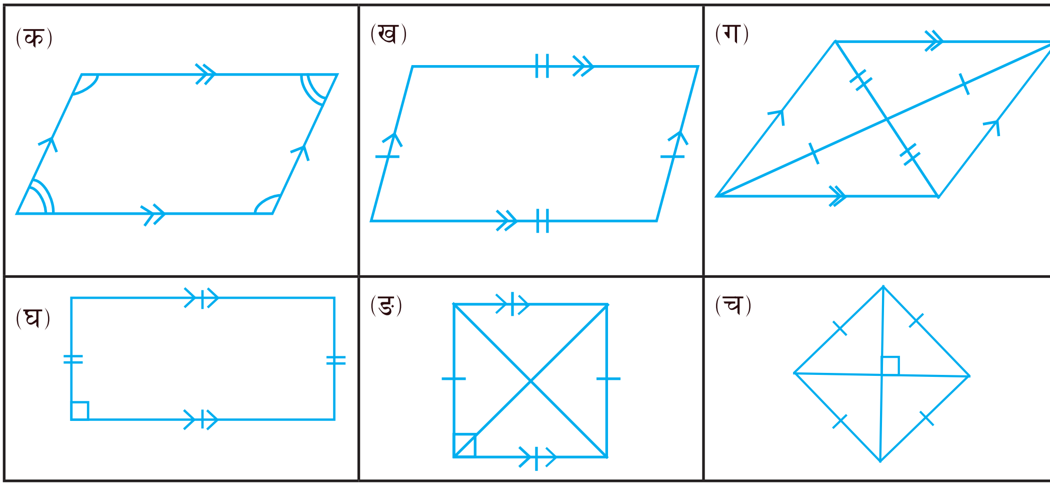
(घ) ती दुई टुक्रालाई माथिको चित्र (iii) मा देखाए जस्तै गरी जोड्नुहोस् । कस्तो चित्र बन्छ, समूहमा छलफल गरी तिनीहरूका भुजा तथा कोणका बारेमा निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) फेरि माथिका चित्र (ii) का टुक्रालाई चित्र (iv) मा देखाइए जस्तै गरी खप्टाउनुहोस् र चित्र (i) का कोणको सम्बन्ध कस्तो पाउनुभयो ? समूहमा निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

14.1 समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूको परीक्षण (Verification of properties of parallelogram)

क्रियाकलाप 2

तल दिइएका चित्रहरूलाई कक्षाकोठाका भित्ताहरूमा विभिन्न फरक फरक ठाउँमा एक एकओटा छुट्टाछुट्टै टाँस्नुहोस् । एउटै बेन्चमा बसेका साथीका समूहले पालैपालो गर्दै उक्त चित्र अवलोकन गर्नुहोस् । प्रत्येक चित्रको नाम, भुजा र कोणका नापका सम्बन्धका बारेमा निष्कर्ष आआफ्नो कपीमा लेख्नुहोस् । सबै चित्रहरूले के के देखाउन खोजेका छन्,आआफ्नो समूहमा छलफल गरी चित्रसहित कापीमा बुदाँगत रूपमा लेख्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

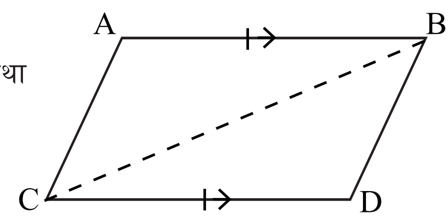


साध्य 1

दुईओटा बराबर र समानान्तर रेखाखण्डका एकैतिरका छेउ छेउका बिन्दु जोड्ने रेखाखण्ड पनि बराबर र समानान्तर नै हुन्छन् ।

थाहा दिइएको,

AB = CD र AB // CD छन् । साथै छेउ A र C तथा B र D पनि जोडिएका छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने,

AC = BD र AC // BD

रचना : बिन्दु B र C जोडौँ ।

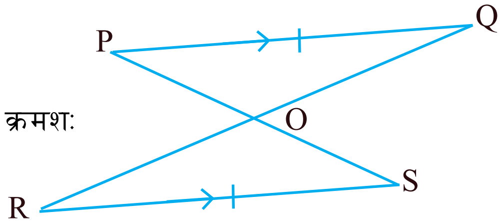
प्रमाण

	तथ्य		कारण
1.	ΔABC र ΔBCD मा	1.	
(i) (ii) (iii)	AB = CD (भु.) ∠ABC = ∠BCD (को) BC = BC (भु.)	(i) (ii) (iii)	थाहा दिइएको AB//CD मा एकान्तर कोण साझा भुजा
2.	ΔABC ≅ ΔBCD	2.	भु. को. भु. तथ्यअनुसार
3.	AC = BD	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजा बराबर हुन्छन् ।
4.	∠ACB = ∠CBD	4.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति कोण बराबर हुन्छन् ।
5.	AC // BD	5.	एकान्तर कोण बराबर भएकाले
6.	AC = BD र AC // BD	6.	तथ्य 3 र 6 बाट

प्रमाणित भयो ।

साध्य 2

बराबर र समानान्तर रेखाखण्डका विपरीततिरका छेउछेउका बिन्दु जोड्ने रेखाखण्डहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।



थाहा दिइएको,

PQ = RS र PQ // RS छ । जसमा विपरीत छेउ क्रमश: P र S तथा Q र R जोडिएका छन् । रेखाखण्ड PS र QR बिन्दु O मा काटिएका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने,

PO = OS र QO = OR अर्थात, PS र QR आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।

प्रमाण

	तथ्य		कारण
1.	ΔPOQ र ΔROS मा	1.	
(i) (ii) (iii)	$\angle$OPQ = $\angle$OSR (को) PQ = RS (भु.) $\angle$PQO = $\angle$SRO (को)	(i) (ii) (iii)	PQ//RS मा बनेका एकान्तर कोण थाहा दिइएको PQ//RS मा बनेका एकान्तर कोण
2.	ΔPOQ $\cong$ ΔROS	2.	को. भु. को. तथ्यअनुसार
3.	PO= OS , QO =OR	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजा बराबर हुन्छन् ।

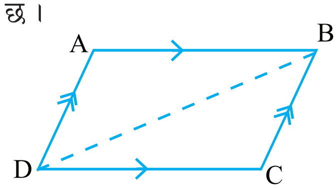
प्रमाणित भयो ।

साध्य 3

समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजा र सम्मुख कोण बराबर हुन्छन् ।

थाहा दिइएको,

समानान्तर चतुर्भुज ABCD छ जसमा AB // DC र AD // BC छ ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने,

1. AB = DC, AD = BC
2. $\angle$ABC = $\angle$ADC, $\angle$DAB = $\angle$BCD

रचना : बिन्दु B र D जोडौँ ।

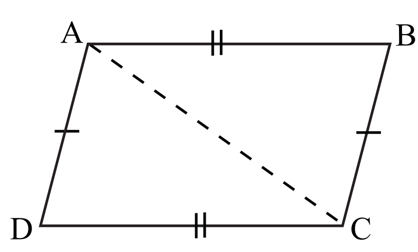
प्रमाण

	तथ्य		कारण
1.	ΔABD र ΔBCD मा	1.	
(i). (ii) (iii)	$\angle ABD = \angle BDC$ (को.) $BD = BD$ (भु.) $\angle ADB = \angle DBC$ (को)	(i) (ii) (iii)	AB//DC मा बनेका एकान्तर कोण साझा भुजा AD//BC मा बनेका एकान्तर कोण
2.	$\Delta ABD \cong \Delta BCD$	2.	को. भु. को. तथ्यअनुसार
3.	$AB = DC$ र $AD = BC$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजा बराबर हुन्छन् ।
4.	$\angle DAB = \angle BCD$ $\angle ABD = \angle BDC$ $\angle ADB = \angle DBC$	4.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति कोण बराबर हुन्छन् ।
5.	$\angle ABD + \angle DBC =$ $\angle BDC + \angle ADB$	5.	बराबर कोणमा बराबर कोण जोड्दा बराबर नै हुन्छ ।
6.	$\angle ABC = \angle ADC$	6.	तथ्य 5 बाट
7.	$AB = DC, AD = BC$ र $\angle ABC$ $= \angle ADC, \angle DAB = \angle BCD$	7.	तथ्य 3, 4 र 6 बाट

प्रमाणित भयो ।

साध्य 4

सम्मुख भुजा बराबर भएको चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।



थाहा दिइएको,

चतुर्भुज ABCD छ जसमा $AB = CD$ र $AD = BC$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने,

ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

अर्थात $AB // CD$, $AD // BC$

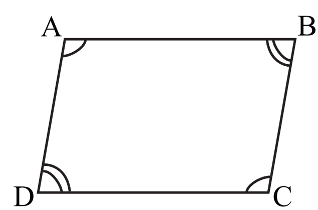
रचना : बिन्दु A र C जोडौँ ।

प्रमाण

	तथ्य		कारण
1.	ΔABC र ΔACD मा	1.	
(i) (ii) (iii)	$AB = CD$ (भु.) $AD = BC$ (भु.) $AC = AC$ (भु.)	(i) (ii) (iii)	थाहा दिइएको थाहा दिइएको साझा भुजा
2.	$\Delta ABC \cong \Delta ACD$	2.	भु. भु. भु. तथ्यअनुसार
3.	$\angle ACB = \angle DAC$ $\angle BAC = \angle ACD$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति कोण बराबर हुन्छन् ।
4.	$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$	4.	एकान्तर कोण बराबर भएकाले ।

प्रमाणित भयो ।

साध्य 5



सम्मुख कोण बराबर भएको चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

थाहा दिइएको,

चतुर्भुज ABCD मा $\angle ABC = \angle ADC$ र $\angle DAB = \angle BCD$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने,

ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

प्रमाण

	तथ्य		कारण
1.	$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA$ $+ \angle DAB = 360^0$	1.	चतुर्भुजका भित्री कोणको योगफल $360°$ हुन्छ ।
2.	$\angle ABC + \angle BCD$ $+ \angle ABC + \angle BCD = 360°$ अथवा, $2\angle ABC + 2\angle BCD = 360^0$ अथवा, $\angle ABC + \angle BCD = 180^0$	2.	$\angle ABC = \angle CDA$ र $\angle DAB = \angle BCD$ भएकाले
3.	$AB \parallel CD$	3.	क्रमागत भित्रीकोणको योगफल $180°$ भएकाले
4.	त्यसै गरी $\angle BCD + \angle CDA = 180^0$	4.	कारण 1, 2, 3 जस्तै
5.	$BC \parallel AD$	5.	क्रमागत भित्री कोणको योगफल $180°$ भएकाले
6.	$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$	6.	तथ्य 3 र 5 बाट
7.	ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।	7.	तथ्य 6 बाट

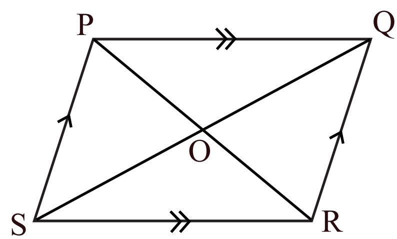
प्रमाणित भयो ।

साध्य 6

समानान्तर चतुर्भुजका विकर्ण आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।

थाहा दिइएको,

PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो जसमा विकर्ण PR र QS बिन्दु O मा प्रतिच्छेदन भएका छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने,

PO = OR र SO = OQ

प्रमाण

	तथ्य		कारण
1.	ΔPOQ र ΔROS मा	1.	
(i) (ii) (iii)	∠OPQ = ∠ORS (को.) PQ = RS (भु.) ∠OQP = ∠OSR (को.)	(i) (ii) (iii)	PQ // SR मा एकान्तर कोण समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजा PQ // SR मा एकान्तर कोण
2.	ΔPOQ ≅ ΔROS	2.	को. भु. को. तथ्यअनुसार
3.	PO = OR, QO = OS	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजा बराबर हुन्छन् ।

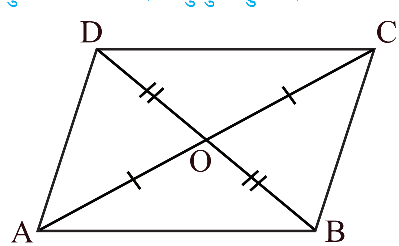
प्रमाणित भयो ।

साध्य 7 (साध्य 6 को बिलोम)

कुनै चतुर्भुजका विकर्ण आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् भने उक्त चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

थाहा दिइएको,

चतुर्भुज ABCD मा AO = OC र DO = OB छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने,

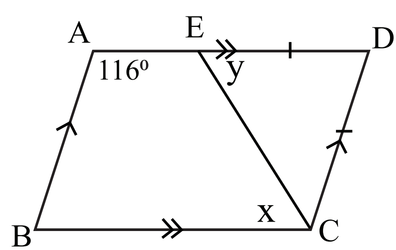
ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

प्रमाण

	तथ्य		कारण
1.	ΔAOB र ΔDOC मा	1.	
(i) (ii) (iii)	$AO = OC$ (भु.) $\angle AOB = \angle COD$ (को.) $OB = OD$ (भु.)	(i) (ii) (iii)	थाहा दिइएको शीर्षाभिमुख कोण थाहा दिइएको
2.	$\Delta AOB \cong \Delta DOC$	2.	भु. को. भु. तथ्यअनुसार
3.	$AB = DC$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजा बराबर हुन्छन् ।
4.	$\angle OBA = \angle ODC$	4.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गतिकोण बराबर हुन्छन् ।
5.	$AB // DC$	5.	एकान्तर कोण बराबर भएकाले
6.	$AD // BC, AD = BC$	6.	$AB // DC$ / $AB = DC$ भएकाले
7.	ABCD एउटा स.च. हो ।	7.	सम्मुख भुजा बराबर र समानान्तर भएकाले ।

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 1



दिइएको चित्रमा x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

हामीलाई थाहा छ,

(i) $\angle BAE + \angle EDC = 180°$

[$\because$ AB // CD मा क्रमागत भित्री कोण]

अथवा, $\angle EDC = 180° - \angle BAE = 180° - 116° = 64°$

$\angle DCE = \angle DEC = y$ **[$\because$ DE = DC भएकाले]**

(ii) $\angle DEC + \angle ECD + \angle EDC = 180°$ **[$\because$ ΔCDE का भित्री कोणको योगफल]**

अथवा, $y + \angle ECD + 64° = 180°$

अथवा, $y + y = 180° - 64°$ **[$\because$ CD = DE भएकाले]**

अथवा, $2y = 116°$

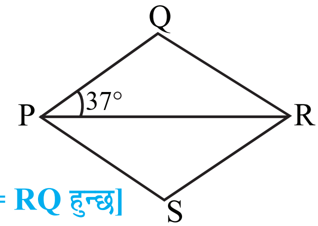
त्यसकारण $y = 58°$

$\angle BCD = \angle BAD$ **[$\because$ स.च. ABCD का सम्मुख कोण]**

फेरि $x + y = 116°$

अथवा, $x = 116° - y = 116° - 58° = 58°$

उदाहरण 2



सँगैको समबाहु चतुर्भुज PQRS मा $\angle PSR$ को नाप पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $\angle QPR = \angle QRP = 37°$ [$\because$ PQRS समबाहु चतुर्भुज PR= RQ हुन्छ]

$\angle QPR + \angle QRP + \angle PQR = 180°$ [$\because \Delta PQR$ का भित्री कोणको योगफल]

अथवा, $37° + 37° + \angle PQR = 180°$

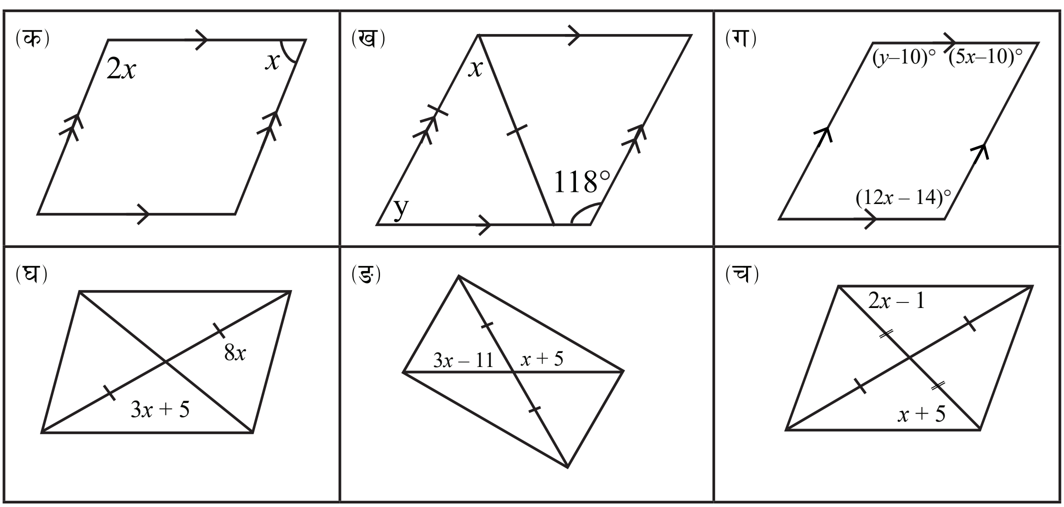
अथवा, $\angle PQR = 180° - 74° = 106°$

फेरि $\angle PSR = \angle PQR = 106°$ [$\because$ समबाहु चतुर्भुज PQRS का सम्मुख कोण]

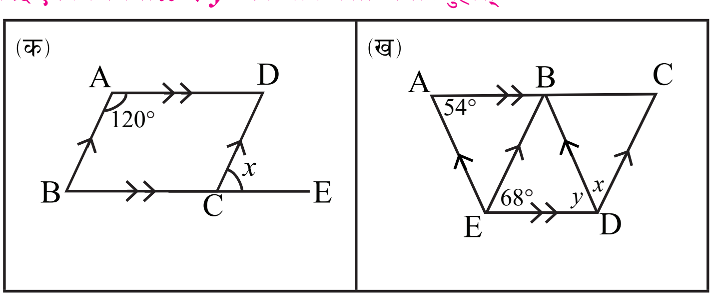
अत: $\angle PSR = 106°$

अभ्यास 14

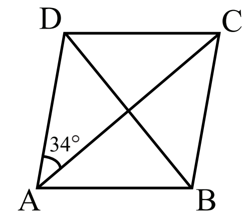
1. तल दिइएका चित्र समानान्तर चतुर्भुज हुनका लागि x र y को मान कति हुनुपर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् :



2. दिइएका चित्रमा x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

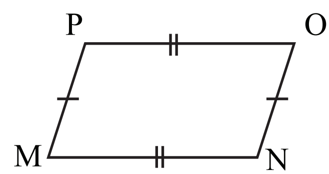


3. सगैको चित्र समबाहु चतुर्भुज हो। यदि $\angle DAC = 34°$ भए, $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ र $\angle CDA$ को पत्ता लगाउनुहोस्।

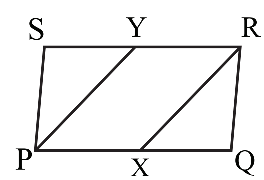


4. यदि एउटा समानान्तर चतुर्भुजका एक जोडी विपरीत कोण क्रमशः $(63 - 3x)°$ र $(4x - 7)°$ भएमा त्यसका सबै कोणको मान पत्ता लगाउनुहोस्।

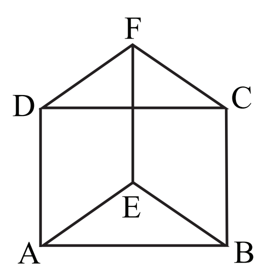
5. सँगैको चित्रमा MN = OP र PM = ON छ भने MNOP समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



6. PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो। X र Y रेखाखण्ड PQ र RS का मध्यबिन्दु हुन् भने PXRY समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



7. दिइएको चित्रमा AD = EF, AD // EF, EF = BC / EF // BC छ भने ABCD समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



8. एउटा चतुर्भुज SLOW छ जसमा SL = LO = OW = SW छ भने उक्त चतुर्भुजलाई समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

9. एउटा चतुर्भुज MOAT छ जसमा विकर्ण MA ले OT लाई बिन्दु R मा काटेको छ र MR = RA र TR = OR छ भने उक्त चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

परियोजना कार्य

उपयुक्त सङ्ख्यामा विद्यार्थीहरू समूहमा बस्नुहोस् । सबै जना विद्यालयको खेलमैदानमा जानुहोस् । प्रत्येक समूहले डोरीको सहयोगबाट समानान्तर चतुर्भुज र त्यसका विकर्ण बनाउनुहोस् । अब यसरी बनेको समानान्तर चतुर्भुजको अवलोकन गरेर तथा नाप लिएर उक्त समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजा र विकर्णको सम्बन्ध खोजी गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

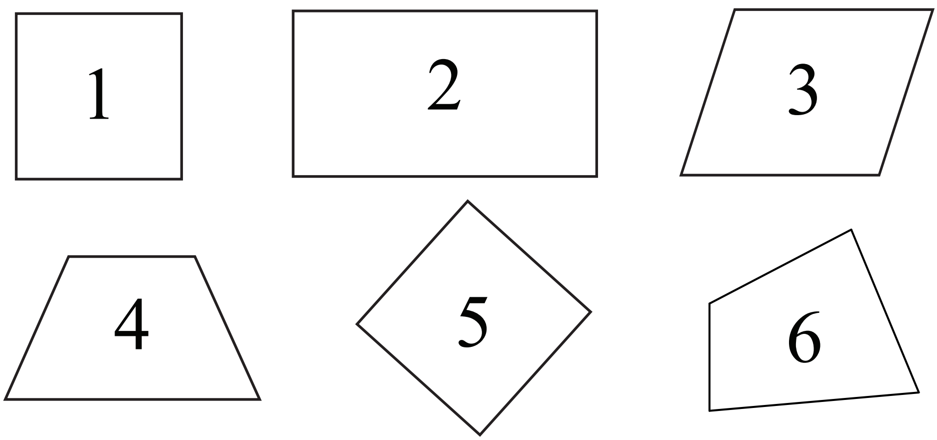
1. (क) $60°$ (ख) $x = 56°, y = 62°$ (ग) $x = 12°, y = 140°$
(घ) $x = 1$ (ङ) $x = 8$ (च) $x = 6$ 2. (क) 60
(ख) $x = 58°, y = 54°$ 3. $68°, 112°, 34°, 112°$
4. $33°$ र $147°$ 5-9. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 15

रचना
(Construction)

15.0 पुनरवलोकन (Review)

कक्षामा विद्यार्थीलाई ६/६ जनाको समूहमा विभाजन गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहका सदस्यहरूलाई 1, 2, 3, 4, 5 र 6 नामकरण गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहमा शिक्षकबाट प्राप्त तलका चित्रहरूमध्ये आफ्नो नामकरण अनुसारको चतुर्भुजको चित्र लिनुहोस् ।



अब सबै समूहका एउटै नम्बर भएका सदस्य एउटा समूहमा बस्नुहोस् । जस्तै: सबै समूहका 1 हरू एउटा समूहमा, 2 हरू अर्को समूहमा बस्नुहोस् । उक्त नयाँ समूहमा आफूलाई परेको चतुर्भुजको अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नको उत्तर खोज्नुहोस् । समूहमा छलफल गरेर साझा निष्कर्ष तयार गर्नुहोस् :

(क) प्रत्येक चतुर्भुजको नाम के हो ?

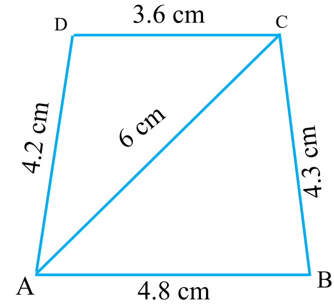
(ख) चतुर्भुजका विशेषताहरू के के छन् ?

नयाँ समूहमा निष्कर्ष तयार पारिसकेपछि पुनः पुरानो समूहमा फर्केर आफूले सिकेका कुरालाई पालैपालो प्रस्तुत गर्नुहोस् र सबै चतुर्भुजहरूका बारेमा समूहको निष्कर्ष तयार गर्नुहोस् । अन्त्यमा कक्षाकोठामा सममूहगत रूपमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

15.1 विषमबाहु चतुर्भुजको रचना (Construction of scalene quadrilateral)

(क) चारओटा भुजा र एउटा विकर्णको नाप दिइएको अवस्थामा (When the measure of four sides and a diagonal are given)

AB = 4.8 cm, BC = 4.3 cm, CD = 3.6 cm, AD = 4.2 cm र विकर्ण AC = 6 cm. भएको चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।



खेस्रा चित्र

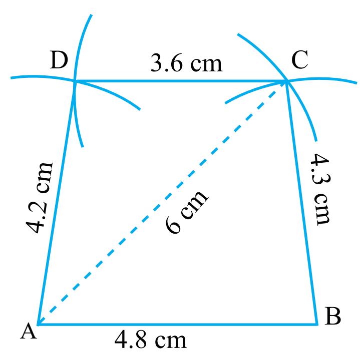
समाधान

सर्वप्रथम दिइएको नाप भएको समबाहु चतुर्भुजको नमुना खाका तयार गरी नामकरण गर्नुहोस् ।

चरण

1. सिधारेखा AB = 4.8 cm खिच्नुहोस् ।
2. A बाट 6 cm बराबरको अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् ।
3. B बाट 4.3 cm बराबरको अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस्। पहिलेको चापलाई काटिएको बिन्दुलाई C नाम दिनुहोस् ।
4. B र C अनि A र C जोड्नुहोस् ।
5. फेरि A बाट 4.2 cm बराबरको अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् ।
6. C बाट 3.6 cm अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् र पहिले को चापलाई काटेको बिन्दुलाई D नाम दिनुहोस् ।
7. बिन्दु A र D, C र D जोड्नुहोस् ।

आवश्यक चतुर्भुज ABCD तयार भयो ।



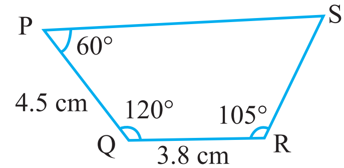
(ख) दुईओटा आसन्न भुजा र तीनओटा कोण दिइएको अवस्थामा (When two adjacent sides and three angles are given)

PQ = 4.5 cm, ∠PQR = 120°, QR = 3.8 cm, ∠QRS = 105° र ∠QPS = 60° भएको एउटा चतुर्भुज PQRS को रचना गर्नुहोस् ।

समाधान

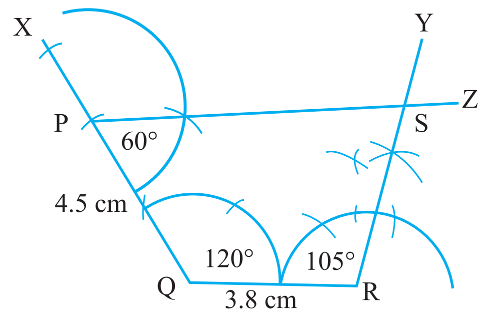
सर्वप्रथम दिइएको नाप भएको चतुर्भुजको नमुना खाका तयार गरी नामकरण गर्नुहोस् ।

चरण



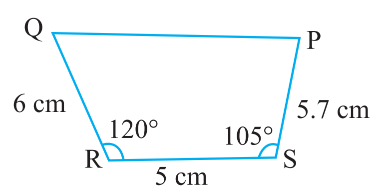
1. QR = 3.8 cm भएको रेखाखण्ड खिच्नुहोस् ।
2. बिन्दु Q मा कम्पासको सहायताले ∠RQX = 120° को कोण खिच्नुहोस् ।
3. विन्दु Q लाई केन्द्र मानेर 4.5 cm को अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् र P नाम दिनुहोस् ।
4. विन्दु R मा कम्पासको प्रयोग गरी 105° को ∠QRY खिच्नुहोस् ।
5. विन्दु P मा कम्पासको सहायताले ∠QPZ = 60° खिच्नुहोस्, जहाँ RY र PZ विन्दु S मा प्रतिच्छेदन हुन्छ ।

   आवश्यक चतुर्भुज PQRS तयार भयो ।



(ग) तीनओटा भुजा र दुईओटा कोण दिइएको अवस्थामा (When three sides and two angles are given)

QR = 6 cm, RS = 5 cm, PS = 5.7 cm ∠S = 105°, ∠R = 120° भएको चतुर्भुज PQRS को रचना गर्नुहोस् ।

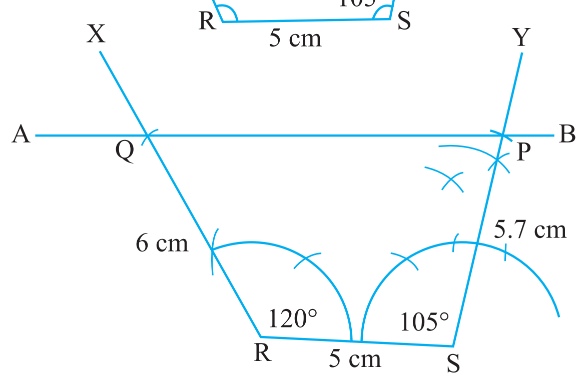


समाधान

सर्वप्रथम दिइएको नाप भएका चतुर्भुजको नमुना खाका तयार गरी नामकरण गर्नुहोस् ।

चरण

1. RS = 5 cm भएको रेखाखण्ड खिच्नुहोस् ।
2. कम्पासको प्रयोग गरी बिन्दु R र S मा क्रमश: 120° र 105° का कोण खिच्नुहोस् ।
3. बिन्दु R लाई केन्द्र मानेर 6 cm को अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस्, जुन बिन्दु Q मा काटिन्छ ।



4. बिन्दु S लाई केन्द्र मानेर 5.7 cm बराबर अर्धव्यास लिएर बिन्दु P मा चाप काट्नुहोस् ।
5. बिन्दु P र Q लाई जोड्नुहोस् ।

∴ आवश्यक चतुर्भुज PQRS तयार भयो ।

अभ्यास 15.1

दिइएका अवस्थामा चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् :

1. चतुर्भुज ABCD जसमा AB = AD = 3 cm, BC = 2.5 cm, AC = 4 cm र BD = 5 cm
2. चतुर्भुज MNOP जसमा MO = MP = 6 cm, NO = 7.5 cm, OP = 5 cm र NP = 10 cm
3. चतुर्भुज PQRS जसमा PQ = 3.5 cm, QR = 2.5 cm , RS = 4 cm, $\angle Q = 75^o$ र $\angle R = 120^o$
4. चतुर्भुज ABCD जसमा AB = 3.6 cm, BC = 3.3 cm, AD = 2.7 cm, विकर्ण AC = 4.6 cm BD = 4 cm
5. चतुर्भुज PQRS जसमा PQ = 5 cm, QR = 6.5 cm, $\angle P = \angle R = 100°$ र $\angle S = 75°$
6. चतुर्भुज ABCD जसमा AB = 3.8 cm, BC = 3.4 cm, CD = 4.5 cm, AD = 5 cm र $\angle B = 60°$

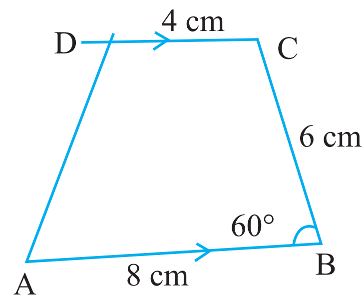
उत्तर

रचना गरेर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

15.2 समलम्ब चतुर्भुजको रचना (Construction of trapezium)

(क) तीनओटा भुजा र एउटा कोणको नाप दिइएमा (When length of three sides and measurement of an angle are given)

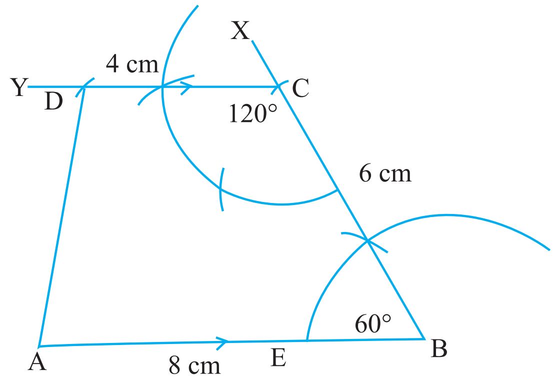
AB || CD, AB = 8 cm, BC = 6 cm, CD = 4 cm र $\angle ABC = 60°$ भएको समलम्ब चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।



समाधान

सर्वप्रथम दिइएको नापको समलम्ब चतुर्भुजको नमुना खाका तयार गरी नाम लेख्नुहोस् ।

चरण

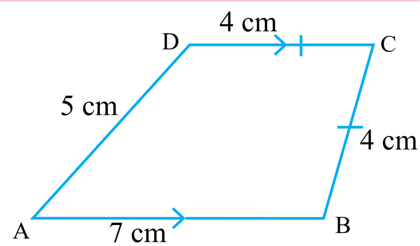


1. AB = 8 cm लम्बाइ भएको रेखाखण्ड खिच्नुहोस् ।
2. बिन्दु B मा ∠ABX = 60° कोण खिची, 6 cm को अर्धव्यास खिच्नुहोस् जुन बिन्दु C मा काटिन्छ ।
3. बिन्दु C बाट ∠BCY = 120° कोण खिच्नुहोस् ।
4. बिन्दु C बाट 4 cm को अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् जुन D मा काटिन्छ ।
5. बिन्दु A र D जोड्नुहोस् ।

∴ आवश्यक समलम्ब चतुर्भुज ABCD तयार भयो ।

(ख) चारओटा भुजा दिइएको र समानान्तर भुजा तोकिएको अवस्थामा
(When all the four sides are given and the parallel sides are marked)

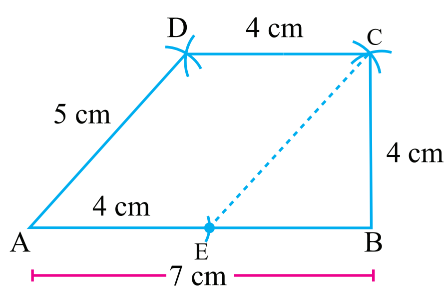
AB = 7 cm, BC = CD = 4 cm, DA = 5 cm र AB || CD भएको समलम्ब चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् :



समाधान

दिइएको नापको नमुना समलम्ब चतुर्भुज ABCD खिच्नुहोस्।

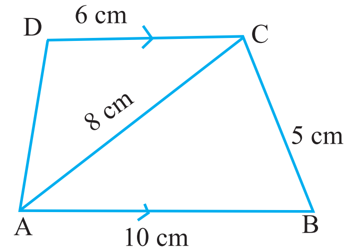
चरण



1. 7 cm लम्बाइ भएको रेखाखण्ड AB खिच्नुहोस् ।
2. AE = DC = 4 cm हुने गरी AB मा 4 cm मा बिन्दु E नामकरण गर्नुहोस् ।
3. बिन्दु E लाई केन्द्रबिन्दु मानेर 5 cm को अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् ।
4. फेरि B बाट 4 cm को अर्धव्यास लिएर पहिलो चापलाई काट्नुहोस् र काटिएको बिन्दुलाई C नाम दिनुहोस् ।
5. C लाई केन्द्र मानेर 4 cm को अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् ।
6. A केन्द्रबाट 5 cm को अर्धव्यास लिएर C केन्द्रबिन्दु लिएर काटेको चापलाई काट्नुहोस् र D नामकरण गर्नुहोस् ।
7. बिन्दु B र C, C र D तथा D र A जोड्नुहोस् ।

आवश्यक चतुर्भुज ABCD तयार भयो ।

(ग) तीनओटा भुजा र एउटा विकर्ण दिइएको अवस्थामा (When three sides and one diagonal are given)



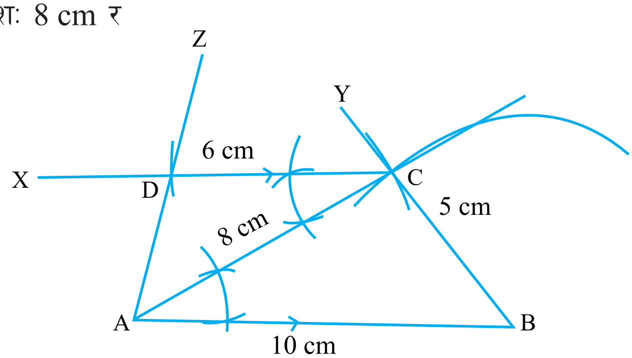
AB = 10 cm, BC = 5 cm, AC = 8 cm, CD = 6m र AB || CD भएको समलम्ब चतुर्भुज खिच्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको नापको नमुना समलम्ब चतुर्भुज ABCD खिच्नुहोस् ।

चरण

1. AB = 10 cm लम्बाइ भएको रेखाखण्ड खिच्नुहोस् ।
2. बिन्दु A र B लाई केन्द्र मानेर क्रमशः 8 cm र 5 cm अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस् र काटिएको बिन्दुलाई C नाम दिनुहोस् ।
3. बिन्दु A र C तथा B र C लाई जोड्नुहोस् ।
4. कोण स्थानान्तरण गरी ∠BAC को नाप बराबरको कोण ∠ACX खिच्नुहोस् ।



5. बिन्दु C बाट 6 cm को अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस्, जुन बिन्दु D मा काटिन्छ ।
6. बिन्दु D र A लाई जोड्नुहोस् ।

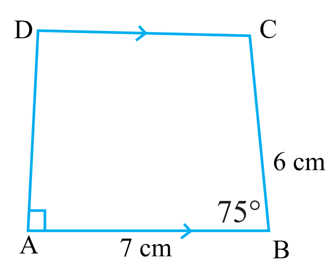
∴ आवश्यक समलम्ब चतुर्भुज ABCD तयार भयो ।

(घ) दुईओटा भुजा र दुईओटा कोण दिइएको अवस्थामा (When two sides and two angles are given)

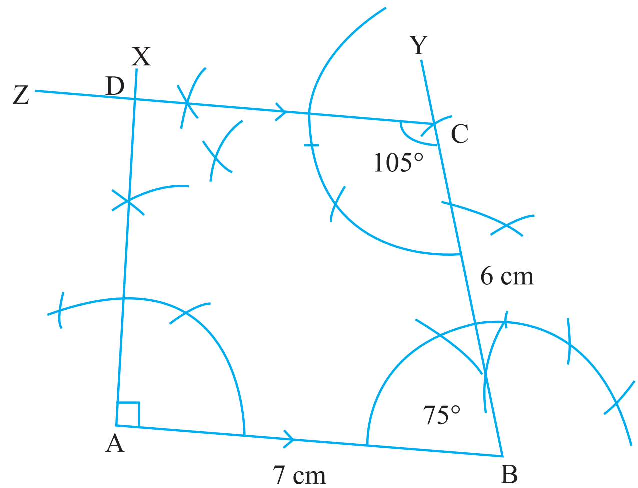
AB = 7 cm, BC = 6 cm, ∠BAD = 90° र ∠ABC = 75° भएको समलम्ब चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको नापको नमुना समलम्ब चतुर्भुज ABCD खिच्नुहोस् ।



चरण



1. AB = 7 cm लम्बाइ भएको रेखाखण्ड खिच्नुहोस् ।
2. बिन्दु A र B मा कम्पासको क्रमशः 90° र 75° को कोण ∠BAX र ∠ABY खिच्नुहोस् ।
3. बिन्दु B बाट 6 cm को अर्धव्यास लिएर चाप खिच्नुहोस्, जुन बिन्दु C मा काटिन्छ ।
4. बिन्दु C बाट कम्पासको प्रयोग गरी 105° को कोण खिच्नुहोस् जुन बिन्दु D मा काटिन्छ ।

आवश्यक समलम्ब चतुर्भुज ABCD तयार भयो ।

अभ्यास 15.2

दिइएका अवस्थामा समलम्ब चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् :

1. स.ल.च. ABCD जसमा AB = 6 cm, BC = 4 cm, CD = 3.2 cm, ∠B = 75° र DC // AB
2. स.ल.च. ABCD जसमा AB // DC, AB = 7 cm, BC = 5 cm, AD = 6.5 cm र ∠B = 60°
3. स.ल.च. ABCD जसमा AB // CD, AB = 8 cm, BC = 6 cm, CD = 4 cm र ∠C = 120°
4. स.ल.च. PQRS जसमा भुजाका लम्बाइ क्रमशः PQ = 10 cm, QR = 4 cm, RS = 6 cm र SP = 3 cm भएको जसमा PQ // SR

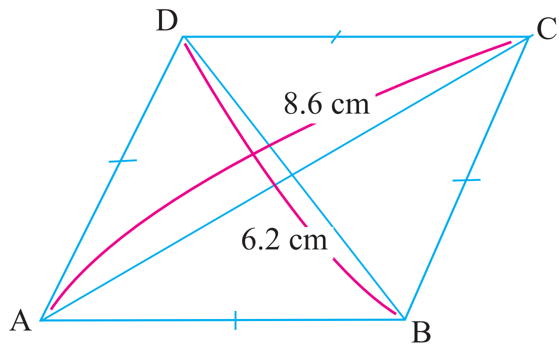
उत्तर

रचना गरेर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

15.3 समबाहु चतुर्भुजको रचना (Construction of rhombus)

(क) दुईओटा विकर्णका नापहरू दिइएको अवस्थामा (When the Length of two diagonals are given)

विकर्ण AC = 8.6 cm र BD = 6.2 cm भएको एउटा समबाहु चतुर्भुज ABCD को रचना गर्नुहोस् ।



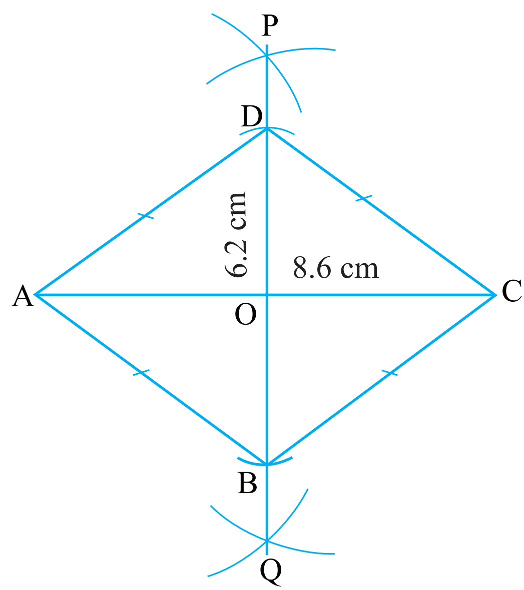
खेस्रा रचना

सर्वप्रथम दिइएको नापका आधारमा समबाहु चतुर्भुजको नमुना खाका तयार गरी नामकरण गर्नुहोस् ।

समबाहु चतुर्भुजको रचनाका चरण

1. एउटा सिधारेखा AC = 8.6 cm खिच्नुहोस् ।
2. कम्पासको मदतले उक्त AC रेखाको लम्बार्धक PQ को रचना गर्नुहोस् । लम्बार्धक PQ र रेखा AC काटिएको विन्दुलाई O नामकरण गर्नुहोस् ।
3. विन्दु O लाई केन्द्रविन्दु बनाइकन अर्धव्यास 3.1 cm हुने गरी (BD को आधा) OP तर्फ D विन्दु र OQ तर्फ B विन्दुमा चाप काट्नुहोस् ।
4. विन्दु A र B; B र C; C र D र D र A रुलरको सहायताले जोड्नुहोस् ।

   यसरी आवश्यक समबाहु चतुर्भुज ABCD को रचना भयो ।

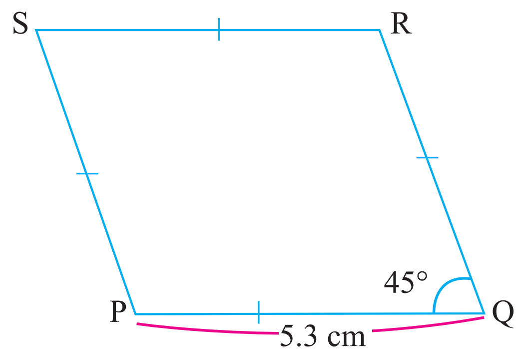


(ख) एउटा भुजा र एउटा शीर्षकोणको नाप दिइएको अवस्थामा (When a side length and an vertex angle are given)

भुजा PQ = 5.3 cm र शीर्षकोण PQR = 45° भएको एउटा समबाहु चतुर्भुज PQRS को रचना गर्नुहोस् ।

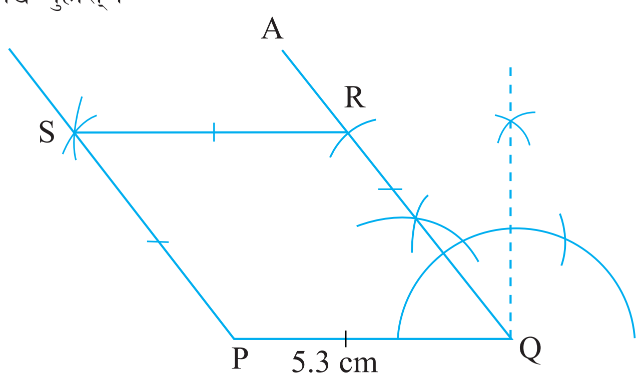
खेस्रा रचना

सर्वप्रथम दिइएको नापका आधारमा समबाहु चतुर्भुजको नमुना खाका तयार गरी नामकरण गर्नुहोस् ।



समबाहु चतुर्भुजको रचनाका चरण

1. एउटा सिधारेखा PQ = 5.3 cm खिच्नुहोस् ।
2. कम्पासको मदतले विन्दु Q मा ∠PQR = 45° हुनेगरी कोण तयार गर्नुहोस् ।
3. कम्पासको मदतले 5.3 cm नाप लिई QA रेखाको विन्दु R मा चाप काट्नुहोस् ।
4. सोही नापमा विन्दु P र R बाट कम्पासको मदतले एकअर्कासँग प्रतिच्छेदन हुने गरी विन्दु S पत्ता लगाउनुहोस् ।



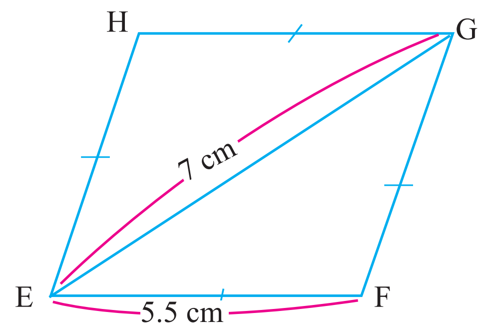
5. विन्दु P र S तथा R र S रुलरको सहायताले जोड्नुहोस् । यसरी आवश्यक समबाहु चतुर्भुज PQRS को रचना भयो ।

(ग) आधार भुजा र एउटा विकर्णको लम्बाइ दिइएको अवस्थामा (A side length and length of a diagonal are given)

भुजा EF = 5.5 cm र विकर्ण EG = 7 cm भएको एउटा समबाहु चतुर्भुज EFGH को रचना गर्नुहोस् ।

खेस्रा रचना

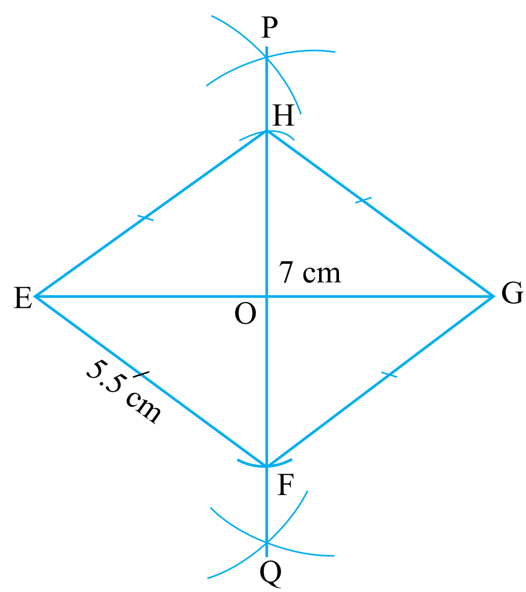
सर्वप्रथम दिइएको नापका आधारमा समबाहु चतुर्भुजको नमुना खाका तयार गरी नामकरण गर्नुहोस् ।



समबाहु चतुर्भुजको रचनाका चरण

1. एउटा सिधारेखा EG = 7 cm खिच्नुहोस् ।
2. कम्पासको मदतले उक्त EG रेखाको लम्बार्धक PQ को रचना गर्नुहोस् ।
3. विन्दु E बाट कम्पासको मद्दतले 5.5 cm को चाप OP र OQ दुवैतर्फ खिच्नुहोस् र उक्त प्रतिच्छेदित विन्दुलाई क्रमशः H र F नामकरण गर्नुहोस् ।
4. विन्दु E र F; F र G; G र H; र H र E रुलरको सहायताले जोड्नुहोस् ।

   यसरी आवश्यक समबाहु चतुर्भुज EFGH को रचना भयो ।

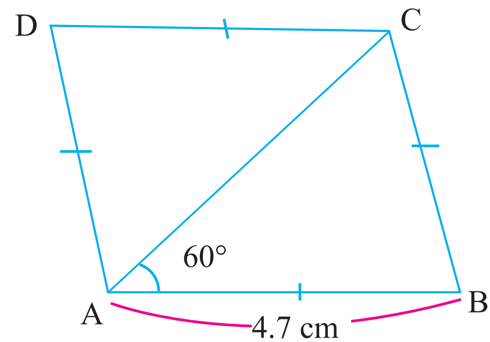


(घ) आधार भुजा र आधार भुजासँग विकर्णले बनाएको कोण दिइएको अवस्थामा (A side length and an angle between the side and diagonal are given)

भुजा AB = 4.7 cm र ∠CAB = 60° भएको एउटा समबाहु चतुर्भुज ABCD को रचना गर्नुहोस् ।

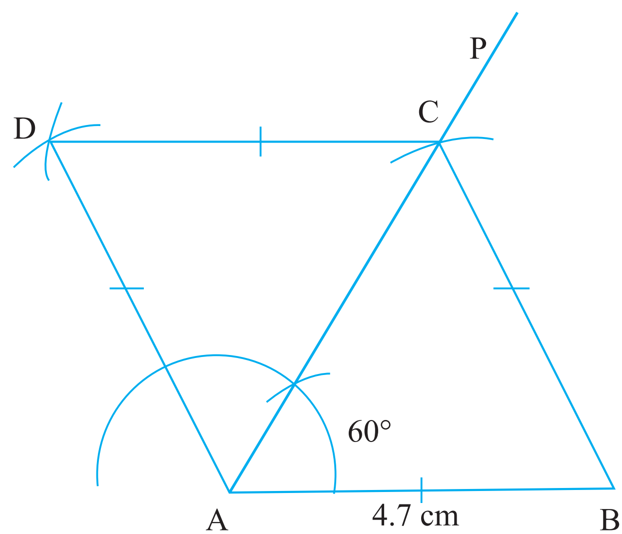
खेस्रा रचना

सर्वप्रथम दिइएको नापका आधारमा समबाहु चतुर्भुजको नमुना खाका तयार गरी नामकरण गर्नुहोस् ।



समबाहु चतुर्भुजको रचनाका चरण

1. एउटा सिधारेखा AB = 4.7 cm खिच्नुहोस् ।
2. कम्पासको मदतले विन्दु A मा ∠PAB = 60^0 हुनेगरी कोण तयार गर्नुहोस् ।
3. कम्पासको मदतले 4.7 cm नाप लिई B विन्दुबाट AP रेखामा चाप काट्नुहोस् । उक्त काटिएको विन्दुलाई C नामकरण गर्नुहोस् ।
4. सोही नापमा विन्दु A बाट माथितर्फ र विन्दु C बाट बाँयातर्फ कम्पासको मदतले एकअर्कासँग प्रतिच्छेदन हुने गरी विन्दु D पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. विन्दु B र C; C र D र A र D रुलरको सहायताले जोड्नुहोस् ।



यसरी आवश्यक समबाहु चतुर्भुज ABCD को रचना भयो ।

अभ्यास 15.3

दिइएका अवस्थामा समबाहु चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् :

1. (a) समबाहु चतुर्भुज PQRS जसका विकर्ण PR = 9.4 cm र QS = 7.2 cm

   (b) समबाहु चतुर्भुज WXYZ जसका विकर्ण WY = 6.6 cm र XZ = 4.8 cm

   (c) समबाहु चतुर्भुज ABCD जसका विकर्ण AC = 5.9 cm र BD = 6.8 cm

2. (a) समबाहु चतुर्भुज EFGH जसमा भुजा EF = 6.3 cm र शीर्षकोण $\angle E = 75°$

   (b) समबाहु चतुर्भुज ABCD जसमा भुजा BC = 5.5 cm र शीर्षकोण $\angle C = 60°$

   (c) समबाहु चतुर्भुज IJKL जसमा भुजा IJ = 5.1 cm र शीर्षकोण $\angle I = 105°$

   (d) समबाहु चतुर्भुज WXYZ जसमा भुजा WX = 6.2 cm र शीर्षकोण $\angle Y = 45°$

3. (a) समबाहु चतुर्भुज ABCD जसमा भुजा AB = 5.8 cm र विकर्ण BD = 7.3 cm

   (b) समबाहु चतुर्भुज PQRS जसमा भुजा QR = 4.3 cm र विकर्ण PR = 6.5 cm

   (c) समबाहु चतुर्भुज EFGH जसमा भुजा EF = 5.1 cm र विकर्ण EG = 8.2 cm

4. (a) समबाहु चतुर्भुज ABCD जसमा भुजा AB = 5.3 cm र $\angle ABD = 30°$

   (b) समबाहु चतुर्भुज PQRS जसमा भुजा QR = 6.1 cm र $\angle PQR = 75°$

   (c) समबाहु चतुर्भुज EFGH जसमा भुजा GH = 4.6 cm र $\angle GEF = 60°$

   (d) समबाहु चतुर्भुज WXYZ जसमा भुजा WX = 5.6 cm र $\angle WXZ = 45°$

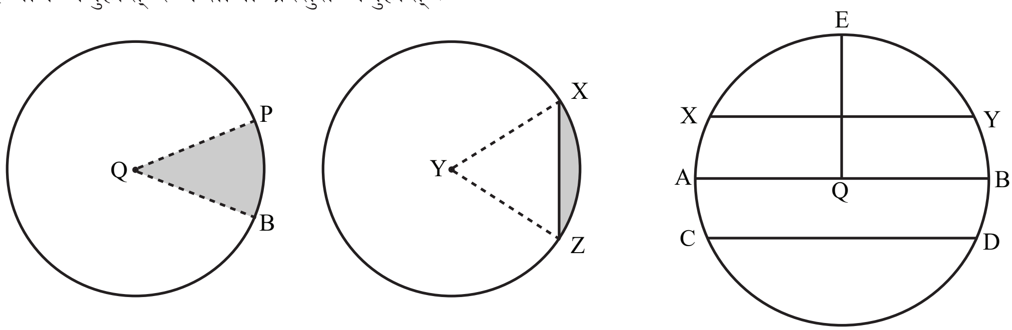
उत्तर

रचना गरेर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 16 वृत्त (Circle)

16.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएका वृत्तको चित्रहरूका आधारमा सँगैका साथीसँग जोडीमा छलफल गरी ती चित्रका विभिन्न भाग पहिचान गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :



वृत्तका विभिन्न भाग

(i) केन्द्रबिन्दु (Center)

(ii) अर्धव्यास (Radius)

(iii) परिधि (Circumference)

(iv) जीवा (Chord)

(v) व्यास (Diameter)

(vi) चाप (Arc)

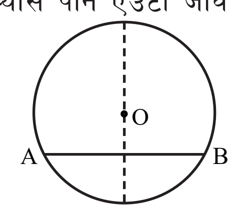
(vii) अर्धवृत्त (Semi-circle)

(viii) क्षेत्रक (Sector)

(ix) वृत्तखण्ड (Segment)

16.1 वृत्तको जीवासँग सम्बन्धित साध्य (Theorems related to chord of a circle)

कुनै वृत्तको परिधिका दुईओटा बिन्दु जोड्ने रेखालाई जीवा भनिन्छ । वृत्तको व्यास पनि एउटा जीवा हो । व्यास सबभन्दा लामो जीवा हो ।

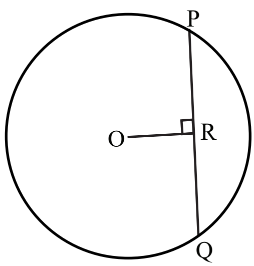


चित्रमा देखाएजस्तै एउटा ट्रेसिङ पेपर अथवा, सादा पेपरमा O केन्द्र भएको वृत्त खिच्नुहोस् । उक्त वृत्तमा AB जीवा खिच्नुहोस् । अब वृत्तलाई चित्रमा देखाए जस्तै गरी पट्याउनुहोस् । यसरी पट्याउँदा बनेको रेखाले AB लाई दुई बराबर भागमा बिभाजन गर्छ वा गर्दैन नाप लिएर हेर्नुहोस् ।

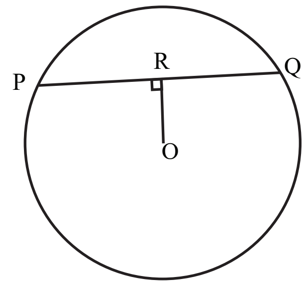
साध्य 1

वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट कुनै जीवामा रेखित लम्बले त्यस जीवालाई समद्विभाजन गर्छ ।

प्रयोगात्मक परीक्षण



चित्र (क)



चित्र (ख)

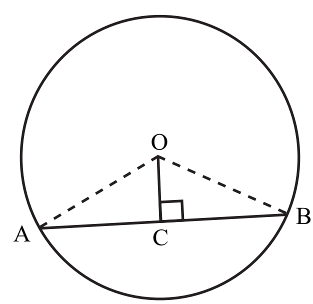
माथि चित्रमा देखाएजस्तै फरक फरक अर्धव्यास र केन्द्रबिन्दु भएका दुईओटा वृत्त खिच्नुहोस् । प्रत्येकमा एक एकओटा जीवा PQ खिच्नुहोस् र उक्त जीवामा सेट स्क्वायरको प्रयोग गरी केन्द्रबिन्दु O बाट लम्ब OR खिच्नुहोस् ।

अब दुईओटै वृत्तमा PR र RQ को लम्बाइ नापी तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

चित्र	PR	RQ	नतिजा
क			
ख			

निष्कर्ष : वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट कुनै जीवामा रेखित लम्बले त्यस जीवालाई समद्विभाजन गर्छ ।

सैद्धान्तिक प्रमाण



थाहा दिइएको,

चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु र AB जीवा छ । $OC \perp AB$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने,

$AC = BC$

रचना : AO र BO जोडौँ ।

प्रमाण

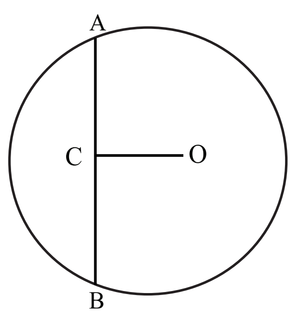
	तथ्य		कारण
1.	ΔOCA र ΔOCB मा	1.	
(i) (ii) (iii)	$\angle OCA = \angle OCB$ (स.) $OA = OB$ (क.) $OC = OC$ (भु.)	(i) (ii) (iii)	$OC \perp AB$ भएकाले (प्रत्येक कोण $90°$ भएकाले) एउटै वृत्तका अर्धव्यास भएकाले साझा भुजा भएकाले
2.	$\Delta OCA \cong \Delta OCB$	2.	स.क.भु. तथ्यअनुसार
3.	$AC = BC$	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजा भएकाले

प्रमाणित भयो ।

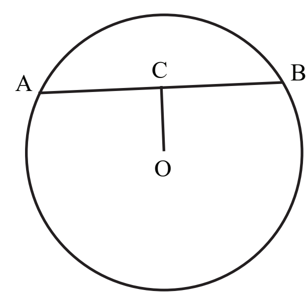
साध्य 2

वृत्तको केन्द्रबिन्दु र त्यसको कुनै जीवाको मध्यबिन्दु जोड्ने रेखा उक्त जीवामा लम्ब हुन्छ ।

प्रयोगात्मक परीक्षण



चित्र (क)



चित्र (ख)

माथि चित्रमा देखाएजस्तै फरक फरक अर्धव्यास र केन्द्रबिन्दु भएका दुईओटा वृत्त खिच्नुहोस् ।

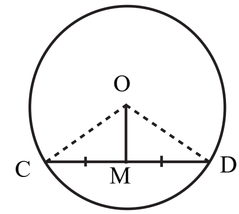
प्रत्येकमा एक एक ओटा जीवा AB खिच्नुहोस् र उक्त जीवामा रुलरको प्रयोग गरी मध्यबिन्दु C पत्ता लगाउनुहोस् र केन्द्रबिन्दु O र जीवाको मध्यबिन्दु C जोड्नुहोस् ।

अब दुईओटै वृत्तमा $\angle OCA$ र $\angle OCB$ लाई प्रोट्रेक्टरले नापी तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

चित्र	$\angle OCA$	$\angle OCB$	नतिजा
(क)			
(ख)			

निष्कर्ष : वृत्तको केन्द्रबिन्दु र त्यसको कुनै जीवाको मध्यबिन्दु जोड्ने रेखा उक्त जीवामा लम्ब हुन्छ ।

सैद्धान्तिक प्रमाण



थाहा दिइएको,
केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्तमा जीवा CD छ, जसमा CM = MD छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने,
OM ⊥ CD

रचना : OC र OD जोडौँ ।

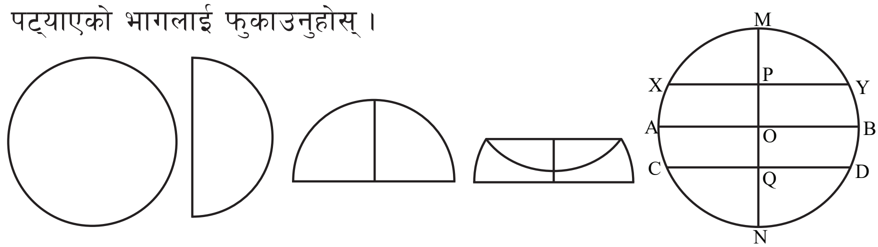
प्रमाण

	तथ्य		कारण
1.	ΔOMC र ΔOMD मा	1.	
(i) (ii) (iii)	OC = OD (भु.) OM = OM (भु.) CM = DM (भु.)	(i) (ii) (iii)	एउटै वृत्तका अर्धव्यास भएकाले साझा भुजा भएकाले थाहा दिइएबाट
2.	ΔOMC ≅ ΔOMD	2.	भु.भु.भु. तथ्यबाट
3.	∠OMC = ∠OMD	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति कोण भएकाले
4.	∠OMC + ∠OMD = 180° ∠OMC + ∠OMC = 180° or, 2∠OMC = 180° or, ∠OMC = 90°	4.	सिधा रेखामा एकैतिर बनेका आसन्न कोणको योगफल भएकाले
5.	OM ⊥ CD	5.	तथ्य 4 अनुसार ∠OMC = 90° भएकाले

प्रमाणित भयो ।

क्रियाकलाप 1

कार्डबोर्डबाट एउटा वृत्ताकार आकृति बनाउनुहोस् ।
उक्त वृत्ताकार आकृतिलाई (ii) जस्तै ठिक बराबर दुई भाग हुने गरी पट्याउनुहोस् ।
त्यसलाई फेरि चित्र (iii) र (iv) मा देखाएझैँ पट्याउनुहोस् ।
अन्त्यमा पट्याएको भागलाई फुकाउनुहोस् ।



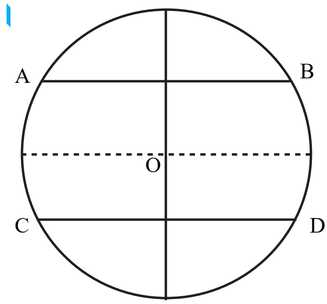
(i) (ii) (iii) (iv) (v)

अब चित्र (v) मा जीवा XY, AB र CD तथा MN को सम्बन्ध के हुन्छ ? XY, AB, CD का मध्यबिन्दु ठाडो रेखा (MN) मा पर्छन् कि पर्दैनन् अवलोकन गर्नुहोस् र निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

साध्य 3

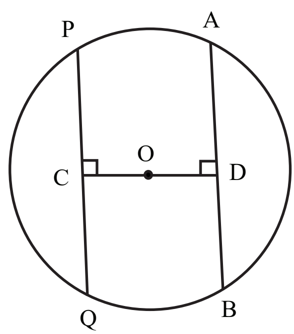
कुनै वृत्तका दुई बराबर जीवा केन्द्रबिन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्छन् ।

क्रियाकलाप 2

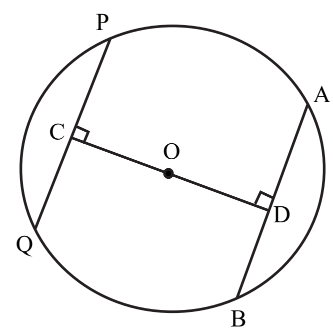


चित्रमा देखाएजस्तै केन्द्र बिन्दु O भएको वृत्त खिच्नुहोस् ।
यसमा दुई बराबर जीवा AB र CD देखाउनुहोस् ।
अब उक्त वृत्तलाई काटेर छुट्याउनुहोस् । जीवा AB र CD लाई दुई बराबर भाग हुने गरी फोल्ड गर्नुहोस् । यसरी फोल्ड गर्दा जीवामा पर्ने बिन्दु केन्द्रबिन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्छन् वा पर्दैनन्, हेर्नुहोस् :

प्रयोगात्मक परीक्षण



चित्र (क)



चित्र (ख)

माथि चित्रमा देखाएजस्तै फरक फरक अर्धव्यास र O केन्द्रबिन्दु भएका दुईओटा वृत्त खिच्नुहोस् ।

प्रत्येकमा केन्द्रबिन्दुबाट दुवैतिर पर्ने गरी एक एक जोडा बराबर जीवा PQ = AB खिच्नुहोस् ।

वृत्तका केन्द्रबिन्दुबाट उक्त जीवामा लम्ब खिच्नुहोस् ।

अब वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट दुवै जीवासम्मको लम्ब दुरी रुलरको प्रयोगले नाप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

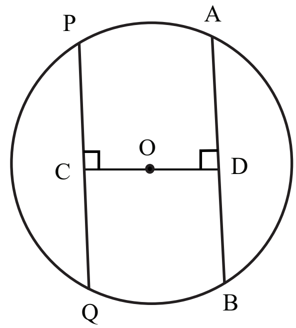
चित्र	OC	OD	नतिजा
क			
ख			

निष्कर्ष : कुनै वृत्तका दुई बराबर जीवा केन्द्रबिन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्छन् ।

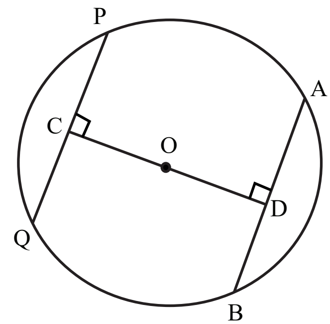
साध्य 4 (साध्य 3 को बिलोम)

वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट बराबर दुरीमा रहेका जीवा बराबर हुन्छन् ।

प्रयोगात्मक परीक्षण



चित्र (क)



चित्र (ख)

माथि चित्रमा देखाए जस्तै फरक फरक अर्धव्यास र O केन्द्रबिन्दु भएका दुईओटा वृत्त खिच्नुहोस् ।

प्रत्येकमा केन्द्रबिन्दुबाट बराबर दुरीमा दुईओटा जीवा PQ र AB खिच्नुहोस् ।

वृत्तका केन्द्रबिन्दुबाट उक्त जीवामा सेट स्क्वायरको प्रयोग गरी क्रमशः लम्ब $OC \perp PQ$ र $OD \perp AB$ खिच्नुहोस्, जहाँ, $OC = OD$ छ ।

अब रुलरले वृत्तको दुवै जीवाको नाप लिएर तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

चित्र	PQ	AB	नतिजा
(क)			
(ख)			

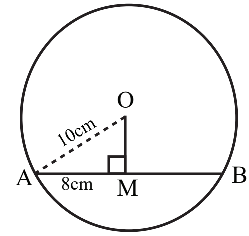
निष्कर्ष : वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट बराबर दुरीमा रहेका जीवा बराबर हुन्छन् ।

उदाहरण 1

यदि एउटा वृत्तको अर्धव्यास 10 cm र एउटा जीवाको लम्बाइ 16 cm भए केन्द्रबिन्दु देखि उक्त जीवा सम्मको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान,

चित्रमा O वृत्तको केन्द्र बिन्दु छ । O बाट जीवा AB मा OM लम्ब खिचिएको छ ।



$AM = \frac{1}{2} AB = 8$ cm [∵ केन्द्रबिन्दुबाट जीवामा खिचिएको लम्बले उक्त जीवालाई समद्विभाजन गर्ने भएकाले ।]

फेरि, ΔOMA मा, $OA^2 = OM^2 + AM^2$ [पाइथागोरस सम्बन्धबाट]

अथवा, $10^2 = OM^2 + 8^2$

अथवा, $100 = OM^2 + 64$

अथवा, $100 - 64 = OM^2$

अथवा, $36 = OM^2$

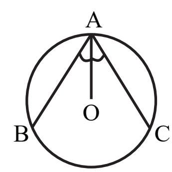
अथवा, $\sqrt{36} = OM$

अथवा, $OM = 6$ cm

∴ केन्द्रबिन्दु देखि जीवासम्मको दुरी = 6 cm

उदाहरण 2

दिइएको चित्रमा O केन्द्रबिन्दु भएको वृत्तका जीवा AB र AC छन् । यदि $\angle BAO = \angle CAO$ भए $AB = AC$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

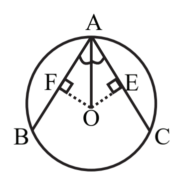


समाधान,

थाहा दिइएको : केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्तमा AB र AC दुई जीवा छन् । $\angle BAO = \angle CAO$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने,

$AB = AC$



रचना : $OF \perp AB$ र $OE \perp AC$ खिचौं ।

प्रमाण

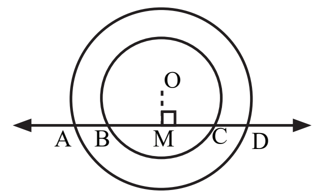
	तथ्य		कारण
1.	ΔOFA र ΔOEA मा	1.	
(i) (ii) (iii)	$OA = OA$ (भु.) $\angle OAF = \angle OAE$ (को.) $\angle AFO = \angle AEO$ (को.)	(i) (ii) (iii)	साझा भुजा भएकाले थाहा दिइएको बाट दुवै कोण 90^0 भएकाले
2.	$\Delta OFA \cong \Delta OEA$	2.	भु.को.को. तथ्यबाट

3.	AF = AE	3.	अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजा भएकाले
4.	AF = BF, AE = EC	4.	OF ⊥ AB र OE ⊥ AC भएकाले
5.	2AF = 2AE अथवा, AB = AC	5.	तथ्य (3) र (4) बाट

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

एउटै केन्द्रबिन्दु (O) भएका दुईओटा वृत्तलाई कुनै एउटा सिधा रेखाले A,B,C र D मा काटेको छ । AB = CD हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



थाहा दिइएको,

वृत्तको केन्द्र O छ । सिधा रेखाले वृत्तलाई बिन्दुहरू A, B, C र D मा काटेको छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने,

AB = CD

रचना : OM ⊥ AD खिचौँ ।

प्रमाण

	तथ्य		**कारण**
1.	AM = DM	1.	केन्द्रबिन्दुबाट जीवामा खिचिएको लम्बले जीवालाई समद्विभाजन गर्ने भएकाले
2.	BM = CM	2.	तथ्य (1) अनुसार
3.	AB = CD	3.	तथ्य (1) बाट तथ्य (2) घटाउँदा

प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 16

1. (क) 5 cm अर्धव्यास भएको वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट 4 cm टाढा रहेको जीवाको लम्बाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 34 cm व्यास भएको एउटा वृत्तमा केन्द्रबिन्दुबाट 8 cm मा एउटा जीवा खिचिएको छ भने जीवाको लम्बाइ कति होला ?

(ग) 26 cm अर्धव्यास भएको वृत्तको एउटा जीवाको लम्बाइ 20 cm भए उक्त वृत्तको केन्द्रबिन्दु र जीवा बिचको दुरी कति होला ?

(घ) एउटा वृत्तको अर्धव्यास 26 cm र सो वृत्तको कुनै एउटा जीवाको लम्बाइ 48 cm छ । वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट उक्त जीवा कति टाढा होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

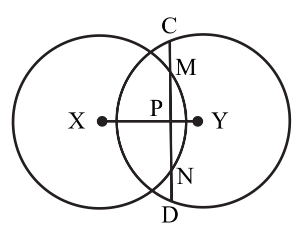
(ङ) एउटा वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट 10 cm को दुरीमा रहेको कुनै जीवा 24 cm लामो छ भने उक्त वृत्तको व्यासको लम्बाइ कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(च) केन्द्रबिन्दु O बाट एकैतिर पर्ने दुई समानान्तर जीवा AB र CD को लम्बाइ क्रमशः 6 cm र 12 cm छ । यदि AB र CD को दुरी 3cm भए वृत्तको अर्धव्यास कति होला ?

(छ) केन्द्रबिन्दु O बाट दुवैतिर पर्ने दुई समानान्तर जीवा PQ र XY को लम्बाइ क्रमशः 8 cm र 6 cm छ । यदि वृत्तको अर्धव्यास 5 cm भए PQ र XY बिचको दुरी कति होला ?

2. केन्द्रबिन्दु O र अर्धव्यास 4 cm भएको एउटा वृत्त खिच्नुहोस् । त्यसमा 5 cm लम्बाइ भएको एउटा जीवा AB खिच्नुहोस् । के तपाइँ बिन्दुहरू A र B बाट जाने 2 cm अर्धव्यासको वृत्त खिच्न सक्नुहुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

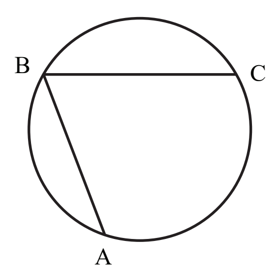
3. दिइएको चित्रमा X र Y वृत्तका केन्द्रबिन्दु हुन् । XY ⊥ CD छ । CD ले केन्द्र बिन्दु X भएको वृत्तलाई बिन्दु M र N मा तथा XY लाई P मा काटेको छ, प्रमाणित गर्नुहोस् :



i) CM = DN

ii) CN = DM

4. दिइएको चित्रमा AB र BC वृत्तका जीवा हुन् । उक्त चित्रलाई कापीमा ट्रेस गर्नुहोस् र वृत्तको केन्द्रबिन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।



उत्तर

1. (क) 6 cm (ख) 30 cm (ग) 24 cm
   (घ) 10 cm (ङ) 31.24 cm (च) $3\sqrt{5}$ cm
   (छ) 7 cm
2. सकिँदैन, किनभने अर्धव्यास AB को लम्बाइको ठिक आधा हुनुपर्छ ।

3 - 4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

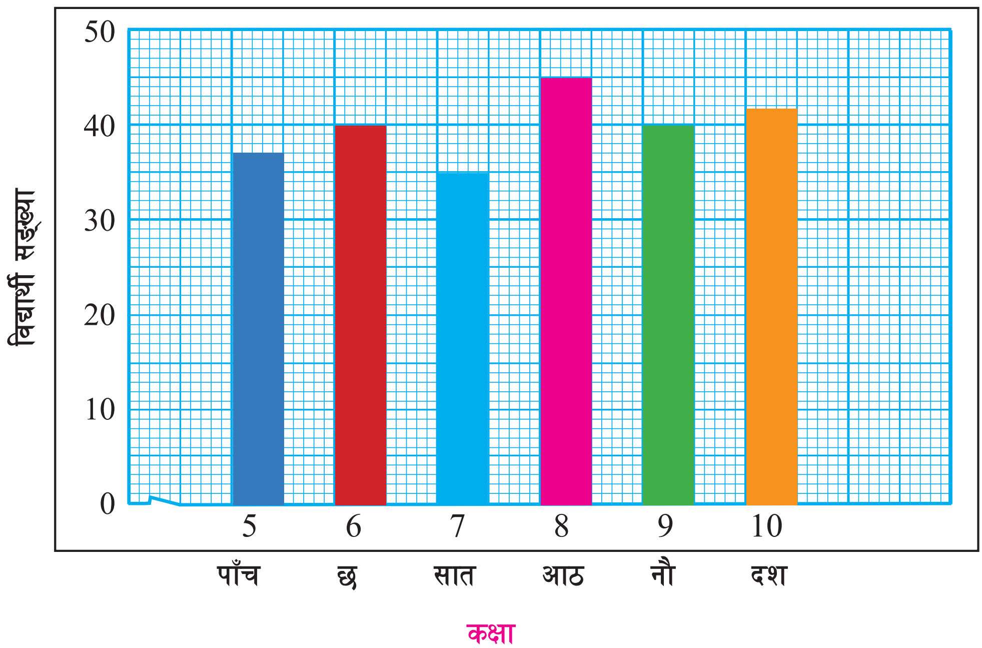
पाठ 17

तथ्याङ्कको वर्गीकरण र प्रस्तुतीकरण
(Classification and Presentation of Data)

17.0 पुनरवलोकन (Review)

श्री जनविकास माध्यमिक विद्यालयको कक्षा 5 देखि कक्षा 10 सम्मका विद्यार्थीको सङ्ख्यालाई तलको स्तम्भ चित्रमा देखाइएको छ । उक्त स्तम्भ चित्र अध्ययन गरी तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

श्री जनविकास माध्यमिक विद्यालय
कक्षा 5 देखि कक्षा 10 सम्मका विद्यार्थीको विवरण



(क) सबैभन्दा धेरै विद्यार्थी कुन कक्षामा रहेछन् र कति जना रहेछन् ?

(ख) सबैभन्दा कम विद्यार्थी कुन कक्षामा रहेछन् र कति जना रहेछन् ?

(ग) कुन कुन कक्षामा विद्यार्थी सङ्ख्या बराबर रहेछ ?

(घ) कक्षा 5 देखि कक्षा 10 सम्म जम्मा कति जना विद्यार्थी रहेछन् ?

17.1 तथ्याङ्कको वर्गीकरण (Classification of data)

क्रियाकलाप 1

कक्षा 8 को अन्तिम परीक्षामा 40 विद्यार्थीले प्राप्त गरेको गणित विषयको प्राप्ताङ्क यस प्रकार पाइयो :

73, 40, 65, 45, 53, 49, 40, 56, 45, 53,

75, 49, 63, 75, 45, 83, 73, 92, 48, 89,

65, 73, 73, 94, 75, 92, 82, 89, 45, 90,

48, 40, 82, 49, 73, 56, 63, 65, 60, 60

दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा तलको बारम्बारता तालिका (Frequency distribution table) पूरा गर्नुहोस् :

(अ) कक्षा 8 का विद्यार्थीको गणित विषयको प्राप्ताङ्कको बारम्बारता तालिका

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता
40	|||	3
45	||||	4
48	||	2
49	|||	3
53		
56		
60		
63		
65		
73		
75		
82		
83		
89		
90		
92		
94		
		जम्मा सङ्ख्या (N) =

(आ) फेरि उल्लिखित प्राप्ताङ्कलाई न्यूनतम प्राप्ताङ्क 40 बाट सुरु हुने गरी 10/10 को श्रेणी अन्तर लिइएको तलको बारम्बारता तालिका पूरा गर्नुहोस् :

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता
40 -50	|||| |||| ||	12
50 - 60		
60 - 70		
70 - 80		
80 - 90		
90 - 100		
		जम्मा सङ्ख्या (N) =

अब माथिका दुईओटा तालिकाका आधारमा निम्नलिखित प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) के दुवै तालिकाबाट जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्यामा कुनै परिवर्तन आयो ?

(ख) सङ्कलित तथ्याङ्कलाई कति तरिकाले प्रस्तुत गरियो ?

(ग) के तालिका **'आ'** मा 5/5 को श्रेणी अन्तर (class interval) लिएर पनि तालिका निर्माण गर्न सकिन्छ ?

(घ) माथिको तालिका **'आ'** मा (40 - 50) वर्गान्तरको बारम्बारता कसरी 12 भयो ?

दिइएको वा सङ्कलित तथ्याङ्कको वैयक्तिक श्रेणीलाई प्रत्येक तथ्याङ्कको बारम्बारता गणना गरी निर्माण गरिएको बारम्बारता तालिकालाई तथ्याङ्कको खण्डित श्रेणी (Discrete series) भनिन्छ । त्यस्तै दिइएको वा सङ्कलित तथ्याङ्कलाई निश्चित वर्ग अन्तर (Class interval) र उक्त वर्गान्तरको बारम्बारतासहित निर्माण गरिएको तालिकालाई तथ्याङ्कको अविच्छिन्न/निरन्तर श्रेणी (Continuous series) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

30 जना विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क निम्नानुसार दिइएको छ :

45, 25, 51, 35, 42, 37, 40, 35, 51, 42, 42, 42, 37, 40, 35, 37, 42, 40, 37, 35, 37, 42, 51, 25, 42, 40, 45, 37, 40, 42

दिइएको तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

समाधान

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न (Tally Marks)	बारम्बारता (Frequency)
25	||	2
35	||||	4
37	~~||||~~ |	6
40	~~||||~~	5
42	~~||||~~ |||	8
45	||	2
51	|||	3
		जम्मा सङ्ख्या (N) = 30

क्रियाकलाप 2

श्री सेतीदेवी माध्यमिक विद्यालयमा अध्ययनरत कक्षा 5 देखि कक्षा 9 सम्मका विद्यार्थीको उमेरअनुसार को सङ्ख्या निम्नानुसार पाइयो :

उमेर (वर्षमा)	10	11	12	13	14	15
विद्यार्थी सङ्ख्या	40	30	33	48	37	42

दिइएको तालिका अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) तथ्याङ्कलाई कुन श्रेणीमा प्रस्तुत गरिएको छ ?

(ख) माथिको तालिकाबाट 10 वर्षका, 11 वर्ष र सोभन्दा कम, 12 वर्ष र सोभन्दा कम, 13 वर्ष र सोभन्दा कम, 14 वर्ष र सोभन्दा कम, 15 वर्ष र सोभन्दा कम उमेरका विद्यार्थी सङ्ख्याको तालिका बनाउनुहोस् ।

(ग) माथि (ख) मा बनेको तालिकालाई कस्तो तालिका भनिन्छ होला ?

माथिको छलफलबाट,

(क) तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

(ख)

उमेर (वर्षमा)	बारम्बारता (Frequency)	सञ्चित बारम्बारता (Cumulative frequency)
10	40	40
11	30	40 + 30 = 70
12	33	70 + 33 = 103
13	48	103 + 48 = 151
14	37	151 + 37 = 188
15	42	188 + 42 = 230
	जम्मा सङ्ख्या (N) = 230	

(ग) माथि बनेको तालिकालाई सञ्चित बारम्बारता तालिका (Cumulative frequency table) भनिन्छ ।

उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्कबाट सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नुहोस् :

ज्याला (रु. मा)	50	55	60	65	70	75
कामदार सङ्ख्या	4	8	7	6	9	6

समाधान

ज्याला (रु. मा)	कामदार सङ्ख्या	सञ्चित बारम्बारता
50	4	4
55	8	4 + 8 = 12
60	7	12 + 7 = 19
65	6	19 + 6 = 25
70	9	25 + 9 = 34
75	6	34 + 6 = 40
	जम्मा सङ्ख्या (N) = 40	

क्रियाकलाप 3

दिइएको तथ्याङ्क अध्ययन गरी तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
विद्यार्थी सङ्ख्या	6	13	22	17	7	5

(क) तथ्याङ्कलाई कुन श्रेणीमा दिइएको छ ?

(ख) 10 भन्दा कम अङ्क प्राप्त गर्ने विद्यार्थी कति जना रहेछन् ?

(ग) 0 वा भन्दा बढी अङ्क प्राप्त गर्ने कति जना विद्यार्थी रहेछन् ?

(घ) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका कसरी निर्माण गर्न सकिन्छ ?

(ङ) भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिका कसरी निर्माण गर्न सकिन्छ ?

माथिको छलफलबाट,

(क) तथ्याङ्कलाई अविच्छिन्न/निरन्तर श्रेणी (Continuous series) मा दिइएको छ ।

(ख) 10 भन्दा कम प्राप्ताङ्क ल्याउने विद्यार्थी 6 जना रहेछन् ।

(ग) 0 वा भन्दा बढी प्राप्ताङ्क प्राप्त गर्ने विद्यार्थी 70 जना रहेछन् अर्थात् सबै विद्यार्थी पर्छन् ।

(घ) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता निम्नानुसार निर्माण गर्न सकिन्छ :

प्राप्ताङ्क	सञ्चित बारम्बारता
10 भन्दा कम (<10)	6
20 भन्दा कम (<20)	$6 + 13 = 19$
30 भन्दा कम (<30)	$19 + 22 = 41$
40 भन्दा कम (<40)	$41 + 17 = 58$
50 भन्दा कम (<50)	$58 + 7 = 65$
60 भन्दा कम (<60)	$65 + 5 = 70$

(ङ) भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिका निम्नानुसार निर्माण गर्न सकिन्छ :

प्राप्ताङ्क	सञ्चित बारम्बारता
0 वा सोभन्दा बढी (≥ 0)	70
10 वा सोभन्दा बढी (≥ 10)	$70 - 6 = 64$
20 वा सोभन्दा बढी (≥ 20)	$64 - 13 = 51$
30 वा सोभन्दा बढी (≥ 30)	$51 - 22 = 29$
40 वा सोभन्दा बढी (≥ 40)	$29 - 17 = 12$
50 वा सोभन्दा बढी (>50)	$12 - 7 = 5$

बारम्बारता तालिकामा एकपछि अर्को बारम्बारता लगातार जोड्दैजाँदा आउने बारम्बारतालाई सञ्चित बारम्बारता (Cumulative frequency) भनिन्छ । सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नका लागि सबैभन्दा पहिले तथ्याङ्कलाई बढ्दो वा घट्दो क्रममा मिलाएर राखिन्छ । अविच्छिन्न/निरन्तर तथ्याङ्क (Continuous data) को सञ्चित बारम्बारता तालिकालाई भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका र भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिका गरी दुई तरिकाबाट निर्माण गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण 3

कक्षा 9 का 35 जना विद्यार्थीले 60 पूर्णाङ्कको गणित विषयको दोस्रो त्रैमासिक परीक्षाको प्राप्ताङ्क तल दिइएको छ :

39, 50, 42, 34, 25, 35, 36, 46, 34, 12, 44, 43, 24, 43, 40, 16, 45, 34, 42, 37, 35, 43, 58, 34, 35, 33, 24, 40, 43, 52, 57, 33, 50, 38, 24

(क) माथिको प्राप्ताङ्कलाई अविच्छिन्न/निरन्तर श्रेणीमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) माथिका तालिकाको आधारमा भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका (Less than cumulative frequency table) निर्माण गर्नुहोस् ।

(ग) माथिका तालिकाको आधारमा भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिका (More than cumulative frequency table) निर्माण गर्नुहोस् ।

समाधान

(क) यहाँ न्यूनतम प्राप्ताङ्क 10 र अधिकतम प्राप्ताङ्क 58 छ । त्यसैले 10/10 को अन्तर (Interval) लिँदा सुरुको वर्गान्तर (10 - 20) हुन्छ, जहाँ 10 लाई तल्लो सीमा (Lower limit) र 20 लाई माथिल्लो सीमा (Upper limit) भनिन्छ । सबै वर्गान्तरमा तल्लो सीमा समावेश गरिन्छ भने माथिल्लो सीमा समावेश गरिँदैन । जस्तै : माथिल्लो सीमा (Upper limit) 20 लाई (10 - 20) को वर्गान्तरमा गणना नगरी यसपछिको (20 - 30) को वर्गान्तरमा गणना गरिन्छ ।

वर्गान्तर (Class interval)	मिलान चिह्न	बारम्बारता (frequency)
10 - 20	||	2
20 - 30	||||	4
30 - 40	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13
40 -50	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
50 - 60	~~||||~~	5
		जम्मा सङ्ख्या (N) = 35

(ख) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिकाको निर्माण :

प्राप्ताङ्क	सञ्चित बारम्बारता
20 भन्दा कम (< 20)	2
30 भन्दा कम (< 30)	2 + 4 = 6
40 भन्दा कम (< 40)	6 + 13 = 19
50 भन्दा कम (< 50)	19 + 11 = 30
60 भन्दा कम (< 60)	30 + 5 = 35

(ग) भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिकाको निर्माण :

प्राप्ताङ्क	सञ्चित बारम्बारता
10 वा सोभन्दा बढी ($\geq$ 10)	35
20 वा सोभन्दा बढी ($\geq$ 20)	35 – 2 = 33
30 वा सोभन्दा बढी ($\geq$ 30)	33 – 4 = 29
40 वा सोभन्दा बढी ($\geq$ 40)	29 – 13 = 16
50 वा सोभन्दा बढी ($\geq$ 50)	16 – 11 = 5

अभ्यास 17.1

1. कक्षा 9 को विज्ञान विषयको 10 पूर्णाङ्कको एकाइ परीक्षामा 30 जना विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क यसप्रकार पाइयो :

6, 8, 10, 6, 2, 8, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, 6, 8,
6, 10, 2, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 8, 6, 4, 6, 10, 6

(क) माथिको वैयक्तिक श्रेणीमा दिइएको तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
(ख) सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नुहोस् ।

2. तल दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा 5/5 अन्तरालमा पहिलो वर्गान्तर (5 - 10) लिएर अविच्छिन्न/निरन्तर श्रेणीमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

19, 5, 14, 17, 20, 21, 35, 39, 30, 31, 6, 8, 14, 28, 27, 39,
30, 31, 32, 25, 26, 10, 11, 12, 15, 28, 30, 31, 24, 22

3. प्रश्न न. 2 को अविच्छिन्न श्रेणीको प्रयोग गरी निम्नानुसारको तालिका निर्माण गर्नुहोस् :

(क) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका
(ख) भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिका

4. दिइएको खण्डित तथ्याङ्कबाट सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नुहोस् :

ज्याला (रु.100 मा)	10	20	30	40	50
कामदार सङ्ख्या	3	7	10	8	7

5. तल दिइएको अविच्छिन्न/निरन्तर तथ्याङ्कले विद्यार्थीले प्रति हप्ता गणित विषय अध्ययन गर्ने समय (घण्टामा) बुझाउँछ ।

घण्टा	2 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22
विद्यार्थी सङ्ख्या	100	250	325	200	150

दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा निम्नानुसार सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नुहोस् :

(क) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका
(ख) भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिका

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

17.2 तथ्याङ्कको प्रस्तुतीकरण (Presentation of data)

17.2.1 हिस्टोग्राम (Histogram)

क्रियाकलाप 1

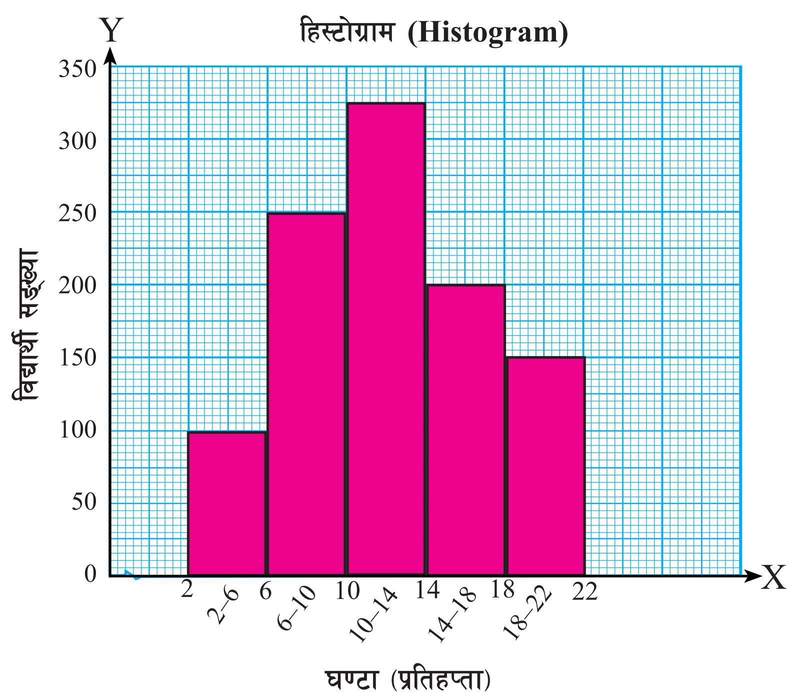
(क) तलको तथ्याङ्कबाट स्तम्भ चित्र (Bar Diagram) खिच्नुहोस् :

कक्षा	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थी सङ्ख्या	37	40	35	45	40	43

(ख) निम्नलिखित तथ्याङ्क र यसबाट निर्मित हिस्टोग्रामको अध्ययन गरी तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

गणित विषयलाई घरमा विद्यार्थीले हप्तामा कति घण्टा अध्ययन गर्छन् भनेर जम्मा 1025 जना विद्यार्थीमा गरिएको अध्ययनबाट पाइएको तथ्याङ्कलाई निम्नानुसार अविच्छिन्न श्रेणीमा प्रस्तुत गरीएको छ :

घण्टा (प्रति हप्ता)	2 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22
विद्यार्थी सङ्ख्या	100	250	325	200	150



तपाईंले (क) मा बनाउनुभएको चित्र र (ख) मा दिइएको चित्रमा के फरक छ,? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

सङ्कलित तथ्याङ्क वा दिइएको तथ्याङ्कलाई विभिन्न श्रेणी अन्तर (Class Interval) भएको बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी X–अक्षमा प्रत्येक श्रेणी अन्तर बराबरको चौडाइ र Y–अक्षमा बारम्बारता बराबरको उचाइका आयतहरू क्रमशः जोडेर बनाइएको चित्रलाई नै हिस्टोग्राम (Histogram) भनिन्छ । खण्डित तथ्याङ्क (Discrete date) को प्रस्तुतीकरणका लागि स्तम्भ चित्र (Bar diagram) निर्माण गरिन्छ भने अविच्छिन्न तथ्याङ्क (Continuous Data) को प्रस्तुतीकरणका लागि हिस्टोग्राम (Histogram) निर्माण गरिन्छ ।

हिस्टोग्राम (Histogram) **खिच्ने चरण/तरिका** (Steps of constructing histogram)

(क) वर्गाङ्कित कागज (graph paper) मा X–अक्ष र Y–अक्ष खिच्ने

(ख) X–अक्षमा तथ्याङ्कको वर्गान्तर (class interval) लाई र Y–अक्षमा बारम्बारतालाई उपयुक्त नाप (scale) मा विभाजन गर्ने

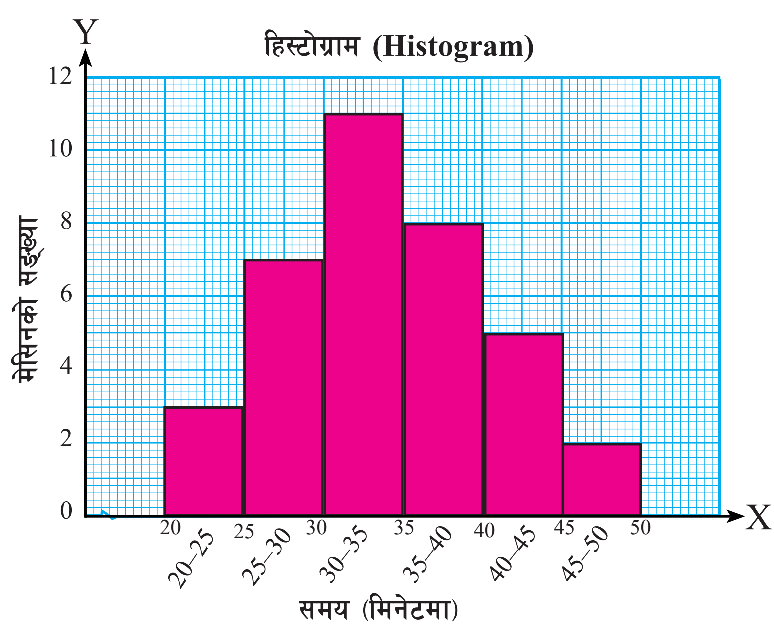
(ग) X–अक्षमा दिइएको वर्गान्तर र Y–अक्षमा सम्बन्धित वर्गान्तरको बारम्बारतालाई आधार मानी क्रमशः एक अर्को जोडेर आयतहरू बनाई हिस्टोग्राम निर्माण गर्ने

उदाहरण 1

दिइएको तथ्याङ्कबाट हिस्टोग्राम खिच्नुहोस् :

समय (मिनेटमा)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50
मेसिनको सङ्ख्या	3	7	11	8	5	2

समाधान

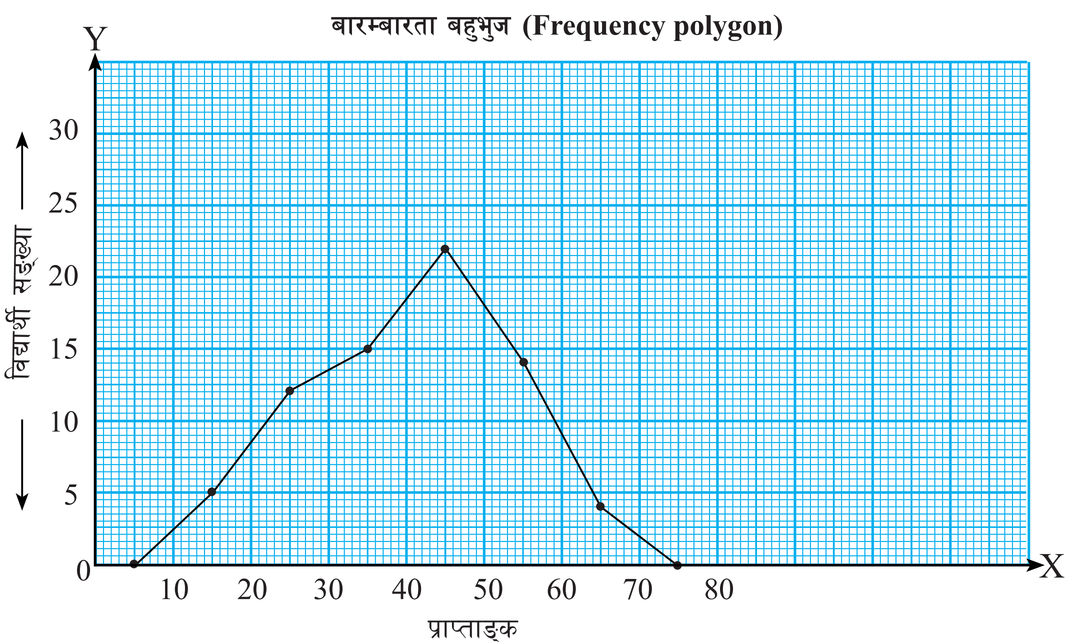


17.2.2 बारम्बारता बहुभुज (Frequency polygon)

क्रियाकलाप 2

निम्नलिखित तालिका र त्यसबाट निर्मित बारम्बारता बहुभुज (Frequency polygon) अध्ययन गरी तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	12	15	22	14	4



(क) पहिलो वर्गान्तर (10 – 20) को मध्यमान कति हुन्छ ?

(ख) माथि दिइएको तालिकाबाट प्रत्येक वर्गान्तरको मध्यमान कति कति हुन्छ ?

(ग) सबैभन्दा बढी बारम्बारता भएको वर्गान्तर कुन हो ?

(घ) कुन वर्गान्तरको सबैभन्दा कम बारम्बारता छ ?

(ङ) माथिको जस्तै गरी दिइएको अविच्छिन्न/निरन्तर तथ्याङ्कबाट बारम्बारता बहुभुज (Frequency polygon) कसरी निर्माण गर्न सकिन्छ ?

दिइएको वा सङ्कलित तथ्याङ्कबाट प्रत्येक वर्गान्तर (class interval) को मध्यबिन्दुलाई X–अक्षमा र सम्बन्धित वर्गान्तरको बारम्बारतालाई Y–अक्षमा लिएर बिन्दुहरू (मध्यबिन्दु, बारम्बारता) क्रमशः रुलरको सहायताले जोड्दै बनाइएको रेखाचित्रलाई बारम्बारता बहुभुज (Frequency polygon) भनिन्छ ।

बारम्बारता बहुभुज खिच्ने चरण/तरिका (Steps of constructing frequency polygon)

(क) वर्गाङ्कित कागज (graph paper) मा X-अक्ष र Y-अक्ष खिच्ने

(ख) X–अक्षमा, तथ्याङ्कको वर्गान्तरको मध्यबिन्दु (Middle point) लाई र Y–अक्षमा सम्बन्धित वर्गान्तरको बारम्बारता (Frequency) लाई उपयुक्त नाप (scale) मा विभाजन गर्ने

(ग) अब बिन्दुहरू (मध्यबिन्दु, बारम्बारता) लाई क्रमशः ग्राफमा भर्ने र प्रत्येक बिन्दुहरूलाई रुलरको सहायताले जोड्ने

(घ) अन्त्यमा तथ्याङ्कको सबैभन्दा सानो वर्गान्तरको बायाँपट्टि र सबैभन्दा ठुलो वर्गान्तरको दायाँपट्टि बराबर अन्तर हुने गरी एक/एकओटा वर्गान्तर लिई उक्त दुवैतिरका वर्गान्तरका मध्यबिन्दु क्रमशः बारम्बारता 0/0 लिने र ग्राफमा भर्ने अनि ती बिन्दु पनि जोड्ने । त्यसपछि चाहिएको बारम्बारता बहुभुज पाउनुहुनेछ ।

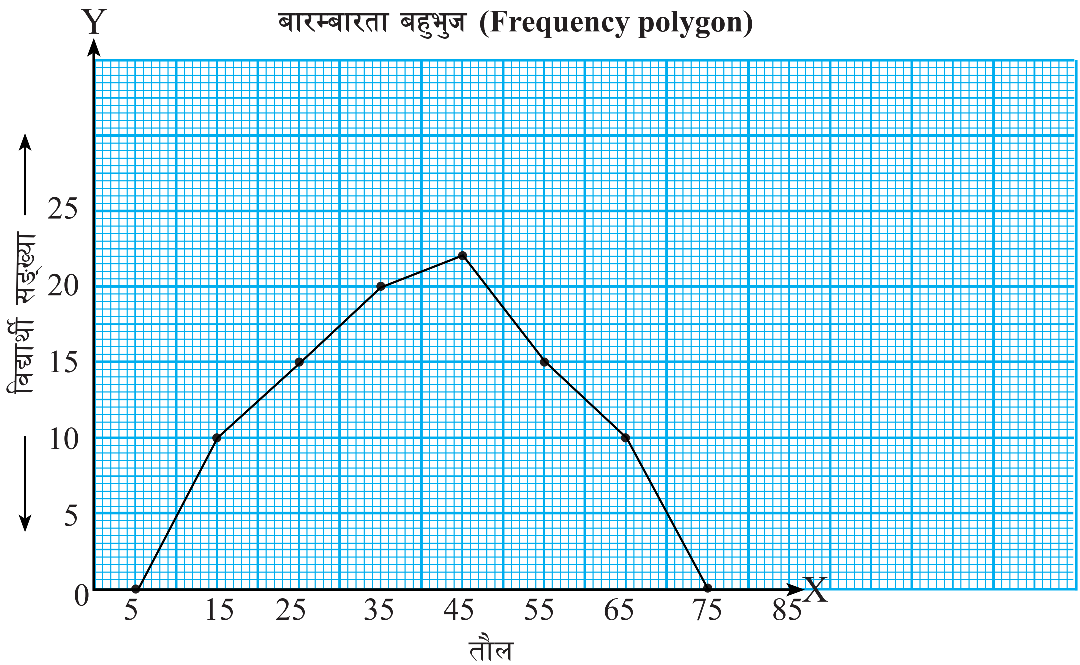
उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्कबाट बारम्बारता बहुभुज खिच्नुहोस् :

तौल	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 -50	50 - 60	60 - 70
विद्यार्थी सङ्ख्या	10	15	20	22	15	10

समाधान

तौल	मध्यबिन्दु	बारम्बारता	बिन्दुहरू (मध्यबिन्दु, सम्बन्धित बारम्बारता)
0 - 10	$\frac{0+10}{2} = 5$	0	(5, 0)
10 - 20	$\frac{10+20}{2} = 15$	10	(15, 10)
20 - 30	15+10 = 25	15	(25, 15)
30 - 40	25 +10 = 35	20	(35, 20)
40 - 50	35 +10 = 45	22	(45, 22)
50 - 60	45 +10 = 55	15	(55, 15)
60 - 70	55+10 = 65	10	(65, 10)
70 - 80	65+10 = 75	0	(75, 0)
		जम्मा (N) = 92	



17.2.3 सञ्चित बारम्बारता वक्र (Cumulative frequency curve or ogive)

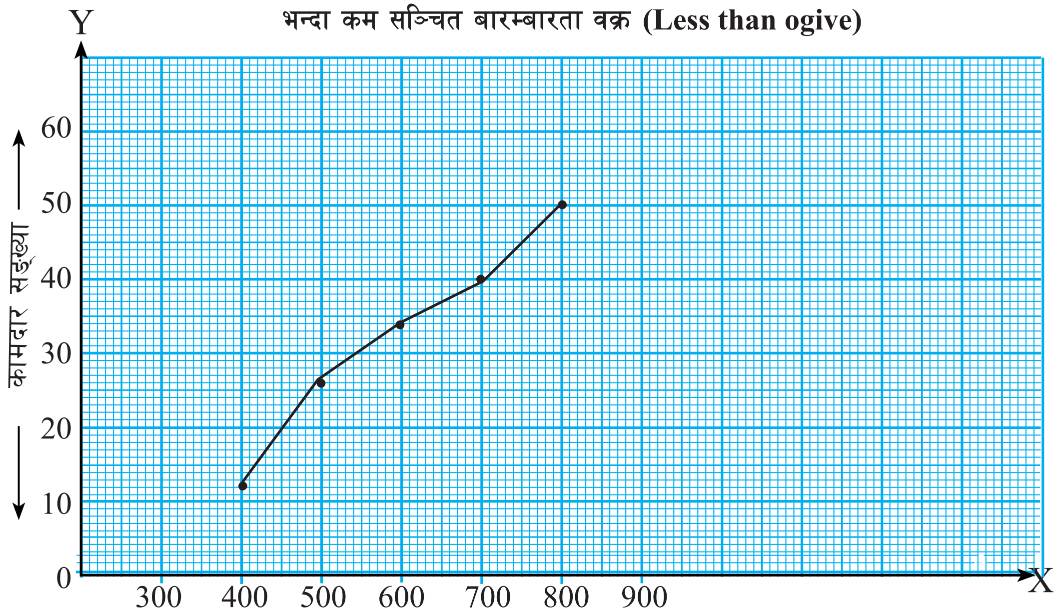
क्रियाकलाप 3

एउटा कम्पनीमा रहेका कामदारको कुनै एक दिनको पारिश्रमिक विवरण तालिका र यसबाट निर्मित सञ्चित बारम्बारता तालिका तथा सञ्चित बारम्बारता वक्र (ogive) को अध्ययन गर्नुहोस् :

ज्याला (रु.मा)	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800
कामदार सङ्ख्या	12	14	8	6	10

ज्याला (रु. मा)	सञ्चित बारम्बारता (Cumulative frequency)
400 भन्दा कम (<400)	12
500 भन्दा कम (<500)	12 + 14 = 26
600 भन्दा कम (<600)	26 + 8 = 34
700 भन्दा कम (<700)	34 + 6 = 40
800 भन्दा कम (<800)	40 + 10 = 50

भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र (Less than ogive)



अब माथिको चित्रबाट निम्नलिखित प्रश्नका सम्बन्धमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) माथिको वक्र रेखालाई के भनिन्छ ?

(ख) X–अक्षमा के कुरा राखिएको छ ?

(ग) Y–अक्षमा के कुरा राखिएको छ ?

(घ) जम्मा कामदारहरू कति जना रहेछन् ?

(ङ) कम्पनीमा रु. 500 भन्दा कम ज्याला पाउने कामदार कति जना रहेछन् ?

(च) रु.700 भन्दा कम ज्याला कति जना कामदारहरूले पाउने रहेछन् ?

(छ) माथि दिइएको अविच्छिन्न तथ्याङ्कबाट निर्माण गरिएको भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र (Less than ogive) जस्तै गरी भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र (More than ogive) कसरी निर्माण गर्नुहुन्छ ?

वर्गान्तरको माथिल्लो वा तल्लो सीमालाई X–अक्षमा र त्यस वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारतालाई Y–अक्षमा अङ्कन गरी प्राप्त बिन्दुहरूलाई रूलरको प्रयोग नगरी वक्र रेखाले जोड्दा (Freehand drawing) प्राप्त हुने वक्र रेखालाई सञ्चित बारम्बारता वक्र (Cumulative frequency curve or ogive) भनिन्छ ।

वर्गान्तरको माथिल्लो सीमालाई X–अक्षमा र त्यस वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारतालाई Y–अक्षमा लिएर बिन्दुहरू (माथिल्लो सीमा, सञ्चित बारम्बारता) अङ्कन गरी ती विन्दुहरूलाई वक्र रेखाले चोड्दा (Freehand drawing) प्राप्त हुने वक्र रेखालाई **भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र** (Less than cumulative frequency curve or ogive) भनिन्छ ।

वर्गान्तरको तल्लो सीमालाई X–अक्षमा र त्यस वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारतालाई Y–अक्षमा लिएर बिन्दुहरू (तल्लो सीमा, सञ्चित बारम्बारता) अङ्कन गरी ती विन्दुहरूलाई वक्र रेखाले जोड्दा (Freehand drawing) प्राप्त हुने वक्र रेखालाई **भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र** (More than cumulative frequency curve or ogive) भनिन्छ ।

भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र खिच्ने चरण/तरिका (Steps of constructing less than cumulative frequency curve or ogive)

(क) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिकाको निर्माण गर्नुहोस् ।

(ख) वर्गाङ्कित कागज (Graph paper) मा X–अक्ष र Y–अक्ष खिच्नुहोस् ।

(ग) वर्गान्तरको माथिल्लो सीमा (upper limit) लाई निश्चित नाप (scale) लिएर X–अक्षमा चिह्न लगाउनुहोस् ।

(घ) सम्बन्धित तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारतालाई निश्चित नाप (Scale) लिएर Y-अक्षमा चिह्न लगाउनुहोस् ।

(ङ) बिन्दुहरू (माथिल्लो सीमा, सञ्चित बारम्बारता) लाई क्रमशः ग्राफमा भर्नुहोस् ।

(च) अन्त्यमा स्वतन्त्र रूपमा बिन्दुहरू जोड्नुहोस् । अब **भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र** पाउनुहुनेछ ।

भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र खिच्ने चरण/तरिका (Steps of constructing more than cumulative frequency curve or ogive)

(क) भन्दा बढी (>) सञ्चित बारम्बारता तालिकाको निर्माण गर्नुहोस् ।

(ख) वर्गाङ्कित कागज (Graph paper) मा X–अक्ष र Y–अक्ष खिच्नुहोस् ।

(ग) वर्गान्तरको तल्लो सीमा (Lower limit) लाई निश्चित नाप (Scale) लिएर X–अक्षमा चिह्न लगाउनुहोस् ।

(घ) सम्बन्धित तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारतालाई निश्चित नाप (Scale) लिएर Y–अक्षमा चिह्न लगाउनुहोस् ।

(ङ) बिन्दुहरू (तल्लो सीमा, सञ्चित बारम्बारता) लाई क्रमशः ग्राफमा भर्नुहोस् ।

(च) अन्त्यमा स्वतन्त्र रूपमा बिन्दुहरू जोड्नुहोस् । अब **भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र** पाउनुहुने छ ।

उदाहरण 3

दिइएको तथ्याङ्कबाट भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र र भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र छुट्टाछुट्टै ग्राफमा खिच्नुहोस् :

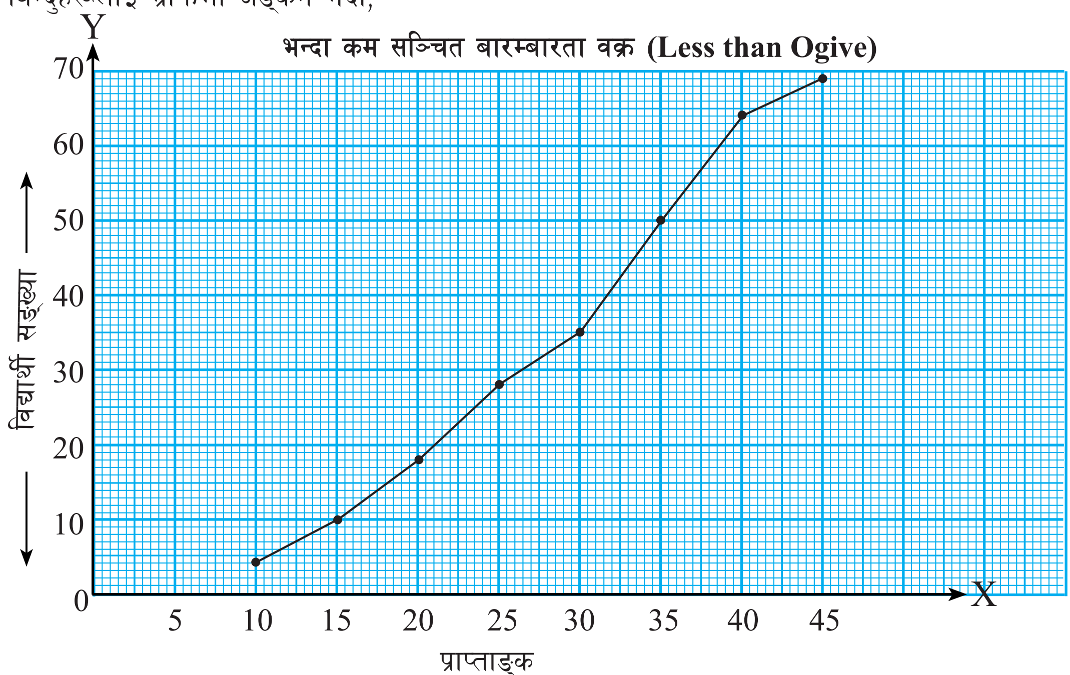
प्राप्ताङ्क	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 -35	35 - 40	40 - 45
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	6	8	10	7	15	14	5

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

माथिल्लो सीमा	सञ्चित बारम्बारता	बिन्दुहरू (माथिल्लो सीमा, सञ्चित बारम्बारता)
10 भन्दा कम (<10)	4	(10, 4)
15 भन्दा कम (<15)	4 + 6 = 10	(15, 10)
20 भन्दा कम (< 20)	10 + 8 = 18	(20, 18)
25 भन्दा कम (<25)	18 + 10 = 28	(25, 28)
30 भन्दा कम (<30)	28 + 7 = 35	(30, 35)
35 भन्दा कम (<35)	35 + 15 = 50	(35, 50)
40 भन्दा कम (<40)	50 + 14 = 64	(40, 64)
45 भन्दा कम (<45)	64 + 5 = 69	(45, 69)

बिन्दुहरूलाई ग्राफमा अङ्कन गर्दा,

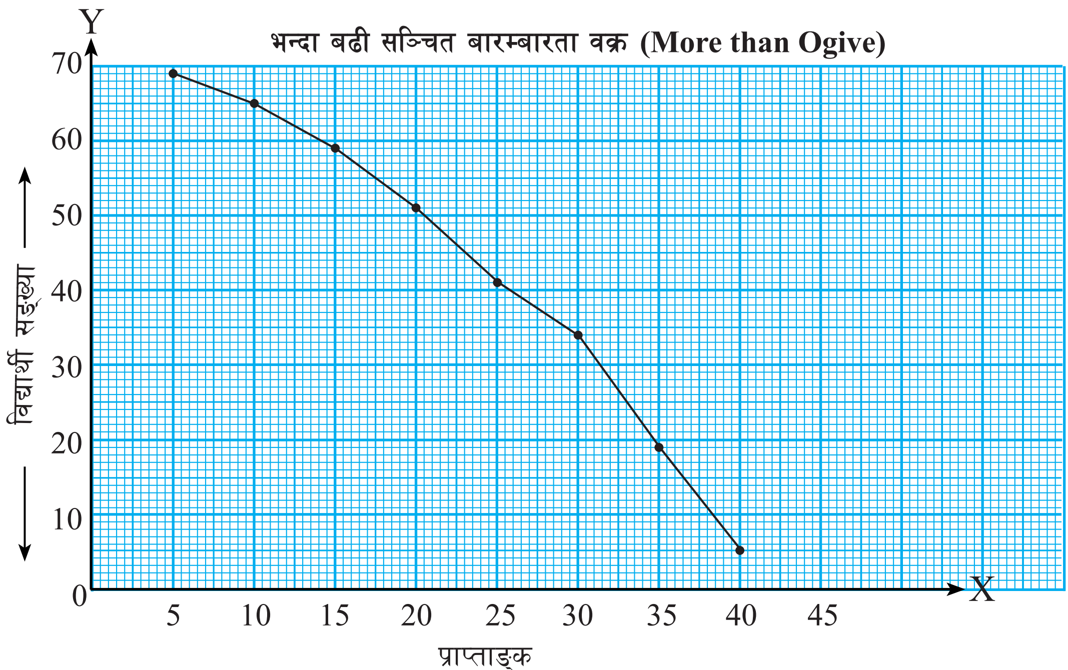


फेरि दिइएको तथ्याङ्कलाई भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

तल्लो सीमा	सञ्चित बारम्बारता	बिन्दुहरू (तल्लो सीमा, सञ्चित बारम्बारता)
5 वा सोभन्दा बढी (≥5)	69	(5, 69)
10 वा सोभन्दा बढी (≥10)	69 – 4 = 65	(10, 65)

15 वा सोभन्दा बढी (≥15)	65 – 6 = 59	(15, 59)
20 वा सोभन्दा बढी (≥20)	59 – 8 = 51	(20, 51)
25 वा सोभन्दा बढी (≥25)	51 – 10 = 41	(25, 41)
30 वा सोभन्दा बढी (≥30)	41 – 7 = 34	(30, 34)
35 वा सोभन्दा बढी (≥35)	34 – 15 = 19	(35, 19)
40 वा सोभन्दा बढी (≥40)	19 – 14 = 5	(40, 5)

सञ्चित बारम्बारता वक्र खिचौँ,



अभ्यास 17.2

1. तल दिइएको तथ्याङ्कलाई हिस्टोग्राम (Histogram) मा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क)

प्राप्ताङ्क	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	6	8	10	8	4

(ख)

उमेर (वर्षमा)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
बिरामीको सङ्ख्या	15	12	8	20	27

(ग)

ज्याला (रु.100 मा)	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
कामदार सङ्ख्या	20	40	30	60	7

(घ)

वर्गान्तर (C.I.)	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
बारम्बारता (f)	3	8	12	7	2

2. दिइएको तथ्याङ्कलाई बारम्बारता बहुभुजमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क)

प्राप्ताङ्क	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
विद्यार्थी सङ्ख्या	7	3	8	10	2

(ख)

कलमको मूल्य	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
कलमको सङ्ख्या	15	20	30	25	5

(ग)

आम्दानी (रु. 100 मा)	20 – 35	35 – 50	50 – 65	65 – 80	80 – 95
बारम्बारता	10	7	6	5	2

(घ)

वर्गान्तर (C.I.)	11.5 – 19.5	19.5 – 27.5	27.5 – 35.5	35.5 – 43.5	43.5 – 51.5	51.5 – 59.5
बारम्बारता (f)	7	17	10	4	1	1

3. तल दिइएको तथ्याङ्कलाई भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र (Less than ogive) र भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र (More than ogive) मा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क)

वर्गान्तर (C.I.)	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35
बारम्बारता (f)	7	10	20	13	17	10	14

(ख)

प्राप्ताङ्क	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
बारम्बारता	4	6	16	20	30	24

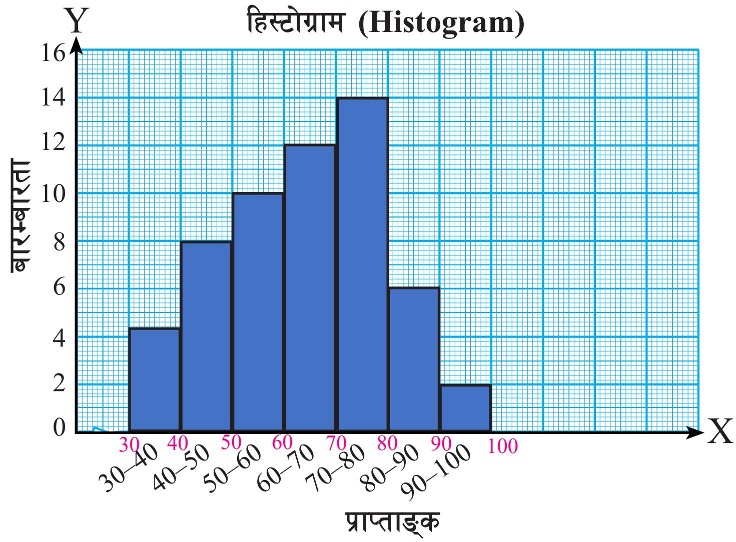
(ग)

घन्टी	0 – 6	6 – 12	12 – 18	18 – 24	24 – 30	30 – 36
शिक्षकको सङ्ख्या	3	10	20	10	5	2

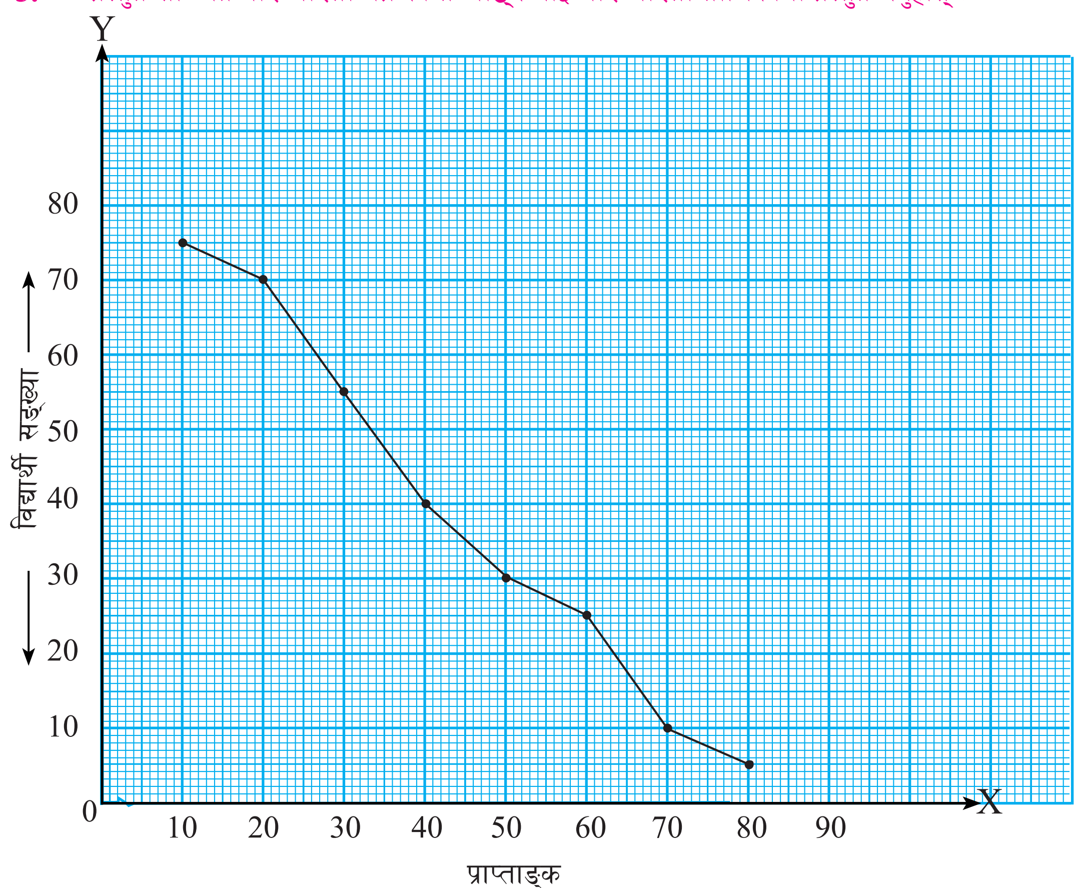
(घ)

समय (घण्टा प्रतिहप्ता)	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20
बारम्बारता	28	35	66	40	31

4. दिइएको हिस्टोग्रामको तथ्याङ्कलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :



5. प्रस्तुत सञ्चित बारम्बारता वक्रको तथ्याङ्कलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :



6. कुनै निश्चित क्षेत्रका 50 परिवारले प्रयोग गर्ने एक महिनाको पानीको खपत (लिटरमा) सम्बन्धमा पाइएको तथ्याङ्कलाई निम्नानुसार उल्लेख गरिएको छ :

पानीको खपत (हजार लिटरमा)	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20
परिवार सङ्ख्या	28	35	66	40	31

(क) माथिको तथ्याङ्कलाई हिस्टोग्राममा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7. विभिन्न 40 प्रकारका खानाहरूमा रहेको प्रोटिनको परिमाणका सम्बन्धमा गरिएको सर्वेक्षणबाट निम्नानुसारको तथ्याङ्क पाइयो :

प्रोटिन (ग्राममा) : 23, 30, 20, 27, 44, 26, 35, 20, 29, 29, 25, 15, 18, 27, 19, 22, 12, 26, 34, 15, 27, 35, 26, 43, 35, 14, 24, 12, 23, 31, 40, 35, 38, 57, 22, 42, 24, 21, 27, 33

(क) माथिको वैयक्तिक श्रेणीको तथ्याङ्कलाई 5/5 अन्तर हुने गरी (10 - 15), (15 - 20), ... लिएर अविच्छिन्न श्रेणीमा लेख्नुहोस् :

(ख) उक्त श्रेणीबाट हिस्टोग्राम खिच्नुहोस् ।

(ग) सोही श्रेणीबाट भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र र भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र एउटै ग्राफमा खिच्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

उपयुक्त सङ्ख्याका समूहमा विभाजन भई प्रत्येक समूहले कक्षा 6 देखि 10 सम्मका कक्षामध्ये कुनै एउटा कक्षामा गएर उक्त कक्षाका विद्यार्थीसँग तिनीहरूका परिवारका सदस्यको उमेर सङ्कलन गरी,

(क) 10/10 को अन्तर हुने गरी बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नुहोस् ।

(ख) हिस्टोग्राम खिच्नुहोस् ।

(ग) बारम्बारता बहुभुज खिच्नुहोस् ।

(घ) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र खिच्नुहोस् ।

(ङ) भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र खिच्नुहोस् ।

उत्तर

प्रश्न न. (1) देखि (7) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 18 केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापन (Measures of Central Tendency)

18.0 पुनरवलोकन (Review)

तपाईँहरूको कक्षा 8 पूरा गर्दाको गणित विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कका आधारमा छलफल गरी निम्नलिखित प्रश्नको समाधान गर्नुहोस् :

(क) सबै साथीहरूको औसत प्राप्ताङ्क (Mean) कति होला ?

(ख) मध्यिका (Median) कति होला ?

(ग) सबैभन्दा धेरै विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क (Mode) कति होला ?

18.1 अङ्कगणितीय मध्यक (Arithmetic mean)

क्रियाकलाप 1

कक्षा 9 को 20 पूर्णाङ्कको गणित विषयको एकाइ परीक्षामा 32 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्क यस प्रकार पाइयो :

12, 9, 14, 16, 14, 9, 12, 12, 10, 18, 14, 10, 12, 16, 18, 14, 12, 16, 16, 14, 16, 14, 14, 12, 18, 16, 16, 18, 14, 12, 14, 16

माथिका तथ्याङ्कका आधारमा,

(क) औसत कसरी निकालिन्छ ? औसतलाई अर्को शब्दमा के भनिन्छ ? औसत प्राप्ताङ्क कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) प्राप्त तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(ग) खण्डित श्रेणीबाट तथ्याङ्कहरूको योगफल र औसत प्राप्ताङ्क कति हुन्छ ?

यहाँ,

(क) प्राप्त तथ्याङ्कमा प्रत्येकको बारम्बारता एक एक हुने गरी अलग अलग अवस्थामा रहेको हुनाले वैयक्तिक श्रेणीमा छ, यहाँ,

$\sum X = 9 + 9 + 10 + 10 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 18 + 18 + 18 + 18 = 448$

जम्मा सङ्ख्या (N) = 32

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{448}{32} = 14$$

(ख) दिइएको तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा रूपान्तर गर्दा,

प्राप्ताङ्क	9	10	12	14	16	18
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	2	7	9	8	4

(ग)

प्राप्ताङ्क (X)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	$f \times X$
9	2	18
10	2	20
12	7	84
14	9	126
16	8	128
18	4	72
	$\sum f = N = 32$	$\sum fX = 448$

अब,

तथ्याङ्कहरूको योगफल $(\sum fX) = 448$

र जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या $(\sum f) = N = 32$

$$\therefore\ \overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{448}{32} = 14$$

दिइएको तथ्याङ्कको जम्मा योगफल (Sum) लाई तथ्याङ्कको जम्मा सङ्ख्या (N) ले भाग गर्दा आउने मानलाई अङ्कगणितीय मध्यक वा मध्यक वा औसत (Arithmetice mean or Mean or Average) भनिन्छ । यदि तथ्याङ्कलाई X ले प्रतिनिधित्व गरेमा त्यस्तो तथ्याङ्कको औसतलाई $\overline{X}$ ले जनाइन्छ । धेरै सङ्ख्यामा तथ्याङ्कहरू भएको र पुनरावृत्ति पनि भएको अवस्थामा सङ्कलित तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणी (Discrete series) मा प्रस्तुत गरी मध्यक हिसाब गर्न सजिलो हुन्छ । औसतले समग्र तथ्याङ्कको प्रतिनिधित्व गर्दछ । तथ्याङ्कको केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापन गर्ने एउटा महत्त्वपूर्ण साधन (tool) अङ्कगणितीय मध्यक हो ।

उदाहरण 1

दिइएको तथ्याङ्कबाट अङ्कगणितीय मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	10	20	30	40	50	60
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	4	7	15	12	1

समाधान

यहाँ,

प्राप्ताङ्क (X)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	$f \times X$
10	3	$3 \times 10 = 30$
20	4	$4 \times 20 = 80$
30	7	$7 \times 30 = 210$
40	15	$15 \times 40 = 600$
50	12	$12 \times 50 = 600$
60	1	$1 \times 60 = 60$
	$\sum f = N = 42$	$\sum fX = 1580$

सूत्रअनुसार,

अङ्कगणितीय मध्यक $(\overline{X}) = \dfrac{\sum fX}{N}$

$= \dfrac{1580}{42}$

$= 37.62$

$\therefore$ औसत प्राप्ताङ्क 37.62 रहेछ ।

उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्कको औसत ज्याला रु. 4,100 भए y को मान निकाल्नुहोस् :

ज्याला रु.	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	7,000
कामदार सङ्ख्या	8	12	20	y	6	4

समाधान

यहाँ,

ज्याला (X)	कामदार सङ्ख्या (f)	$f \times X$
2000	8	$8 \times 2000 = 16000$
3000	12	$12 \times 3000 = 36000$
4000	20	$20 \times 4000 = 80000$
5000	y	$y \times 5000 = 5000y$
6000	6	$6 \times 6000 = 36000$
7000	4	$4 \times 7000 = 28000$
	$N = \sum f = 50 + y$	$\sum fX = 196000 + 5000y$

सूत्रअनुसार,

औसत ज्याला $(\overline{X}) = \dfrac{\sum fX}{N}$

अथवा, $4100 = \dfrac{196000 + 5000y}{50 + y}$

अथवा, $\dfrac{4100}{1} = \dfrac{196000 + 5000y}{50 + y}$

अथवा, $196000 + 5000y = 4100(50 + y)$

अथवा, $196000 + 5000y = 205000 + 4100y$

अथवा, $5000y - 4100y = 205000 - 196000$

अथवा, $900y = 9000$

अथवा, $y = \dfrac{9000}{900}$

$\therefore y = 10$

18.2 मध्यिका (Median)

क्रियाकलाप 2

(क) बढ्दो उचाइअनुसार बिजोर सङ्ख्यामा कक्षाका साथीहरू उभिनुहोस् र ठिक बिचमा पर्ने साथीको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) बढ्दो उचाइअनुसार जोर सङ्ख्यामा कक्षाका साथीहरू उभिनुहोस् र ठिक बिचमा पर्ने साथीको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

यसरी ठिक बिचमा पर्ने साथीको उचाइलाई के भनिन्छ होला, छलफल गर्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 3

खेल सप्ताहका विभिन्न खेलहरूमा भाग लिई पुरस्कृत हुने कक्षा 5 देखि कक्षा 10 सम्मका विद्यार्थीको उमेर निम्नानुसार पाइयो :

उमेर (वर्षमा) : 10, 8, 12, 10, 14, 8, 10, 12, 18, 12, 14, 10, 12, 14, 16, 14, 8, 12, 14, 16, 14, 12, 10, 12, 12, 14, 16, 14, 12

अब प्राप्त तथ्याङ्कको अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको सम्बन्धमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) प्राप्त तथ्याङ्क कुन श्रेणीमा छ ?

(ख) तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा मिलाएर लेख्नुहोस् ।

(ग) तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राखेपछि ठिक बिचमा कुन तथ्याङ्क पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) त्यस्तो मानलाई के भनिन्छ ?

(ङ) माथिको तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणी (Discrete series) मा लेखी सञ्चित बारम्बारता तालिकामा पनि प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(च) मध्यिका पर्ने स्थान पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ,

(क) दिइएको तथ्याङ्क (data) वैयक्तिक श्रेणीमा छ ।

(ख) तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा मिलाएर लेख्दा,

8, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 16, 16, 16, 18

(ग) बायाँबाट पनि 15 औँ स्थान र दायाँबाट पनि 15 औँ स्थानमा पर्ने एउटा तथ्याङ्क 12 देखिएको छ । जम्मा 29 ओटा तथ्याङ्कको ठिक बिचमा अर्थात् 50% मा 12 पर्छ । यसलाई निम्नानुसारको सूत्रबाट पनि हिसाब गरिन्छ :

मध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

$= \left(\frac{29+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

$= \left(\frac{30}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

$= 15$ औँ स्थानको मान

8, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 16, 16, 16, 18

∴ मध्यिका $(M_d) = 12$

(ङ) दिइएको तथ्याङ्कको बारम्बारता 1 र सोभन्दा बढी भएकाले निम्नानुसार खण्डित श्रेणीमा लेख्न सकिन्छ :

उमेर (वर्षमा)	8	10	12	14	16	18
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	9	8	3	1

अब निम्नबमोजिम सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण गरौँ :

उमेर (वर्षमा)	बारम्बारता	सञ्चित बारम्बारता (cf)
8	3	3
10	5	$3 + 5 = 8$
12	9	$8 + 9 = 17$
14	8	$17 + 8 = 25$
16	3	$25 + 3 = 28$
18	1	$28 + 1 = 29$
	जम्मा सङ्ख्या $(N) = 29$	

(च) मध्यिका $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

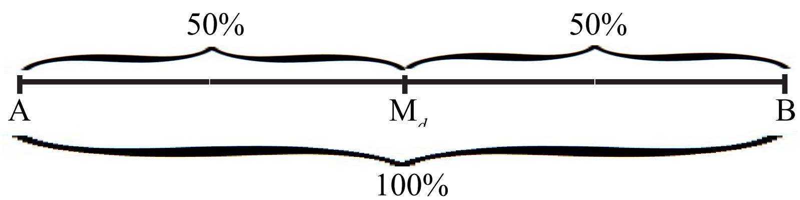
$= \left(\frac{29+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

$= \left(\frac{30}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

$= 15$ औँ स्थानको मान

यहाँ सञ्चित बारम्बारता तालिकाबाट 15 औँ स्थानको मान 12 छ तसर्थ मध्यिका $(M_d) = 12$ हुन्छ ।

मध्यिकालाई तलको चित्रबाट अझ प्रस्ट धारणा बनाउन सजिलो हुन्छ :



चित्रमा कुल तथ्याङ्कलाई रेखाखण्ड AB मानिएको छ र AB लाई ठिक आधा बनाउने एउटा बिन्दु M_d छ जसले M_d बाट बायाँ र दायाँ बराबर दुई भागमा अर्थात् तल्लो 50% र माथिल्लो 50% मा विभाजन गर्दछ ।

दिइएको तथ्याङ्कलाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्ने मानलाई मध्यिका (Median) भनिन्छ । मध्यिकालाई M_d ले जनाइन्छ । मध्यिकाले तथ्याङ्कलाई 50/50 प्रतिशतमा विभाजन गर्दछ । त्यसैले मध्यिका पर्ने स्थान हिसाब गर्दा 2 ले भाग गरिन्छ ।

खण्डित श्रेणीमा प्रस्तुत तथ्याङ्क (Data) बाट मध्यिका निकाल्दा तथ्याङ्कलाई बढ्दो वा घट्दो क्रममा राखिन्छ । मध्यिका पर्ने स्थानको सञ्चित बारम्बारतालाई तालिकाबाट हिसाब गरेर सोही सञ्चित बारम्बारतासँग सम्बन्धित तथ्याङ्कमान नै मध्यिका (Median) हुन्छ ।

मध्यिका पर्ने स्थान निम्नानुसार सूत्र प्रयोग गरी पत्ता लगाइन्छ :

जम्मा सङ्ख्या = N भएमा, मध्यिका $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

उदाहरण 3

दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

वर्षा (mm)	40	43	54	55	60	62
स्थानहरू	3	6	9	5	4	2

समाधान

दिइएको तथ्याङ्क निश्चित क्रममा छ/छैन हेर्नुपर्छ । यदि छैन भने बढ्दो या घट्दो क्रममा मिलाएर राखी सोहीअनुसारको बारम्बारता लेख्नुपर्दछ । यहाँ तथ्याङ्कलाई पहिले नै बढ्दो क्रममा राखिएकाले मिलाउनु आवश्यक छैन ।

वर्षा (mm)	स्थानहरू (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
40	3	3
43	6	9
54	9	18
55	5	23
60	4	27
62	2	29
	जम्मा सङ्ख्या (N) = $\sum f$ = 29	

यहाँ N = 29 छ,

हामीलाई थाहा छ,

मध्यिका = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

= $\left(\frac{29+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

= $\left(\frac{30}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

= 15 औँ स्थानको मान

सञ्चित बारम्बारता तालिकाबाट हेर्दा,

$\therefore$ मध्यिका (M_d) = 54 mm हुन्छ ।

उदाहरण 4

दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क (X)	10	15	20	25	30
बारम्बारता (f)	4	6	8	3	5

समाधान

यहाँ दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताङ्क (X)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
10	4	4
15	6	10
20	8	18
25	3	21
30	5	26
	जम्मा सङ्ख्या (N) = 26	

अब, मध्यिका = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

= $\left(\frac{26+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

= $\frac{27}{2}$ औँ स्थानको मान

= 13.5 औँ स्थानको मान

= $\frac{13 \text{ औँ स्थानको मान} + 14 \text{ औँ स्थानको मान}}{2}$

= $\frac{20+20}{2}$ [∵ सञ्चित बारम्बारता तालकाबाट 13 र 14 औँ स्थानको मान 20/20 भएकाले]

= $\frac{40}{2}$ = 20

अत: मध्यिका (Md) = 20 हुन्छ ।

उदाहरण 5

दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क (X)	10	12	14	16	18	20
बारम्बारता (f)	3	4	2	3	5	7

समाधान

यहाँ दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताङ्क (X)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
10	3	3
12	4	7
14	2	9
16	3	12
18	5	17
20	7	24
	जम्मा सङ्ख्या (N) = 24	

अब, मध्यिका $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

$= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ स्थानको मान

$= \frac{25}{2}$ औँ स्थानको मान

$= 12.5$ औँ स्थानको मान

$= \frac{12 \text{ औँ स्थानको मान} + 13 \text{ औँ स्थानको मान}}{2}$

$= \frac{16+18}{2}$

$= \frac{34}{2}$

$= 17$

> यसलाई यसरी पनि गर्न सकिन्छ,
>
> मध्यिका = 12 औँ स्थानको मान + 0.5 (13 औँ स्थानको मान – 12 औँ स्थानको मान)
>
> = 16 + 0.5 (18 – 16)
>
> = 16 + 1 = 17

अत: मध्यिका (Md) = 17 हुन्छ ।

18.3 रित (Mode)

क्रियाकलाप 4

समय (घण्टामा) : 13, 13, 15, 8, 17, 8, 10, 15, 8, 13, 17, 13, 10, 13, 12, 10, 12, 18, 15, 8, 17

(क) माथि दिइएको तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा लेख्नुहोस् ।

(ख) कुन मान सबैभन्दा बढी दोहोरिएको छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) दिइएको तथ्याङ्कको रित कति हुन्छ ?

यहाँ, (क)

समय (घण्टा)	8	10	12	13	15	17	18
बारम्बारता	4	3	2	5	3	3	1

(ख) यहाँ, सबैभन्दा बढी दोहोरिएको (धेरै बारम्बारता भएको) मान 13 हो ।

(ग) तसर्थ, रित $(M_o) = 13$ हुन्छ ।

दिइएका मानहरूमध्ये सबैभन्दा बढी दोहोरिएको वा धेरै बारम्बारता भएको मानलाई रित (Mode) भनिन्छ । रितलाई M_o ले सङ्केत गरिन्छ ।

त्यसैले रित (M_o) = सबैभन्दा बढी बारम्बारता भएको तथ्याङ्क

उदाहरण 5

दिइएको तथ्याङ्कबाट रित पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	10	20	30	40	50	60	70
विद्यार्थी सङ्ख्या	12	32	50	85	45	30	5

समाधान

यहाँ सबैभन्दा धेरै विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क 40 हो । जुन 85 जनाले प्राप्त गरेका छन् । अर्थात् प्राप्ताङ्कहरूमध्ये सबैभन्दा धेरै बारम्बारता 85 भएको प्राप्ताङ्क 40 हो ।

∴ रित प्राप्ताङ्क $(M_o) = 40$ हुन्छ ।

अभ्यास 18.1

1. दिइएको तथ्याङ्कबाट अङ्कगणितीय मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

प्राप्ताङ्क	10	20	30	40	50
बारम्बारता	2	5	12	7	1

(ख)

उमेर (वर्षमा)	15	25	35	45	55
बिरामीको सङ्ख्या	40	30	50	20	10

(ग)

X	40	50	55	62	75	80
f	4	6	10	8	5	2

(घ)

दुधको मात्रा (ml)	500	700	1000	1500	2000
परिवार सङ्ख्या	8	5	9	5	3

2. दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका (Median) निकाल्नुहोस् :

(क)

प्राप्ताङ्क	10	20	30	40	50	60
बारम्बारता	5	9	15	12	6	3

(ख)

ज्याला (रु.)	300	350	400	450	500	550	600
कामदार सङ्ख्या	6	12	18	14	7	4	1

(ग)

तौल (Kg)	20	25	30	35	40
मानिसको सङ्ख्या	5	7	10	5	3

(घ)

लाभांश (रु.)	300	400	500	600	700
कामदार सङ्ख्या	10	14	20	12	4

3. प्रश्न न. 1 को तथ्याङ्कबाट मध्यिका निकाल्नुहोस् ।
4. प्रश्न न. 2 को तथ्याङ्कबाट अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्नुहोस् ।
5. मान निकाल्नुहोस् :

(क) दिइएको तथ्याङ्कको मध्यक $\overline{X} = 38$ भए k को मान निकाल्नुहोस् :

X	30	25	35	45	55
f	2	6	k	10	3

(ख) दिइएको तथ्याङ्कको मध्यक $\overline{X} = 175$ भए m को मान निकाल्नुहोस् :

प्राप्ताङ्क	155	165	175	185	195
बारम्बारता	3	m	5	4	2

(ग) दिइएको तथ्याङ्कको मध्यक $\overline{X} = 24.55Kg$ भए r को मान निकाल्नुहोस् :

तौल (Kg)	20	22	25	26	r	34
मानिसको सङ्ख्या	4	4	5	4	2	1

6. तल दिइएको तथ्याङ्कबाट रित पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)	X	10	15	20	25	30
	f	2	4	6	4	2

(ख)	ज्याला (रु. मा)	120	150	175	200	225	300
	कामदार सङ्ख्या	10	12	17	13	4	3

(ग)	प्राप्ताङ्क	15	25	45	55	65	70
	बारम्बारता	7	8	12	10	3	1

(घ)	तौल (Kg)	10	20	30	40	50
	मानिसको सङ्ख्या	5	9	15	12	6

7. एउटा बगैँचामा रोपिएका 40 ओटा बिरुवाको उचाइ तल दिइएको छ। उक्त तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा प्रस्तुत गरी अङ्कगणितीय मध्यक र मध्यिका निकाल्नुहोस् :

उचाइ (cm) : 20, 25, 20, 10, 30, 35, 30, 25, 20, 40,

40, 35, 30, 30, 25, 20, 25, 30, 35, 30,

20, 25, 30, 25, 35, 25, 40, 25, 40, 30,

25, 35, 30, 35, 35, 25, 30, 35, 30, 30

उत्तर

1. (क) 30	(ख) 30.33	(ग) 58.31	(घ) 1000 m*l*
2. (क) 30	(ख) रु.400	(ग) 30 kg	(घ) रु. 500
3. (क) 30	(ख) 35	(ग) 55	(घ) 1000 m*l*
4. (क) 32.8	(ख) रु. 416.13	(ग) 29 kg	(घ) 476.67
5. (क) $k = 9$	(ख) $m = 2$	(ग) $r = 30$	
6. (क) 20	(ख) रु. 175	(ग) 45	(घ) 30 kg

7. 27.5 cm र 30 cm , Mean (मध्यक) = 29 cm, Madian (मध्यिका) = 30 cm

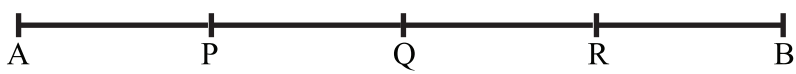
18.4 चतुर्थांशहरू (Quartiles)

क्रियाकलाप 1

दिइएको चित्र अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) दिइएको सरल रेखाखण्ड AB लाई 4 बराबर भागमा विभाजन गर्न कति ठाउँमा काट्नुपर्छ ? चित्रमा ती बिन्दुहरू कुन कुन दिइएका छन् ?

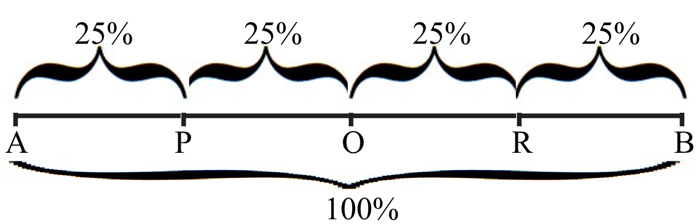
(ख) AB लाई 100% मान्ने हो भने AP, PQ, QR र RB कति कति प्रतिशत हुन आउँछ ?



(ग) AB मध्ये A बाट P सम्म, A बाट Q सम्म र A बाट R सम्म कति कति प्रतिशत हुन्छ ?

(घ) AB को खण्डहरूमध्ये 25% मान जनाउने बिन्दु P, 50% मान जनाउने बिन्दु Q र 75% मान जनाउने बिन्दु R लाई के भनिन्छ ?

छलफलबाट,



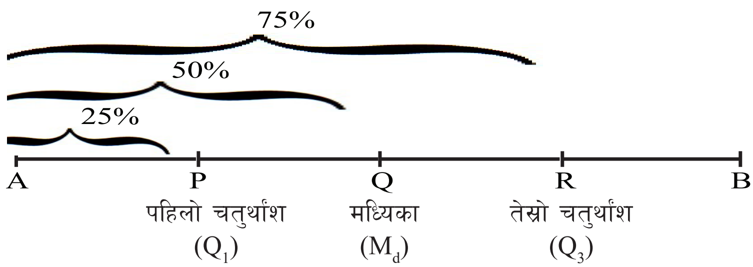
(क) दिइएको सिधा रेखाखण्ड AB लाई 4 बराबर भाग लगाउन 3 बिन्दुमा काट्नुपर्छ । चित्रमा ती तीन बिन्दुहरू क्रमशः P, Q र R देखाइएको छ ।

(ख) AB लाई 100% मान्दा,

AP = 25%, PQ = 25%, QR = 25%, RB = 25%

(ग) AB मध्ये A बाट P सम्म 25%, A बाट Q सम्म 50% र A बाट R सम्म 75% हुन आउँछ ।

(घ) यदि AB ले 100% तथ्याङ्कलाई जनाउँछ भने र तथ्याङ्कहरूलाई बढ्दो क्रममा मिलाएर राखिएको छ भने पहिलो 25% मानहरूमध्ये अधिकतम मानले P को स्थानमा भएको मानलाई बुझाउँछ । त्यसैगरी 50% र 75% मानहरूमध्ये अधिकतम मानले क्रमशः Q र R का स्थानमा भएको मानहरूलाई जनाउँछ । P, Q र R का स्थानमा भएका मानहरूले क्रमशः पहिलो, दोस्रो र तेस्रो चतुर्थांशका मानहरूलाई जनाउँछ ।



क्रियाकलाप 2

दिइएका तथ्याङ्क अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको समाधान गर्नुहोस् :

40, 48, 37, 35, 46, 45, 47

(क) दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा मिलाएर राख्नुहोस् ।

(ख) 25% र 75% मा कुन कुन तथ्याङ्क पर्छ होला ?

(ग) 25% र 75% लाई भिन्नमा रूपान्तर गर्दा लघुत्तम भिन्न कति हुन्छ ?

(घ) दिइएको तथ्याङ्कको परिमाण सङ्ख्यामा 1 जोड्नुहोस् र क्रमशः 25% र 75% लाई भिन्नमा लेखेर लघुत्तम पदले गुणन गर्नुहोस् । त्यसपछि, Q_1 पर्ने स्थान र Q_3 पर्ने स्थान पत्ता लगाई Q_1 र Q_3 कति कति हुने रहेछ, लेख्नुहोस् ।

छलफलबाट,

(क) दिइएका तथ्याङ्कमा सबैभन्दा कम 35 छ । अब उक्त 35 बाट बढ्दो क्रममा राख्दा,

35, 37, 40, 45, 46, 47, 48 हुन्छ ।

(ख) 35, 37, 40, 45, 46, 37 48

Q_1 (37), M_d (45), Q_3 (37)

(ग) $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{1}{4}$ = 4 भागमा 1 भाग र

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{3}{4}$ = 4 भागमा 3 भाग

(घ) दिइएका तथ्याङ्कहरू 7 ओटा छन् ।

$Q_1 = \frac{1}{4}(N + 1)$ औँ पद $= \frac{1}{4}(7 + 1)$ औँ पद $= \frac{1}{4} \times 8$ औँ पद = दोस्रो पद

Q_1 = दोस्रो मान = 37

$Q_3 = \frac{3}{4}(N + 1)$ औँ पद $= \frac{3}{4}(7 + 1)$ औँ पद $= \frac{3}{4} \times 8$ औँ पद = छैटौँ पद

Q_3 = छैटौँ पद = 47

$\therefore Q_1 = 37$

$Q_3 = 47$

क्रियाकलाप 3

दिइएका तथ्याङ्कको अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

तौल (kg)	20	22	24	27	28	30	31
बारम्बारता	6	8	9	7	5	5	3

दिइएका तथ्याङ्क बढ्दो क्रममा नभएमा सोही क्रममा लेखी,

(क) सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नुहोस् ।

(ख) पहिलो र तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) सञ्चित बारम्बारता तालिकाबाट पहिलो र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् ।

छलफलबाट,

(क) सञ्चित बारम्बारता तालिकाको निर्माण गर्दा :

तौल (kg)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
20	6	6
22	8	14
24	9	23
27	7	30
28	5	35
30	5	40
31	3	43
	जम्मा सङ्ख्या (N) = 43	

(ख) सञ्चित बारम्बारता तालिकाबाट :

$$Q_1 = \frac{1}{4}(N+1) \text{ औँ स्थानको मान}$$

$$= \frac{1}{4} \times (43+1) \text{ औँ स्थानको मान}$$

$$= 11 \text{ औँ स्थानको मान}$$

सञ्चित बारम्बारताबाट हेर्दा,

11 औँ स्थानको तथ्याङ्क 22 हो । त्यसैले, $Q_1 = 22$ हुन्छ ।

$$Q_3 = \frac{3}{4}(N+1) \text{ औँ स्थानको मान}$$

$$= \frac{3}{4}(43+1) \text{ औँ स्थानको मान}$$

$$= 33 \text{ औँ स्थानको मान}$$

सञ्चित बारम्बारताबाट हेर्दा,

33 औँ स्थानको मान 28 हो । त्यसैले, $Q_3 = 28$ हुन्छ ।

दिइएको तथ्याङ्कलाई 4 बराबर भागमा विभाजन गर्ने तीनओटा मानलाई चतुर्थांश भनिन्छ । जसमा पहिलो चतुर्थांशलाई Q_1, दोस्रो चतुर्थांशलाई Q_2 र तेस्रो चतुर्थांशलाई Q_3 ले जनाइन्छ । Q_1 र Q_3 ले पूरा तथ्याङ्कलाई क्रमशः 25% र 75% मा विभाजन गर्छन् ।

यहाँ Q_2 ले पूरा तथ्याङ्कलाई 50% मा विभाजन गर्ने भएकाले यसलाई मध्यिका (Median) पनि भनिन्छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएका तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश Q_1 र तेस्रो चतुर्थांश Q_3 पत्ता लगाउनुहोस् :

57, 59, 52, 54, 51, 53, 55

समाधान

दिइएका तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

51, 52, 53, 54, 55, 57, 59

दिइएका तथ्याङ्कहरू 7 ओटा छन् ।

Q_1 पर्ने स्थान $= \frac{1}{4}(N+1)$ औँ पद $= \frac{1}{4}(7+1)$ औँ पद $= \frac{1}{4} \times 8$ औँ पद $=$ दोस्रो पद

Q_1 = दोस्रो मान = 52

$Q_3 = \frac{3}{4}$ (N + 1) औँ पद = $\frac{3}{4}$ (7 + 1) औँ पद = $\frac{3}{4}$ 8 औँ पद = छैटौँ पद

Q_3 = छैटौँ पद = 57

$\therefore Q_1 = 52$

$Q_3 = 57$

उदाहरण 2

तल दिइएका तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश Q_1 र तेस्रो चतुर्थांश Q_3 पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	10	20	30	40	50	60	70
विद्यार्थी सङ्ख्या	12	32	50	85	45	30	5

समाधान

सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा,

प्राप्ताङ्क	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
10	6	6
20	4	10
30	2	12
40	1	13
50	5	18
60	8	26
70	9	35
	जम्मा सङ्ख्या (N) = 35	

$Q_1 = \frac{1}{4}$(N + 1) औँ पद = $\frac{1}{4}$(35 + 1) औँ पद = $\frac{1}{4} \times 36$ औँ पद = 9 औँ पद

Q_1 = 9 औँ पदको मान = 20

$Q_3 = \frac{3}{4}$ (N + 1) औँ पद = $\frac{3}{4}$ (35 + 1) औँ पद = $\frac{3}{4} \times 36$ औँ पद = 27 औँ पद

Q_3 = 27 औँ पद = 70

$\therefore Q_1 = 20$

$Q_3 = 70$

उदाहरण 3

तल दिइएका तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश Q_1 र तेस्रो चतुर्थांश Q_3 पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	12	13	14	15	16	17	18
विद्यार्थी सङ्ख्या	6	8	9	3	3	5	4

समाधान

सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा,

प्राप्ताङ्क	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
12	6	6
13	8	14
14	9	23
15	3	26
16	3	29
17	5	34
18	4	38
	जम्मा सङ्ख्या (N) = 38	

$Q_1 = \frac{1}{4}(N + 1)$ औँ पद $= \frac{1}{4}(38 + 1)$ औँ पद $= \frac{1}{4} \times 39$ औँ पद $=$ 9.75 औँ पद

Q_1 = 9 औँ पदको मान + 0.75 (10 औँ पदको मान – 9 औँ पदको मान)

= 13 + 0.75 (13 – 13)

= 13

$Q_3 = \frac{3}{4}$ (38+ 1) औँ पद $= \frac{3}{4}$ (38 + 1) औँ पद $= \frac{3}{4} \times 39$ औँ पद = 29.25 औँ पद

Q_3 = 29 औँ पदको मान + 0.25 (30 औँ पदको मान – 29 औँ पदको मान)

= 16 + 0.25 (17 – 16)

= 16 + 0.25

= 16.25

अभ्यास 18.2

1. **दिइएको तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश र तेसो चतुर्थांश निकाल्नुहोस् :**

(क) 20, 40, 30, 15, 60, 90, 80

(ख) रु.400, रु.600, रु.350, रु.200, रु.550, रु.700, रु.320, रु.625, रु.370, रु.650, रु.275

(ग) 20, 15, 5, 10, 25

(घ) 15 kg, 9 kg, 12 kg, 24 kg, 18 kg, 21 kg

(ङ) 18 °C, 28 °C, 26 °C, 16°C, 21°C, 29 °C, 25 °C, 12 °C, 23 °C

2. **दिइएको तथ्याङ्कबाट तल्लो चतुर्थांश (Q_1) र माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) निकाल्नुहोस् :**

(क)

प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	8	7	4	3

(ख)

ज्याला	300	250	350	450	550
कामदार सङ्ख्या	2	6	9	10	1

(ग)

तौल (Kg)	105	115	125	135	145	155
बारम्बारता	8	10	7	12	7	6

(घ)

X	16	12	20	14	18
f	7	3	6	8	4

3. **गणित विषयको 30 पूर्णाङ्कको एउटा परीक्षामा कक्षा 9 का 19 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्क निम्नानुसार पाइयो :**

15, 10, 25, 10, 20, 15, 20, 25, 15, 20, 10, 20, 25, 15, 30, 20, 20, 30, 25

माथिको तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा प्रस्तुत गरी पहिलो र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. **एउटा विद्यालयको सर्वेक्षण गर्दा कक्षा 10 का 45 जना विद्यार्थीको तौल (Kg मा) निम्नानुसार पाइयो :**

25, 40, 35, 35, 29, 40, 38, 25, 29, 27, 29, 27, 35, 40, 35, 29, 35, 38, 27, 29, 29, 40, 35, 35, 38, 29, 40, 27, 29, 35, 38, 27, 27, 29, 29, 25, 40, 27, 38, 25, 35, 25, 35, 29, 29

प्राप्त तथ्याङ्कबाट तल्लो र माथिल्लो चतुर्थांश निकाल्नुहोस् ।

5. तल दिइएका तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 47, 49, 52, 54, 51, 53, 55

(ख) 7, 9, 6, 5, 7, 6, 4, 10, 9

(ग) 5, 10, 15, 20, 25

(घ) 64, 60, 70, 72, 68, 80, 85, 56

6. तल दिइएका तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)	प्राप्ताङ्क	60	70	80	85	90	95	98
	विद्यार्थी सङ्ख्या	5	7	12	15	18	3	2

(ख)	साप्ताहिक आम्दानी (रु.)	300	400	500	600	700	800	900
	कामदार सङ्ख्या	40	20	15	17	25	10	5

(ग)	उचाइ (cm)	120	121	122	123	124	125	126
	विद्यार्थी सङ्ख्या	5	10	12	17	16	3	4

(घ)	औसत तापक्रम (°C)	20	22	25	26	27	29
	दिन	4	6	8	5	3	4

परियोजना कार्य

उपयुक्त समूहमा विभाजन भई आफ्नो कक्षाका वा अगिल्ला कक्षाका विद्यार्थीले प्राप्त गरेको सबै विषयको प्रप्ताङ्क लिई विषयअनुसार अलग अलग रूपमा सो तथ्याङ्कको मध्यक, मध्यिका, रित, पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश गणना गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) $Q_1 = 20, Q_3 = 80$ (ख) $Q_1 = 320, Q_3 = 625$
   (ग) $Q_1 = 7.5, Q_3 = 22.5$ (घ) $Q_1 = 11.25, Q_3 = 21.75$
   (ङ) $Q_1 = 17, Q_3 = 27$
2. (क) $Q_1 = 10, Q_3 = 21.25$ (ख) $Q_1 = 300, Q_3 = 450$
   (ग) $Q_1 = 115, Q_3 = 145$ (घ) $Q_1 = 14, Q_3 = 18$
3. $Q_1 = 15, Q_3 = 25$
4. $Q_1 = 27, Q_3 = 36.5$
5. (क) $Q_1 = 49, Q_3 = 54$ (ख) $Q_1 = 5.5, Q_3 = 9$
   (ग) $Q_1 = 7.5, Q_3 = 22.5$ (घ) $Q_1 = 61, Q_3 = 78$
6. (क) $Q_1 = 22, Q_3 = 26$ (ख) $Q_1 = 80, Q_3 = 90$
   (ग) $Q_1 = 122, Q_3 = 124$ (घ) $Q_1 = 300, Q_3 = 700$

पाठ 19 सम्भाव्यता (Probability)

19.0 पुनरवलोकन (Review)

तल दिइएका कथनहरूको अध्ययन गर्नुहोस् :

(क) आज बादल लागेको छ, सायद पानी पर्छ होला ।

(ख) म परीक्षामा सफल हुनेमा आशङ्का छ ।

(ग) चुनावमा दुवै उम्मेदवारको जित्ने सम्भावना बराबर देखिन्छ ।

(घ) आउँदो विश्व कप फुटबलमा सहभागी हुने देशमध्ये कुन देशले जित्ने सम्भावना बढी होला ?

माथिका कथनहरूको अवलोकन गर्दा सायद, आशङ्का, सम्भावना जस्ता शब्दहरूले अनिश्चितता वा निश्चित नभएको कुराहरूलाई जनाउँछ । अर्थात् उक्त काम हुन पनि सक्छ र नहुन पनि सक्छ । हामीले विगतका अनुभव तथा घटनाहरूका आधारमा आउने घटनाका अनुमान गर्दछौँ । परापूर्वकालदेखि नै मानिसले आफ्नो दैनिक जीवनमा घट्न सक्ने यस्ता विविध घटनाहरूको बारेमा अनुमान गर्ने गरेको पाइन्छ ।

19.1 सम्भाव्यता (Probability)

अनुमान अनिश्चित भविष्यवाणी तथा सम्भावना हो । यही अनिश्चितताको मापन गर्नुलाई नै सम्भाव्यता (Probability) भनिन्छ, जस्तैः माथिका कथनहरूमा आज आकाशमा बादल देखिन्छ । पानी पर्ने सम्भावना छ, छाता बोक्नु पर्ला । यहाँ पानी पर्ने सम्भावनाको कुरा अनुमान मात्र हो, पानी पर्ने निश्चितता छैन । त्यसैले आकाशमा देखिने बादल पानी पर्ने सम्भाव्यताको सङ्केत हो ।

सम्भाव्यतामा प्रयोग हुने केही परिभाषित शब्दहरू

क्रियाकलाप 1

एउटा सिक्कालाई उफारेर र एउटा डाइसलाई गुडाएर हेर्दा के के आउन सक्छ होला ?

सिक्कामा माथिबाट कि अग्र भाग (Head) = H) वा पश्च भाग (Tail = T) देखिन्छ ।

सिक्कामा माथिबाट देखिन सक्ने भागलाई समूह सङ्केतमा लेख्दा (S) = {H, T} लेखिन्छ ।

त्यस्तै एउटा डाइसलाई एक पटक गुडाउँदा माथिल्लो भागमा 1, 2, 3, 4, 5 वा 6 मध्ये कुनै एउटा देखिन्छ । यसलाई समूह सङ्केतमा लेख्दा (S) ={1, 2, 3, 4, 5, 6} लेखिन्छ ।

माथिका उदाहरणका आधारमा तलका शब्दावलीहरूका बारेमा अध्ययन गर्नुहोस् :

(क) परीक्षण (Experiment)

कुनै निश्चितताको साथ भविष्यवाणी गर्न नसकिने परिणामहरू आउने गरी गरिने क्रियाकलापलाई नै परीक्षण भनिन्छ । माथिको पहिलो उदाहरणमा H वा T मध्ये कुनै एउटा आउँछ तर कुन बेला के आउँछ निश्चित हुँदैन । तसर्थ सिक्का उफार्ने कार्य परीक्षण हो ।

(ख) यादृच्छिक परीक्षण (Random Experiment)

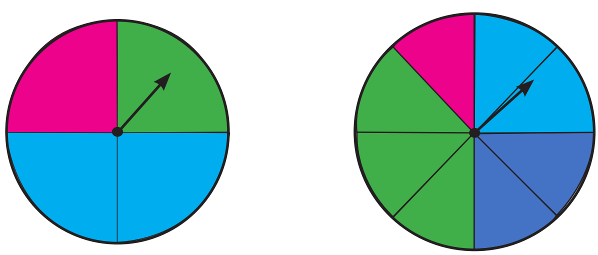
कुनै परीक्षणको नतिजा पहिले नै यकिन (निश्चितताका) साथ भन्न नसकिने अवस्थाको परीक्षणलाई यादृच्छिक परीक्षण भनिन्छ, जस्तैः कुनै एउटा गोला प्रथा कार्यक्रममा उपहार कसले प्राप्त गर्छ भन्ने कुरा भन्न सकिने अवस्था हुँदैन । यसलाई किटानीका साथ भन्न सकिँदै न । त्यसैले गोला थुत्ने काम एउटा यादृच्छिक परीक्षण हो । त्यस्तै माथिका क्रियाकलापहरूमा सिक्का उफार्नु, डाइस गुडाउनु जस्ता क्रियाहरू यादृच्छिक परीक्षण हुन् ।

(ग) परिणाम (Outcomes)

कुनै पनि परीक्षणमा प्राप्त हुने नतिजालाई नै परिणाम भनिन्छ, जस्तैः एउटा सिक्का उफार्दा अग्र भाग वा पछिल्लो भागमध्ये कुन देखिन्छ, त्यो नै सिक्का उफार्दाको परिणाम हो ।

(घ) समान सम्भाव्यताका परिणाम (Equally Likely Outcomes)

कुनै परीक्षणमा हुन सक्ने घटनाहरूको सम्भाव्यता समान छ भने त्यस्तो परिणामलाई समान सम्भाव्यताको परिणाम भनिन्छ ।



माथिको पहिलो चित्रमा स्पिनरलाई घुमाउँदा त्यसको सियो चार रङमध्ये कुनै पनि रङमा अडिने सम्भावना बराबर हुन्छ किनकि सबै रङले ओगटेका भागका क्षेत्रफल बराबर छन् । तसर्थ रातो, हरियो, पहेँलो तथा निलो सबैमा सुई रोकिने परिणामहरू समान सम्भाव्यताका परिणाम हुन् ।

फेरि दोस्रो चित्रमा स्पिनरलाई घुमाउँदा त्यसको सियो चार रङमध्ये कुनै पनि रङमा अडिने सम्भावना बराबर हुँदैन किनकि सबै रङले ओगटेका भागको क्षेत्रफल बराबर छैन । तसर्थ रातो, हरियो, पहेँलो तथा निलो सबैमा सुई रोकिने समान सम्भाव्यताका परिणाम भएनन् ।

(ङ) नमुना क्षेत्र (Sample Space)

कुनै परीक्षणमा प्राप्त हुन सक्ने सम्भाव्य सबै परिणामहरूको समूहलाई नै नमुना क्षेत्र भनिन्छ । यसलाई सामान्यतया S ले जनाइन्छ, जस्तैः

सिक्कालाई उफार्दा प्राप्त हुने नमुना क्षेत्र (S) = {H, T} भयो र n(S) = 2 हुन्छ ।

डाइसलाई गुडाउँदा प्राप्त हुने नमुना क्षेत्र (S) ={1, 2, 3, 4, 5, 6} लेखिन्छ र n(S) = 6 हुन्छ ।

(च) घटना (Event)

कुनै परीक्षणबाट प्राप्त हुने केही परिणामको समूहलाई घटना भनिन्छ । अर्थात नमुना क्षेत्रको उपसमूहलाई घटना भनिन्छ । यसलाई साधारणतया E ले जनाइन्छ ।

एउटा सिक्का उफार्दा प्राप्त नतिजा S = {H, T} छन् भने अग्र भाग पर्ने, पश्च भाग पर्ने, कुनै पनि नपर्ने आदि यसका घटनाहरू हुन् । { }, {H}, {T}, {H,T} सबै घटनाहरू हुन् ।

(छ) पारस्परिक निषेधक घटना (Mutually Exclusive Events)

एउटा सिक्कालाई उफार्दा त्यसमा कुन भाग माथि पर्छ टिपोट गर्नुहोस् । मानौँ उक्त परीक्षणमा T देखियो । के त्यो अवस्थामा H देखिएको थियो ? फेरि दोस्रो पटक उफारेर हेर्दा मानौँ H देखियो । के यो अवस्थामा T देखियो त ?

यसरी कुनै परीक्षणमा एउटा घटना आँउदा अर्को घटना आउनै सक्दैन भने ती घटनाहरूलाई पारस्परिक निषेधक घटनाहरू भनिन्छ, जस्तै: एक पटक सिक्का उफार्दा H वा T मध्ये कुनै एउटा आउँछ तर एकै पटकमा दुई ओटै आउन सक्दैन । तसर्थ H आउने र T आउने घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन् ।

त्यस्तै गरी कुनै एउटा डाइसलाई गुडाउँदा आउने घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन् वा होइनन् छलफल गर्नुहोस् ।

(ज) अनुकूल परिणाम सङ्ख्या (Number of Favourable Outcomes)

कुनै परीक्षणमा हुन सक्ने वा घट्न सक्ने आवश्यक सम्भाव्य घटनाहरूको सदस्य सङ्ख्यालाई अनुकूल परिणाम सङ्ख्या भनिन्छ ।

(झ) प्रारम्भिक घटना (Elementary Event)

कुनै परीक्षणमा आउन सक्ने एकल परिणामको समूहलाई प्रारम्भिक घटना भनिन्छ : जस्तै 6 ओटा पाटा भएको एउटा डाइसलाई एक पटक गुडाउँदा आउन सक्ने प्रारम्भिक घटनाहरू = {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 2

एउटा सिक्कालाई उफारेर हेर्दा,

अग्र भाग (H) आउने सम्भाव्यता कति होला ?

पश्च भाग (T) आउने सम्भाव्यता कति होला ?

एउटा सिक्कालाई उफारेर हेर्दा आउन सकक्ने सम्भाव्य परिणामहरू के के होलान् ?

यहाँ एउटा सिक्कालाई उफारेर हेर्दा आउन सक्ने सम्भाव्य परिणामहरू

नमुना क्षेत्र (S) = {H, T}

तसर्थ सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या n(S) = 2

H आउने घटना (E) = {H}

तसर्थ अनुकूल परिणाम सङ्ख्या n(E) = 1

कुनै घटना (E) को सम्भाव्यता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{अनुकूल परिणाम सङ्ख्या}}{\text{सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या}}$

तसर्थ अग्र भाग (H) आउने सम्भाव्यता $= \frac{1}{2}$

उदाहरण 1

एउटा डाइसलाई एक पटक गुडाउँदा जोर सङ्ख्या देखिने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ डाइसलाई गुडाउँदा बन्ने नमुना क्षेत्र (S) = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या n(S) = 6

अनुकूल घटना (E) = जोर सङ्ख्या आउने = {2, 4, 6}

अनुकूल परिणाम सङ्ख्या n(E) = 3

जोर सङ्ख्या आउने सम्भाव्यता P(E) = ?

हामीलाई थाहा छ, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

उदाहरण 2

कुनै परीक्षामा सम्मिलित 80 जना विद्यार्थीको नतिजा यसप्रकार रहेको छ :

ग्रेड	A^+	A	B^+	B
विद्यार्थी सङ्ख्या	12	20	18	30

एक जना विद्यार्थी छनोट गर्दा निम्नबमोजिम ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थी पर्ने सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) A ग्रेड हासिल गर्ने

(ख) B ग्रेड हासिल गर्ने

समाधान

यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या $n(\mathrm{S}) = 80$

A ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थीको सङ्ख्या $n(\mathrm{A}) = 12$

B ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थीको सङ्ख्या $n(\mathrm{B}) = 30$

(क) A ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थी पर्ने सम्भाव्यता P(A) = ?

A ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थी पर्ने सम्भाव्यता $\mathrm{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{80} = \frac{3}{20}$

(ख) B ग्रेड हासिल गर्नेको सम्भाव्यता P(B) = ?

B ग्रेड हासिल गर्नेको सम्भाव्यता $\mathrm{P(B)} = \frac{n(B)}{n(S)}$

$$= \frac{30}{80} = \frac{3 \times 10}{8 \times 10} = \frac{3}{8}$$

उदाहरण 3

एकदेखि दशसम्म लेखिएका सङ्ख्या पत्तीबाट एउटा पत्ती थुत्दा वर्ग सङ्ख्या नपर्ने सम्भावना कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ एकदेखि दशसम्मका सङ्ख्याहरू लेखिएका सङ्ख्या पत्तीबाट एउटा पत्ती थुत्दा बन्ने नमुना क्षेत्र (S) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

सम्भाव्य परिणाम सङ्ख्या $n(\mathrm{S}) = 10$

अनुकूल घटना (E) = वर्ग सङ्ख्या आउने = {1, 4, 9}

अनुकूल परिणाम सङ्ख्या n(E) = 3

वर्ग सङ्ख्या आउने सम्भाव्यता P(E) = ?

हामीलाई थाहा छ,

$\mathrm{P(E)} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{10}$

वर्ग सङ्ख्या नपर्ने सम्भाव्यता $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}}) = 1 - \mathrm{P(E)}$

$$= 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$\therefore$ वर्ग सङ्ख्या नपर्ने सम्भाव्यता $= \frac{7}{10}$

बैकल्पिक तरिका

सम्भाव्य परिणाम $n(s) = 10$

वर्गबाहेकका सङ्ख्या $n(\overline{E}) = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\} = 7$

$\therefore n(\overline{E}) = 7$

वर्ग सङ्ख्या नपर्ने सम्भाव्यता

$$P(\overline{E}) = \frac{n(\overline{E})}{n(S)}$$

$$\therefore P(\overline{E}) = \frac{7}{10}$$

अभ्यास 19.1

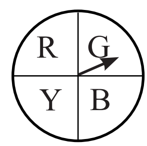
1. तलका परीक्षणबाट नमुना क्षेत्र लेख्नुहोस् :

(क) एउटा डाइस एक पटक गुडाउँदा

(ख) एउटा सिक्का दुई पटक उफार्दा

(ग) एक हप्ताबाट एउटा बार छनोट गर्दा पर्ने बार

(घ) दिइएको स्पिनरलाई घुमाउँदा सुई अडिन सक्ने रङ



2. तलका अवस्थाका घटनाहरू लेख्नुहोस् :

(क) एउटा डाइस एक पटक गुडाउँदा जोर सङ्ख्या आउने

(ख) एउटा सिक्का दुई पटक उफार्दा दुईओटै अग्र भाग (H) आउने

(ग) एक हप्ताका बारहरूलाई क्रमशः 1 देखि 7 मान्दा एउटा बार छनोट गर्दा बिजोर बार आउने

(घ) दुई सिक्कालाई एकै साथ उफार्दा एउटामा अग्र भाग (H) र अर्कोमा पश्च भाग (T) आउने

3. एउटा डाइस एक पटक गुडाउँदा रूढ सङ्ख्या आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस्

4. दुई सिक्कालाई एकै साथ उफार्दा एउटामा अग्र भाग (H) र अर्कोमा पश्च भाग (T) आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. तलको तालिकाका आधारमा एउटा परिवार छनोट गर्दा निम्नबमोजिम पर्ने सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

बालबालिकाको सङ्ख्या	0	1	2	3
जम्मा परिवार सङ्ख्या	9	15	36	30

(क) बालबालिकाको सङ्ख्या 0 भएका परिवार पर्ने सम्भाव्यता

(ख) बालबालिकाको सङ्ख्या 2 भएका परिवार पर्ने सम्भाव्यता

(ग) बालबालिकाको सङ्ख्या कम्तीमा 2 भएका परिवार पर्ने सम्भाव्यता

6. चारओटा समूहमा बस्नुहोस् । प्रत्येक समूहले एक एक प्याकेट तास लिनुहोस् । त्यसमा भएका राता, काला, पान (Heart), इँटा (Diamond), हुकुम (Spade), चिडी (Club), चित्र भएका तास (Face Cards), गुलाम (Jack), रानी (Queen), बादशाह (King), एक्का (Ace) सबैको सङ्ख्याहरू तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

(क)

♣	♦	♥	♠

(ख)

A	J	Q	K

(ग)

राता	काला	चित्र भएका तास

(घ) तालिकाका आधारमा एउटा तास निकाल्दा निम्नानुसारका तास आउने घटनाको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :

(i) हुकुम पर्ने (ii) A पर्ने (iii) रातो तास पर्ने

(iv) कालो बादशाह पर्ने (v) गुलाम र रानी पर्ने (vi) बादशाह नपर्ने

उत्तर

1. (क) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (ख) {HH, HT, TH, TT}

   (ग) {आइतबार, सोमबार, मङ्गलबार, बुधबार, बिहीबार, शुक्रबार, शनिबार}

   (घ) {R, Y, G, B}

2. (क) {2, 4, 6} (ख) {HH} (ग) {1, 3, 5, 7} (घ) {HT, TH}

3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. (क) $\frac{1}{10}$ (ख) $\frac{2}{5}$ (ग) $\frac{11}{15}$

6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

19.2 सम्भाव्यता स्केल (Probability scale)

क्रियाकलाप 1

एउटा सिक्कालाई उफार्दा आउन सक्ने नमुना क्षेत्र लेख्नुहोस् । त्यसैगरी सिक्कालाई उफार्दा माथि देखिन सक्ने सङ्ख्याका घटनाहरूलाई अलग अलग लेख्नुहोस् ।

नमुना क्षेत्र S = {H, T},

घटनाहरू {H}, {T}

प्रत्येक घटनाका सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

P(H) = ……, P(T) = …..,

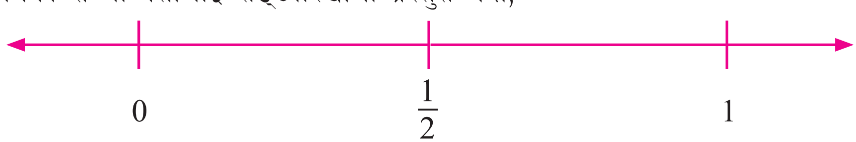
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

सम्भाव्यता अलग अलग निकालेपछि सबैको सम्भाव्यता जोड्नुहोस् ।

P(H) + P(T) = ………………

त्यसै गरी H र T नआउने सकम्भाव्यता कति होला ?

माथिको सम्भाव्यतालाई सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्दा,



माथिको सङ्ख्या रेखाबाट हामीले के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ भने,

सिक्काको माथिल्लो भागमा H देखिने वा T देखिने सम्भाव्यता $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$

सिक्काको माथिल्लो भागमा H वा T देखिने सम्भाव्यता $P(H \text{ or } T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$P(S) = 1$ जहाँ, $S = \{H, T\}$

यसरी, सम्भाव्यताको सबैभन्दा सानो मान 0 हो, जहाँ नतिजा पुरै असम्भव भयो भन्ने बुझिन्छ भने सबैभन्दा ठुलो मान 1 हो जहाँ नतिजा पुरै सुनिश्चित भयो भन्ने बुझिन्छ । अर्थात् कुनै घटना E को सम्भाव्यताको मान $0 \leq P(E) \leq 1$ हुन्छ । जसलाई सङ्ख्या रेखामा 0 देखि 1 सम्ममा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । यसलाई सम्भाव्यता स्केल (probability scale) भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

एउटै नाप र आकारका एउटा रातो, दुईओटा हरियो र तीनओटा सेतो टेबल टेनिस बलहरू एउटा बाकसमा राख्नुहोस् । एक जनाले नहेरीकन एउटा बल निकाल्नुहोस् । प्राप्त हुन सक्ने सम्भावित घटनाहरूलाई शैक्षणिक पाटीमा लेख्नुहोस् ।

रातो, हरियो र सेतो बललाई क्रमशः R, G र W ले जनाउँदा,

(क) तीनओटा फरक रङ्का बलहरू आउन सक्ने घटनाहरूका फरक फरक सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

P(R) = ……., P(G) = ……., P(W) = ………

(ख) सम्भाव्यता अलग अलग निकालेपछि सबैको सम्भाव्यता जोड्नुहोस् ।

P(R) + P(G) + P(W) = ……………………= ………..

उदाहरण 1

निलो, पहेँलो र रातो बराबर भाग भएको स्पिनर (spinner) घुमाउँदा निलोमा सुई अडिने सम्भाव्यता कति हुन्छ र निलोमा सुई नअडिने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ स्पिनरमा निलो, पहेँलो र रातो जम्मा 3 भाग छन् ।

$\therefore$ जम्मा सम्भाव्य परिणाम सङ्ख्या $n(S) = 3$

निलो भाग एउटा मात्र छ, तसर्थ अनुकूल परिणाम सङ्ख्या $n(E) = 1$

$\therefore$ निलो भागमा अडिने सम्भाव्य $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{3}$

निलो भागमा नअडिने सम्भाव्यता, $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

$$= 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3-1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

उदाहरण 2

राम्ररी फिटेको 52 ओटा तास भएको प्याकेटबाट एउटा तास थुत्दा बादशाह पर्ने सम्भाव्यता कति होला, निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या $n(S) = 52$

अनुकूल परिणाम सङ्ख्या वा बादशाहको सङ्ख्या $n(K) = 4$

बादशाह पर्ने सम्भाव्यता $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)}$

$\therefore P(K) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

उदाहरण 3

एउटा घनाकार डाइसलाई गुडाउँदा 5 नआउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ एउटा घनाकार डाइस गुडाउँदा आउन सक्ने परिणामहरू $(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore n(S) = 6$

एउटा घनाकार डाइसमा 5 एउटा मात्र हुन्छ ।

घटना $(E) = \{5\}$

$n(E) = 1$

$\therefore$ एउटा घनाकार डाइस गुडाउँदा 5 आउने

सम्भाव्यता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

तसर्थ, 5 नआउने सम्भाव्यता, $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$= 1 - \frac{1}{6}$

$= \frac{6-1}{6}$

$= \frac{5}{6}$

बैकल्पिक तरिका

एउटा घनाकार डाइसको

परिणामहरू $(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore n(S) = 6$

डाइसमा भएका सङ्ख्याहरूमध्ये 5 बाहेकका वा 5 नपर्ने घटना $(\bar{E}) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$\therefore n(\bar{E}) = 5$

$\therefore P(\bar{E}) = \frac{5}{6}$

$\therefore$ एउटा घनाकार डाइसलाई गुडाउँदा 5 नआउने सम्भाव्यता $= \frac{5}{6}$

उदाहरण 4

एउटा झोलामा सबै एउटै नापका 2 ओटा राता, 3 ओटा काला र 4 ओटा हरिया गुच्चाहरू छन् । अब, सो झोलाबाट नहेरिकन एउटा गुच्चा निकाल्दा,

(i) रातो गुच्चा आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

(ii) हरियो गुच्चा आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ।

(iii) कालो गुच्चा नआउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ जम्मा गुच्चाको सङ्ख्या $n(\text{S}) = 2 + 3 + 4 = 9$

(i) राता गुच्चाको सङ्ख्या $n(\text{R}) = 2$

$\therefore$ राता गुच्चा आउने सम्भाव्यता $\text{P(R)} = \dfrac{n(R)}{n(S)} = \dfrac{2}{9}$

(ii) हरिया गुच्चाको सङ्ख्या $n(\text{G}) = 4$

$\therefore$ राता गुच्चा आउने सम्भाव्यता $\text{P(R)} = \dfrac{n(G)}{n(S)} = \dfrac{4}{9}$

(iii) कालो गुच्चाको सङ्ख्या $\text{n(B)} = 3$

कालो गुच्चा आउने सम्भाव्यता $\text{P(B)} = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ कालो गुच्चा नपर्ने सम्भाव्यता $\text{P}(\overline{\text{B}}) = 1 - \text{p(B)} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

अभ्यास 19.2

1. एउटा सिक्कालाई एक पटक उफार्दा आउने सम्भाव्यताहरूलाई (0-1) स्केलमा देखाउनुहोस् ।

2. **एउटा झोलामा सबै एउटै नापका 2 ओटा निलो गुच्चा, 3 ओटा कालो र 5 ओटा रातो गुच्चाहरू छन् । यदि नहेरीकन सो झोलाबाट एउटा गुच्चा निकाल्ने हो भने,**

   (क) कालो गुच्चा पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

   (ख) कालो गुच्चा नपर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

   (ग) (क) र (ख) का नतिजालाई सम्भाव्यताहरूलाई सम्भाव्यता (0-1) स्केलमा देखाउनुहोस् ।

3. **राम्ररी फिटेका 52 पत्ती तासको समूहबाट एउटा पत्ती तान्दा,**

   (क) रातो तास आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

   (ख) रातो अथवा, कालो आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

   (ग) माथिका दुई सम्भाव्यताहरूलाई सम्भाव्यता (0-1) स्केलमा देखाउनुहोस् ।

4. **चित्रमा दिइएको स्पिनरलाई घुमाउँदा सुई तलका अवस्थामा अडिने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् र सम्भाव्यता (0-1) स्केलमा देखाउनुहोस् ।**

(क) सेतो रङमा अडिने

(ख) पहेँलो रङमा अडिने

(ग) पहेँलो वा रातो रङमा अडिने

(घ) पहेलो वा रातो वा हरियो रङमा अडिने

(ङ) पहेलो वा रातो वा हरियो वा निलो रङमा अडिने

(च) माथिका सबै सम्भाव्यताहरूलाई सम्भाव्यता स्केल (0 –1) मा देखाउनुहोस् ।

5. एउटा 6 ओटा पाटा भएको डाइसलाई उफार्दा आउने सम्भाव्यतालाई सम्भाव्यता स्केल (0 –1) मा देखाउनुहोस् ।

6. **सङ्ख्या 2 देखि 25 सम्म अङ्कित राम्ररी फिटिएका कागजका पत्तीहरूबाट नहेरीकन एउटा पत्ती थुत्दा,**

(क) 3 ले निःशेष भाग जाने पत्ती आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

(ख) जोर सङ्ख्या अङ्कित पत्ती आउने सम्भाव्यता कति छ ?

उत्तर

1\. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2\. (क) $\frac{3}{10}$ (ख) $\frac{7}{10}$ (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3\. (क) $\frac{1}{2}$ (ख) 1 (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4\. (क) 0 (ख) $\frac{1}{4}$ (ग) $\frac{1}{2}$ (घ) $\frac{3}{4}$ (ङ) 1

5\. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
6\. (क) $\frac{1}{3}$ (ख) $\frac{1}{2}$

19.3 प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता (Empirical probability)

क्रियाकलाप 1

(क) एउटा डाइसलाई 10 पटक, 15 पटक र 20 पटक गर्दै उफार्दा माथिल्लो भागमा 1 देखिने, 2 देखिने, 3 देखिने, 4 देखिने, 5 देखिने र 6 देखिने सङ्ख्या र जम्मा गुडाएको सङ्ख्याको अनुपातको प्रकृति अवलोकन गर्नुहोस् ।

हामीलाई थाहा छ, एउटा सिक्का उफार्दा अग्र भाग आउने सम्भाव्यता $\frac{1}{2}$ हुन्छ । अर्थात् $P(H) = \frac{1}{2}$ र $P(\overline{H}) = P(T) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ हुन्छ । यस सिद्धान्तका आधारमा गणना गर्ने हो भने कुनै एउटा सिक्कालाई 10 वा 20 पटक उफार्दा अग्र भाग आउने सम्भावना $10 \times \frac{1}{2} = 5$ अथवा, $20 \times \frac{1}{2} = 10$ हुनु पर्ने देखिन्छ । तर व्यावहारिक रूपमा परीक्षण गर्दा त्यसभन्दा भिन्नै प्रकारको परिणाम निस्कन सक्छ । यसरी व्यावहारिक रूपले प्रयोग वा परीक्षणबाट निकाल्ने सम्भाव्यतालाई प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता (Empirical Probability) भनिन्छ । अर्थात् प्रयोगमा आधारित भएर सम्भाव्यता निकाल्ने पद्धति वा प्रक्रियालाई नै प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता भनिन्छ । प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता निकाल्दा निम्नानुसारको सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

$$\text{प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता (Empirical Probability)} = \frac{\text{परीक्षणबाट प्राप्त परिणाम सङ्ख्या}}{\text{कुल परीक्षण सङ्ख्या}}$$

उदाहरण 1

एउटा सिक्कालाई 50 पटक उफार्दा आएका घटनाहरूको विवरण तलको तालिकामा दिइएको छ :

परिणाम (E)	अग्र भाग (H)	पृष्ठ भाग (T)
बारम्बारता (f)	23	27

अग्र भाग (H) आउने प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ अग्र भाग (H) आउने प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता, $P(H) = \frac{23}{50}$ हुन्छ भने पश्च भाग (T) आउने प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता $P(T) = \frac{27}{50}$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

एउटा मिनी ट्रकबाट 2000 ओटा इँटा खसाल्दा इँटा फुट्ने सम्भाव्यता 0.1 छ भने नफुटेका इँटाको सङ्ख्या कति हुन्छ होला ?

समाधान

यहाँ इँटाको सङ्ख्या $n(S) = 2000$

फुट्ने इँटाको सम्भाव्यता $P(E) = 0.1$

नफुट्ने इँटाको सम्भाव्यता $P(\overline{E}) = 1 - 0.1 = 0.9$

$\therefore$ नफुट्ने इँटाको सङ्ख्या $= n(S) \times P(\overline{E})$

$= 2,000 \times 0.9$

$= 1,800$ ओटा

अभ्यास 19.3

1. एउटा कक्षामा 50 जना विद्यार्थीमध्ये केटीको सङ्ख्या 28 जना छ भने एक जना विद्यार्थीलाई निबन्ध प्रतियोगितामा भाग लिन पठाउनका लागि छान्दा केटी विद्यार्थी पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
2. कक्षा 9 का 35 जना विद्यार्थीमध्ये 25 जना विद्यार्थीले अङ्ग्रेजी भाषा राम्ररी बोल्न र लेख्न सक्छन् । यदि एक जना विद्यार्थीलाई छान्नु पऱ्यो भने राम्ररी अङ्ग्रेजी बोल्न र लेख्न जान्ने विद्यार्थी पर्ने सम्भाव्यता कति छ ?
3. **तीनओटा सिक्का एक साथ आफैँ उफारेर परीक्षण गर्दा आउने नमुना क्षेत्रका आधारमा निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :**

   (क) सबैमा अग्र भाग (H) आउने सम्भाव्यता कति छ ?

   (ख) एउटामा अग्र भाग (H) र दुईओटामा पश्च भाग (T) आउने सम्भाव्यता कति छ ?

   (ग) दुईओटा अग्र भाग (H) र एउटामा पश्च भाग (T) आउने सम्भाव्यता कति छ

   (घ) सबैमा पश्च भाग (T) आउने सम्भाव्यता कति छ ?
4. **एउटा घनाकार डाइस उफार्दा प्रयोगाश्रित आउन सक्ने परिणामहरूको नमुना क्षेत्र बनाई तलका सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् :**

   (क) 5 अङ्कित अनुहार आउने

   (ख) जोर अङ्क अङ्कित अनुहार आउने

   (ग) बिजोर अङ्क अङ्कित अनुहार आउने

5. एउटा घनाकार डाइसलाई 60 पटक उफार्दा प्राप्त परिणामहरू तलका तालिकामा दिइएको छ :

परिणाम (Event)	1	2	3	4	5	6
बारम्बारता (f)	8	9	13	15	11	4

निम्नलिखित परिणाम आउने प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् :

(क) 4 आउने

(ख) 5 भन्दा ठुलो आउने

(ग) 3 भन्दा सानो आउने

6. एउटा अस्पतालमा जन्मिएका 100 जना शिशुहरूमध्ये 58 जना शिशुहरू छोरी रहेछन् भने छोरा जन्मिने प्रयोगाश्रित सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

दुई जनाको समूहमा काम गर्नुहोस् :

(क) एउटा भाडामा चित्रमा जस्तै 1-9 अङ्कित बलहरू राख्नुहोस् ।

(ख) पालैपालो एक एक गरी निकाल्दै पुनः राख्दै हल्लाउँदै गर्नुहोस् ।

(ग) माथिका क्रियाकलाप 100 पटक दोहोऱ्याउनुहोस् ।

(घ) प्रत्येक पटकमा आउने सङ्ख्यालाई तलको तालिकामा मिलान चिह्न बनाई भर्नुहोस् ।

सङ्ख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9
मिलान चिह्न									
बारम्बारता									

(ङ) 1 देखि 9 सम्मका अङ्कहरू अलग अलग आउने सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाई कक्षामा प्रस्तुत् गर्नुहोस् :

उत्तर

1. $\frac{14}{25}$ 2. $\frac{5}{7}$ 3 - 4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5. (क) $\frac{1}{4}$ (ख) $\frac{1}{15}$ (ग) $\frac{17}{60}$ 6. $\frac{21}{50}$

मिश्रित अभ्यास

1. दिइएका तथ्याङ्कलाई 10/10 को वर्गान्तर लिएर बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नुहोस् :

50, 20, 65, 52, 41, 42, 70, 27, 59, 50, 39, 43, 33, 63, 60, 47, 44, 64, 32, 51, 57, 18, 55, 38, 54, 22, 31, 68, 26, 24, 37, 40, 66, 28, 35, 14, 43, 36, 34, 12

अब उक्त तालिकाबाट,

(क) हिस्टोग्राम खिच्नुहोस् ।

(ख) बारम्बारता बहुभुज खिच्नुहोस् ।

(ग) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र र भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र एउटै ग्राफमा खिच्नुहोस् ।

2. दिइएका तथ्याङ्कबाट 5/5 को श्रेणी अन्तर हुने गरी बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नुहोस् :

45, 20, 23, 49, 47, 27, 29, 30, 32, 25, 34, 47, 45, 33, 33, 32, 37, 44, 42, 31, 42, 40, 35, 39, 26, 35, 27, 38, 34, 37

उक्त बारम्बारता तालिकाका तथ्याङ्कलाई

(क) हिस्टोग्राममा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) बारम्बारता बहुभुजमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता वक्र र भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र निर्माण गर्नुहोस् ।

3. तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् ।

(क) मध्यिका 15 हुने कुनै 5 ओटा तथ्याङ्क लेख्नुहोस् ।

(ख) मध्यक र मध्यिका दुवै 15 हुने कुनै 5 ओटा तथ्याङ्क लेख्नुहोस् ।

4. दिइएका तथ्याङ्कबाट अङ्कगणितीय मध्यक, मध्यिका, रित, पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

X	35	40	45	50	55	60	65
f	2	9	10	9	6	3	1

(ख)

उमेर (वर्ष)	5	15	25	35	45	55
मानिसको सङ्ख्या	8	10	12	18	12	4

(ग)

मूल्य (रु.)	50	60	75	85	90	92
पसलको सङ्ख्या	10	4	6	8	7	5

(घ)

प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थी सङ्ख्या	7	6	8	4	5	10

5. 6 ओटा सतह भएको सन्तुलित डाइसलाई 56 पटक उफार्दा निम्नानुसारका अङ्कहरू सतह पल्टिएको पाइयो :

1, 6, 5, 6, 4, 3, 4, 4, 3, 5, 1, 1, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 6, 5, 1, 4, 3, 1, 5, 4, 6, 4, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 6, 6, 2, 1, 3, 6, 4, 1, 5, 6, 6, 1, 3, 5, 5, 4, 6, 3

माथिको तथ्याङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा प्रस्तुत गरी,

(क) अङ्कगणितीय मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) पहिलो चतुर्थांश, दोस्रो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश निकाल्नुहोस् ।

(ग) रित र विस्तार पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1-3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क)

$\overline{X} = 47.63$	$M_d = 45$	$M_o = 45$	$Q_1 = 40$	$Q_3 = 53.75$

(ख)

$\overline{X} = 29.38$	$M_d = 35$	$M_o = 35$	$Q_1 = 15$	$Q_3 = 42.5$

(ग)

$\overline{X} = 74$	$M_d = 80$	$M_o = 50$	$Q_1 = 52.5$	$Q_3 = 90$

(घ)

$\overline{X} = 18$	$M_d = 15$	$M_o = 30$	$Q_1 = 10$	$Q_3 = 28.75$

5. (क) $\overline{X} = 3.55$ (ख) $Q_1 = 2, M_d = 4, Q_3 = 5$ (ग) $M_o = 1$ र 6

पाठ 20

त्रिकोणमिति
(Trigonometry)

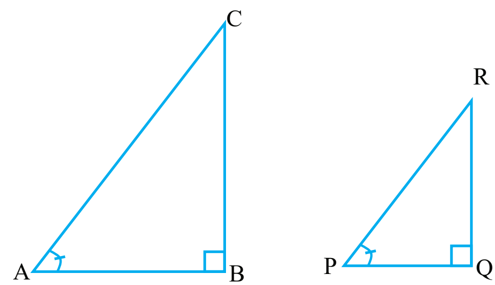
20.0 पुनरवलोकन (Review)

विद्यार्थी उपयुक्त समूहमा बसी ΔABC र ΔPQR को अवलोकन तथा भुजा र कोणको नाप लिएर निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

कुन कुन कोणको नाप बराबर रहेछ ?

के भुजाको लम्बाइ आपसमा बराबर छ ?

के ΔABC र ΔPQR समरूप छन् ?



त्रिभुज ABC का भुजाका अनुपातहरू $\frac{AB}{BC}, \frac{BC}{AC}$ र $\frac{AB}{AC}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

त्रिभुज PQR का भुजाका अनुपातहरू $\frac{PQ}{QR}, \frac{QR}{PR},$ र $\frac{PQ}{PR}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

ΔABC र ΔPQR का भुजाका कुन कुन अनुपातहरू बराबर छन्, लेख्नुहोस् ।

अब समकोणी त्रिभुजहरूका तीन भाग लम्ब, आधार र कर्णका आधारमा अनुपातहरू लेख्नुहोस् ।

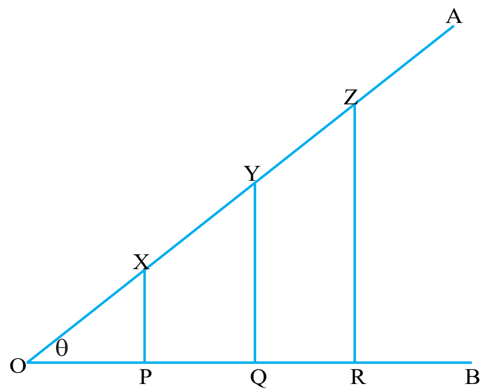
20.1 त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (Trigonometric ratios)

क्रियाकलाप 1

एउटा न्यूनकोण $\angle AOB$ खिच्नुहोस् र त्यसलाई θ ले जनाउनुहोस् ।

रेखा OB मा निश्चित दुरीमा बिन्दुहरू P, Q र R चिह्न लगाउनुहोस् ।

बिन्दुहरू P, Q, R मा सेट स्क्वायरको प्रयोग गरी लम्बहरू खिच्नुहोस् । जसले OA लाई काट्ने बिन्दुहरूको नाम क्रमशः X,Y र Z दिनुहोस् ।



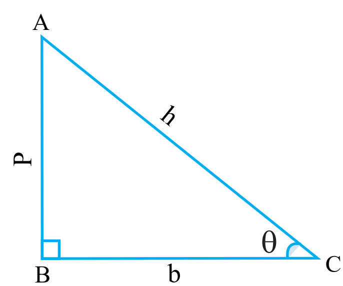
अब चित्रमा निम्नानुसारका भाग नापेर तलका अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\frac{XP}{OX}, \frac{YQ}{OY}$ र $\frac{ZR}{OZ}$ (ख) $\frac{OP}{OX}, \frac{OQ}{OY}$ र $\frac{OR}{OZ}$ (ग) $\frac{XP}{OP}, \frac{YQ}{OQ}$ र $\frac{ZR}{OR}$

माथिका अनुपातहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्ष पत्ता लगाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

माथिका अनुपातहरू त्रिकोणमितीय अनुपातहरू हुन् । त्रिकोणमितिले त्रिभुजका भुजा र कोणको सम्बन्धको अध्ययन गर्दछ । कुनैपनि सहजै नाप्न नसकिने वस्तुको उचाइ, लम्बाइ र कोण पत्ता लगाउने साधनका रूपमा त्रिकोणमितिको प्रयोग हुन्छ । त्रिकोणमितीय अनुपातको सहायताबिना गणित, भौतिक विज्ञान तथा इन्जिनियरिङ क्षेत्रको विकास र विस्तार असम्भव छ । त्यसैले त्रिकोणमितिलाई गणित तथा विज्ञानको महत्त्वपूर्ण र अभिन्न अङ्गका रूपमा लिइन्छ ।

दिइएको चित्रमा समकोण त्रिभुज ABC मा $\angle ACB = \theta$ लाई सन्दर्भकोण मान्दा AB = लम्ब (p), BC = आधार (b) र AC = कर्ण (h) हुन्छ ।



अब, समकोण ΔABC मा,

$\frac{AB}{AC} = \frac{p}{h} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{सम्मुखभुजा}}{\text{कर्ण}}$ लाई कोण θ को sine अनुपात भनिन्छ ।

यसलाई छोटकरीमा $\sin\theta$ लेखिन्छ ।

$\frac{BC}{AC} = \frac{b}{h} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{आसन्न}}{\text{कर्ण}}$ लाई कोण θ को cosine अनुपात भनिन्छ ।

यसलाई छोटकरीमा $\cos\theta$ लेखिन्छ ।

$\frac{AB}{BC} = \frac{p}{b} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{सम्मुख}}{\text{आसन्न}}$ लाई कोण θ को tangent अनुपात भनिन्छ ।

यसलाई छोटकरीमा $\tan\theta$ लेखिन्छ ।

तीनओटा अनुपातहरू $\sin\theta = \frac{p}{h}$, $\cos\theta = \frac{b}{h}$, $\tan\theta = \frac{p}{b}$ लाई आधारभूत त्रिकोणमितीय अनुपातहरू भनिन्छ ।

माथिका अनुपातहरूका विपरीत अनुपातहरू लेख्नुहोस् ।

$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{h}{p} = \theta$ को cosecant $= \text{cosec}\theta$

$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{h}{b} = \theta$ को secant $= \sec\theta$

$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{b}{p} = \theta$ को cotangent $= \cot\theta$

साधारणतया कोणलाई जनाउन ग्रिक अक्षरको प्रयोग गरिन्छ । तिनीहरूमध्ये केहीलाई निम्नानुसार दिइएको छ ।

अक्षर	अङ्ग्रेजी नाम	उच्चारण
α	Alpha	अल्फा
β	Beta	बिटा
γ	Gamma	गामा
δ	Delta	डेल्टा
θ	theta	थिटा
φ	phi	फाइ
π	pi	पाइ
ψ	shi	साइ
λ	lambda	ल्याम्डा

उदाहरण 1

दिइएको त्रिभुजका आधारमा 6 ओटा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू लेख्नुहोस् :

समाधान

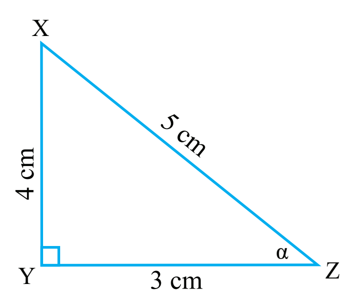
समकोणी ΔXYZ मा लम्ब $(p) = 4$ cm, आधार $(b) = 3$ cm, कर्ण $(h) = 5$ cm छ ।

सन्दर्भकोण $\angle xyz = \alpha$

$\sin\alpha = \frac{xy}{xz} = \frac{p}{h} = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\text{cosec}\,\alpha = \frac{xz}{xy} = \frac{h}{p} = \frac{5}{4}$

$\cos\alpha = \frac{yz}{xz} = \frac{b}{h} = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\sec\alpha = \frac{xz}{yz} = \frac{h}{b} = \frac{5}{3}$

$\tan\alpha = \frac{xy}{yz} = \frac{p}{b} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\cot\alpha = \frac{yz}{xy} = \frac{3}{4}$



उदाहरण 2

दिइएका समकोणी त्रिभुजहरू ΔCED र ΔABC बाट sin, cos र tan का त्रिकोणमितीय अनुपातहरू लेख्नुहोस् ।

समाधान

समकोण ΔCED मा

$$\sin\theta = \frac{DE}{DC} = \frac{p}{h} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{EC}{DC} = \frac{b}{h} = \frac{4}{5}$$

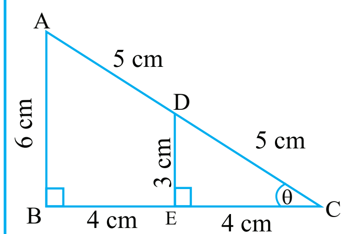
$$\tan\theta = \frac{DE}{EC} = \frac{p}{b} = \frac{3}{4}$$

समकोण ΔABC मा

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{p}{h} = \frac{6\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{h} = \frac{8\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{p}{b} = \frac{6\text{ cm}}{8\text{ cm}} = \frac{3}{4}$$



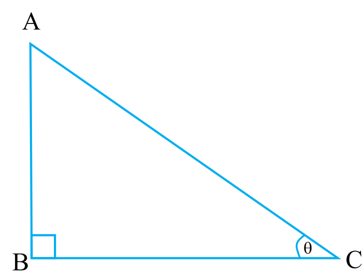
उदाहरण 3

दिइएको चित्रमा $\sin\theta = \frac{3}{5}$ छ । यदि कर्ण $(h) = 20$ unit भए

(क) आधार (p) को मान निकाल्नुहोस् ।

(ख) cosθ र tanθ को मान कति होला ?

(ग) cosecθ, secθ र cosθ को मान कति होला ?



समाधान

(क) यहाँ,

$$\sin\theta = \frac{p}{h} \text{ अथवा, } \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$

हामीलाई थाहा छ, $h = 20$ unit भए $\frac{p}{20} = \frac{3}{5}$

अथवा, $5p = 3 \times 20$

अथवा, $p = 12$ unit हुन्छ ।

(ख) $p = 12$ unit र $h = 20$ unit हुँदा,

पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$$h^2 = p^2 + b^2$$

अथवा, $20^2 = 12^2 + b^2$

अथवा, $b^2 = 400 - 144 = 256$, त्यसैले $b = 16$ unit हुन्छ ।

अब $\cos\theta = \frac{b}{h} = \frac{16 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$

र $\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{12 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = \frac{3}{4}$ हुन्छ ।

(ग) $\text{cosec}\theta = \frac{h}{p} = \frac{20 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{5}{3}$

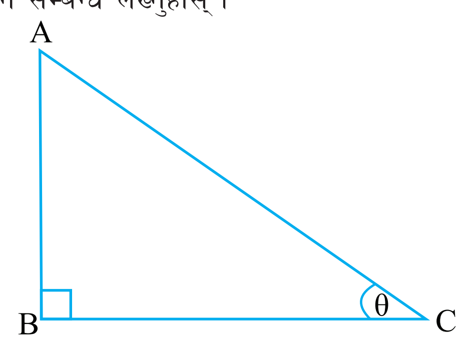
$\sec\theta = \frac{h}{b} = \frac{20 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = \frac{5}{4}$

र $\cot\theta = \frac{b}{p} = \frac{16 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{4}{3}$

क्रियाकलाप 2

एउटा समकोणी त्रिभुज ABC खिच्नुहोस् ।

कोण $\angle BCA = \theta$ लाई सन्दर्भ कोण मानेर पाइथागोरियन सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।



$AB^2 + BC^2 = AC^2$.............. (i)

दुवैतर्फ AC^2 ले भाग गर्नुहोस् ।

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

अथवा, $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$

अथवा, $\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 = 1$

अथवा, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

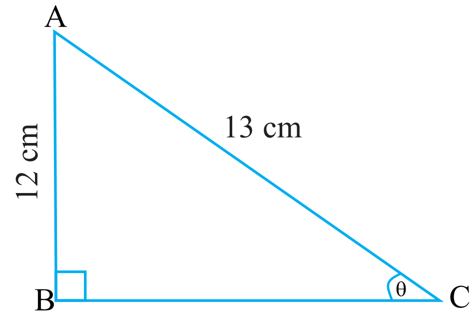
अथवा, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

यसै गरी समीकरण (i) लाई दुवैतर्फ क्रमश: AB^2 र BC^2 ले भाग गर्नुहोस् ।

प्राप्त नतिजाका बारेमा कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 4

समकोण त्रिभुज ABC मा, $\angle B = 90°$, $\angle C = \theta$, AB = 12 cm, AC = 13 cm भए, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



समाधान

यहाँ, लम्ब (AB) = p = 12 cm, कर्ण (AC) = h = 13 cm, आधार (BC) = b = ?

पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$h^2 = p^2 + b^2$

अथवा, $13^2 = 12^2 + b^2$

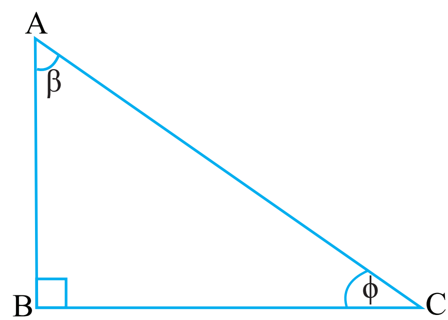
अथवा, $b^2 = 169 - 144 = 25$ त्यसैले, b = 5 हुन्छ ।

अब, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{p^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \frac{(12)^2}{(13)^2} + \frac{(5)^2}{(13)^2} = \frac{169}{169} = 1$

प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 20.1

1. **दिइएको समकोण त्रिभुज ABC मा $\angle ACB = \phi$ र $\angle BAC = \beta$ सन्दर्भ कोणको आधारमा निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :**



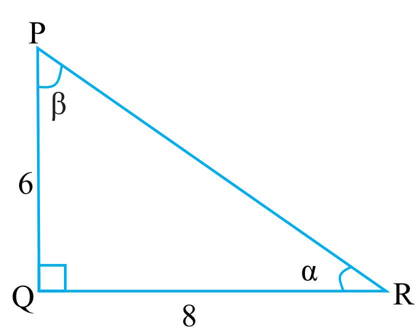
   (क) सन्दर्भ कोण ϕ लाई सन्दर्भ कोण मानेर लम्ब, आधार र कर्ण छुट्याउनुहोस् ।

   (ख) सन्दर्भ कोण ϕ लाई सन्दर्भ कोण मानेर 6 ओटा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू लेख्नुहोस् ।

   (ग) सन्दर्भ कोण β लाई सन्दर्भ कोण मानेर लम्ब, आधार र कर्ण छुट्याउनुहोस् ।

   (घ) कोण β लाई सन्दर्भ कोण मानेर 6 ओटा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू लेख्नुहोस् ।

2. **दिइएको समकोणी त्रिभुज PQR मा**



   (क) $\sin\beta$, $\cos\beta$, र $\tan\beta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) $\text{cosec}\beta$, $\sec\beta$ र $\cot\beta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ग) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\text{cosec}\alpha$, $\sec\alpha$ र $\cot\alpha$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. **(क) यदि $\sin\theta = \frac{6}{10}$ र $h = 20$ भए $b = ?$**

(ख) यदि $\tan\theta = \frac{5}{12}$ र भए

i) $h = ?$ ii) $\sin\theta$ र $\cos\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $\cos\theta = \frac{8}{17}$ भए $\sin\theta$ र $\cos\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. त्रिकोणमितीय अनुपातका आधारमा मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\sin^2A + \cos^2A$ (ख) $1 - \cos^2A$ (ग) $\sin\theta \div \cos\theta$

(घ) $\tan^2\theta + 1$ (ङ) $\cos\theta \div \sin\theta$ (च) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

5. त्रिकोणमितीय अनुपातका आधारमा प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ख) $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ (ग) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

(घ) $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ (ङ) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

6. एउटा 20 ft अग्लो भवनको सतहमा सामग्री लानका लागि 29 ft लामो छड्के सतह निर्माण गरिएको छ भने,

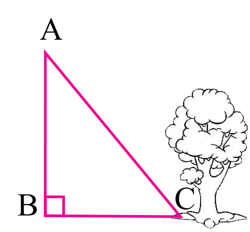
(क) उक्त भवन र छड्के सतहको तल्लो छेउबिचको दुरी कति होला ?

(ख) उक्त अवस्था छड्के सतहले जमिनसँग बनाएको कोणलाई सन्दर्भ कोण मानेर $\tan\theta$, $\sin\theta$ र $\cos\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. चित्रमा AC एउटा रुखको फेददेखि बिजुलीको खम्बा AB को टुप्पासम्मको लम्बाइ हो र BC खम्बा र रुखको फेदबिचको दुरी हो ।

(क) यदि BC = 24 m, AC=40 m भए खम्बाको उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $\angle ACB$ लाई सन्दर्भ कोण मानेर $\tan\theta$, $\sin\theta$ र $\cos\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



उत्तर

1 - 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (क) 16 (ख) (i) 13 (ii) $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}$ (ग) $\frac{15}{17}, \frac{8}{17}$

4. (क) 1 (ख) $\sin^2 A$ (ग) $\tan\theta$ (घ) $\sec^2\theta$ (ङ) $\cot\theta$ (च) 1

5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 6. (क) 21 ft (ख) $\frac{20}{21}, \frac{20}{29}, \frac{21}{29}$

7. (क) 32 m (ख) $\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$

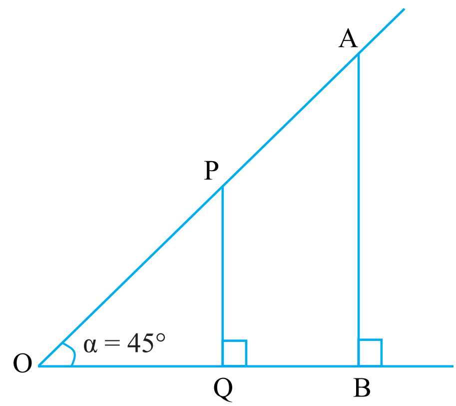
20.2 विशिष्ट कोणको त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratio of special angles)

(क) 45° कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातको मान

$\angle AOB = \alpha = 45°$ को कोण खिच्नुहोस् । $AB \perp OB$ र $PQ \perp OB$ खिच्नुहोस् । चित्रमा निम्नलिखित भाग नाप्नुहोस् ।

OP = ..., OQ = ..., PQ = ...

OA= ......, OB = ..., AB = ...



यहाँ, ΔOQP र ΔOBA दुई समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजहरू हुन् ।

अब ΔOQP र ΔOBA मा sin45°, cos45° र tan45° को मानहरू अलग अलग पत्ता लगाउनुहोस् ।

दुवै त्रिभुजमा सम्बन्धित अनुपातहरूको मान तुलना गरी हेर्दा,

Sin 45° = ...

Cos 45° = ...

र tan 45° = ... हुन्छ ।

अथवा

यहाँ $\angle POQ = \angle AOB = 45°$ हुन्छ ।

त्यसैले भुजा $OQ = PQ = x$ मानौं ।

अब पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$$OP^2 = PQ^2 + OQ^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$OP = \sqrt{2x^2}$$

समकोणी ΔOQP मा,

$$\text{Sin } \alpha = \sin 45° = \frac{p}{h} = \frac{PQ}{OP} = \frac{x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

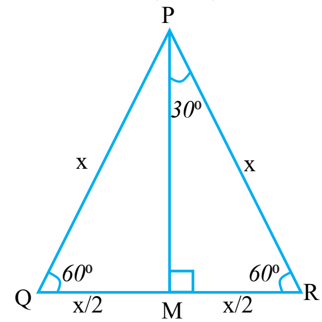
$$\text{Cos } \alpha = \text{Cos} 45° = \frac{b}{h} = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\tan \alpha = \tan 45° = \frac{p}{b} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{x}{x} = 1 = 1.000$$

माथिका मानहरूका अनुसार cosec 45°, sec 45° र cot 45° को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 30° र 60° कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातको मान

30° र 60° कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातको मान पत्ता लगाउनका लागि समबाहु त्रिभुज ΔPQR लिऔँ, जहाँ, $\angle P = \angle Q = \angle R = 60°$ हुन्छ ।



त्यसैले भुजा $PQ = QR = PR = x$ मानौँ ।

त्रिकोणमितीय अनुपातका लागि समकोण त्रिभुजको आवश्यकता पर्दछ ।

त्यसैले P बाट आधारमा PM खिचौँ जसले आधार भुजा QR लाई समान दुई भागमा विभाजन गर्दछ ।

यहाँ, $QM = \frac{x}{2} = MR$ हुन्छ ।

अब समकोण ΔPMR मा $\angle R = 60°$; $\angle M = 90°$ भए $\angle MPR = 30°$ हुन्छ ।

ΔPMR मा पाइथागोरस साध्यबाट,

$$(PM)^2 = (PR)^2 - (MR)^2$$

$$(PM)^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$(PM)^2 = \frac{3x^2}{4}$$

$$PM = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

अब $\angle MPR = 30°$ को हुँदा $P = MR = \frac{x}{2}$, $h = PR = x$, $b = PM = \frac{\sqrt{3}x}{2}$ हुन्छ ।

$$\sin 30° = \frac{p}{h} = \frac{MR}{PR} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\cos 30° = \frac{b}{h} = \frac{PM}{PR} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

$$\tan 30° = \frac{p}{b} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{x}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$$

माथिका मानअनुसार cosec30°, sec30° र cot30° को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

फेरि समकोण ΔPMR मा $\angle R = 60°$ लाई सन्दर्भ कोण मान्दा,

$$\sin 60° = \frac{p}{h} = \frac{PM}{PR} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}x}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{b}{h} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\tan 60° = \frac{p}{b} = \frac{\sqrt{3}x}{2} \times \frac{1}{x} = \sqrt{3} = 1.732$$

माथिका मानअनुसार cosec 60°, sec 60° र cot 60° को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

नोट : यसरी हेर्दा, $\sin 30° = \frac{1}{2} = \cos 60° = \cos(90° - 30°)$

$\therefore \sin\theta = \cos(90° - \theta)$

त्यस्तै, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60° = \sin(90° - 60°)$

$\cos\theta = \sin(90° - \theta)$

(ग) 0° र 90° कोणका त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान

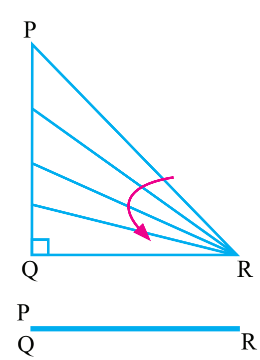
समकोण त्रिभुज PQR मा RP लाई घुमाउँदै लाने हो भने PQ को लम्बाइ घट्दै जान्छ र बिन्दु P बिन्दु Q मा खप्टिन पुग्छ साथै, PR र QR आपसमा खप्टिन्छन् ।

यस्तो बेला कोण $\angle PRQ$ घट्दै गएर 0° मा पुग्छ र PQ = 0, PR = QR हुन्छ ।

$$\sin 0° = \frac{PQ}{PR} = \frac{0}{x} = 0$$

$$\cos 0° = \frac{QR}{PR} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{PQ}{QR} = \frac{0}{x} = 0$$



त्यसैगरी,

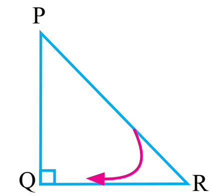
ΔPQR मा $\angle PRQ$ लाई बढाउँदै लैजाँदा $\angle PRQ = 90°$ मा पुग्दा

PQ र PR को लम्बाइ बराबर हुन्छ, अर्थात् $PQ = x$ भए $PR = x$ हुन्छ । $QR = 0$ हुन्छ ।

$$\sin 90° = \frac{PQ}{PR} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{QR}{PR} = \frac{0}{x} = 0$$

$$\tan 90° = \frac{PQ}{PR} = \frac{x}{0} \text{ (}\infty\text{, अपरिभाषित)}$$

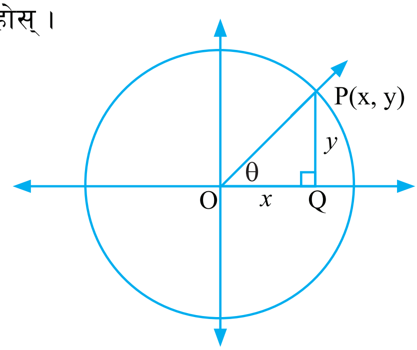


क्रियाकलाप 3

एकाइ वृत्तको प्रयोग गरी विशिष्ट कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान

केन्द्रबिन्दु O अर्धव्यास 1 inch भएको एउटा वृत्त खिच्नुहोस् ।
उक्त वृत्तको परिधिमा एउटा बिन्दु $P(x, y)$ लिनुहोस् ।
रेखा OP लाई घडीको विपरीत दिशामा घुमाउनुहोस् ।
बिन्दु P बाट X– अक्षमा लम्ब PQ खिच्नुहोस् ।
अब समकोणी त्रिभुज OPQ मा $\angle POQ$ लाई सन्दर्भ कोण मानेर $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ को अनुपातहरू लेख्नुहोस् ।

$$\sin\theta = \frac{y}{OP},\ \cos\theta = \frac{x}{OP},\ \text{र } \tan\theta = \frac{y}{x}$$



रेखा OP लाई घडीको विपरीत दिशामा घुमाउँदा X– अक्षसँग बन्ने 30°, 45°, 60°, 90° का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

sin0°, sin30°, sin45°, sin60°, र sin90°, का मानहरूलाई तल तालिकामा दिइएको छ ।

कोण / अनुपात	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞, अपरिभाषित

नोट : माथिका विशिष्ट कोणको त्रिकोणमितीय मानलाई सम्झने तरिका

0 देखि 4 सम्मका अङ्कहरू क्रमशः लेख्नुहोस् । ती सबैलाई 4 ले भाग गर्नुहोस् । अब ती सबैको क्रमशः वर्गमूल निकाल्नुहोस् । त्यसरी आएका मानहरू क्रमशः sin0°, sin30°, sin45°, sin60° र sin90° का मानहरू हुन्छन् ।

उदाहरण 1

तल दिइएका त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) sin45° + cos45°

(ख) $\dfrac{\cos 30°}{\sin 30°}$

समाधान

(क) यहाँ $\sin 45° + \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

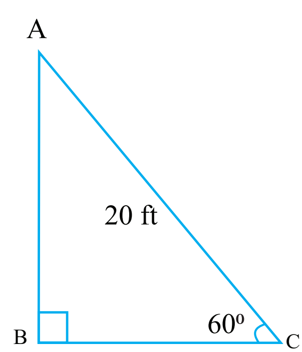
(ख) $\dfrac{\cos 30°}{\sin 30°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

उदाहरण 2

सँगैको समकोणी त्रिभुजमा सन्दर्भ कोणको मान 60° छ र कर्णको लम्बाइ 20 ft भएमा लम्ब र आधारको नाप पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ दिइएको समकोणी त्रिभुजमा कोण $C = \theta$ लाई सन्दर्भ कोण मान्दा,
$\theta = 60°$ र कर्ण AC (h) = 20 ft , आधार (b) = ? र लम्बाइ (p) = ?



हामीलाई थाहा छ, $\sin\theta = \dfrac{p}{h}$

अथवा, $\sin 60° = \dfrac{p}{20}$

अथवा, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{p}{20}$

अथवा, $p = 10\sqrt{3}$ ft

फेरि $h^2 = p^2 + b^2$

$b^2 = h^2 - p^2$

$= 20^2 - (10\sqrt{3})^2$

$= 400 - 300$

$= 100$

$b = \sqrt{100} = \sqrt{10 \times 10} = 10$ ft

अर्को तरिका,

यहाँ $\cos 60° = \frac{b}{20}$

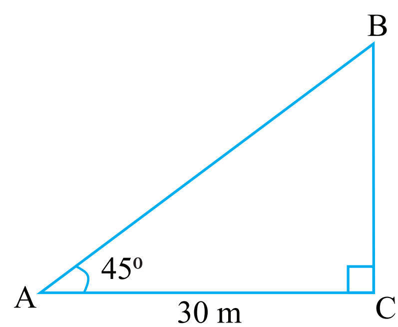
अथवा, $\frac{1}{2} = \frac{b}{20}$

त्यसकारण b = 10 ft

उदाहरण 3

एउटा सिधा रुख भाँचिएर जमिनमा 30 मिटर पर 45° को कोण बनाएछ भने भाँचिनुभन्दा पहिले उक्त रुखको उचाइ कति थियो होला ?

समाधान



यहाँ सन्दर्भ कोण (θ) = 45°

आधार (b) = 30 m

रुखको भाँचिनु पहिलेको उचाइ (H) = ?

हामीलाई थाहा छ, $\cos\theta = \frac{b}{h}$ र, $\tan\theta = \frac{p}{b}$

अथवा, $\cos 45° = \frac{30}{h}$ र, $\tan 45° = \frac{p}{30}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{30}{h}$ र, $1 = \frac{p}{30}$

अथवा, $h = 30\sqrt{2}$ र, $p = 30$

तसर्थ रुख भाँचिनु पहिलेको उचाइ (H) $= h + p = 30\sqrt{2} + 30 = 30(\sqrt{2} + 1)$

$= 30 \times (1.4142 + 1)$

$= 30 \times 2.4142$

$= 72.426$ m

अभ्यास 20.2

1. तल दिइएका त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान लेख्नुहोस् :

(क) $\sin 90°$ (ख) $\cos 60°$ (ग) $\tan 30°$

(घ) $\cot 45°$ (ङ) $\text{cosec } 45°$

2. तल दिइएका समकोण त्रिभुजका भुजाको लम्बाइका आधारमा सन्दर्भ कोणको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $p = 4$ cm र $b = 4\sqrt{3}$ cm (ख) $p = 7\sqrt{3}$ ft र $h = 14$ ft

(ग) $b = 5$ cm र $h^2 = 50$ cm^2 (घ) $p = x$ inch र $b = x$ inch

3. तल दिइएका समकोणी त्रिभुजका भागका आधारमा बाँकी भुजाको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) कर्णको लम्बाइ 10 cm र सन्र्दभकोण 60°

(ख) लम्बको लम्बाइ 15 ft र सन्र्दभकोण 45°

(ग) आधारको लम्बाइ 36 in र सन्र्दभकोण 30°

4. तलका त्रिकोणमितीय अभिव्यञ्जकहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\sin30° + \cos60°$ (ख) $\tan30° + \sin60°$

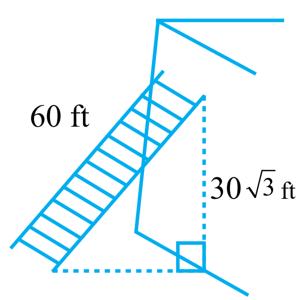
(ग) $\sin30° + \cos30° \times \tan30°$ (घ) $\dfrac{\sin60° + \cos30°}{\tan60°}$

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\cos^2 45° + \sin^2 45° = 1$ (ख) $\dfrac{2\tan30°}{1 - \tan^2 30°} = \tan60°$

(ख) $\dfrac{\tan60° - \tan30°}{1 + \tan60° \tan30°} = \tan30°$ (घ) $\tan 45° - \sin90° = 1 - 2\sin^2 45°$

6. (क) दिइएका चित्रमा भऱ्याङले भुइँ र भित्तासँग कति कति डिग्रीको कोण बनाउँछ होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

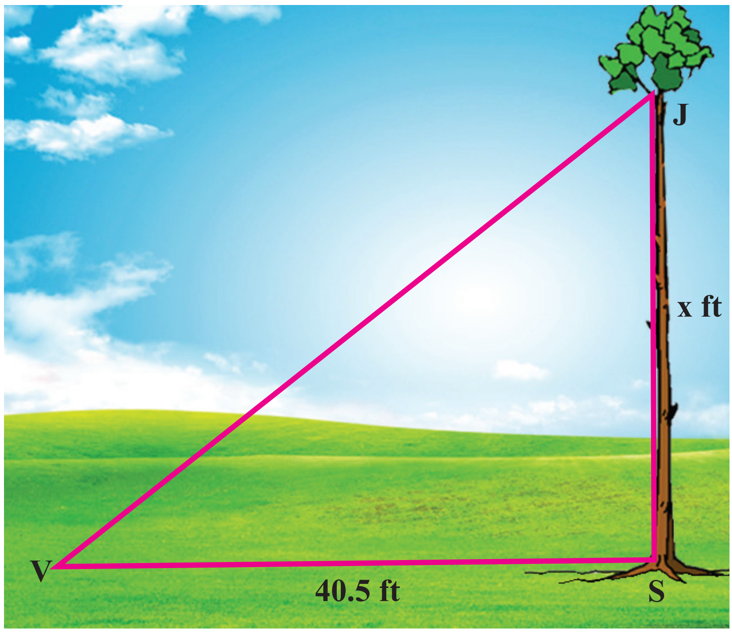


(ख) 36 m अग्लो घण्टाघरको फेदबाट $12\sqrt{3}$ मिटर परबाट घण्टाघरको टुप्पामा हेर्दा जमिनदेखि घण्टाघरको टुप्पामा बन्ने कोणको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) दिइएको चित्रमा

(i) x को मान कति भएमा दुवै न्युनकोण 45° का होलान् ?

(ii) VJ को नाप कति होला ?



(घ) एउटा 12 ft अग्लो पर्खालको माथिल्लो भागमा छुने गरी तथा उक्त भऱ्याङले जमिनमा 60° को कोण बनाउने गरी एउटा भऱ्याङ राखिएको छ भने भऱ्याङको लम्बाइ कति होला ?

परियोजना कार्य

एउटा लामो धागो लिनुहोस् । उक्त धागोलाई एउटा खम्बाको नजिक जमिनमा निश्चित गरी अड्काउनुहोस् । त्यसपछि उक्त धागाले जमिनसँग क्रमशः 30°, 45°, 60° र 90° कोण बनाउँदा जमिनमा धागो बाधेको बिन्दुदेखि खम्बासम्मको दुरी, खम्बामा धागाले छुने स्थानसम्मको खम्बाको उचाइ र धागाको लम्बाइका आधारमा sin, cos र tan का अनुपातका मानहरू परीक्षण गर्नुहोस् ।

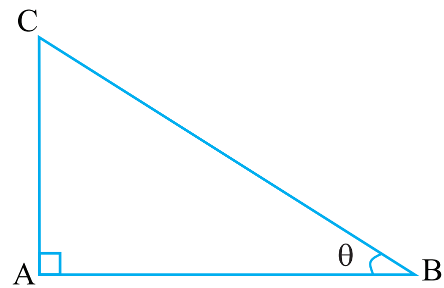
उत्तर

1. (क) 1 (ख) $\frac{1}{2}$ (ग) $1/\sqrt{3}$ (घ) 1 (ङ) $\sqrt{2}$
2. (क) 30° (ख) 60° (ग) 45° (घ) 45°
3. (क) $p = 5\sqrt{3}$ cm, b = 5 cm (ख) b = 15 ft, $h = 15\sqrt{2}$ ft

   (ग) $p = 12\sqrt{3}$ inch, $h = 24\sqrt{3}$ inch
4. (क) 1 (ख) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ (ग) 1 (घ) 1
5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
6. (क) 60° र 30° (ख) 30° (ग) i) 40.5 ft ii) 57.28 ft (घ) $24\sqrt{3}$ ft

मिश्रित अभ्यास

1. दिइएको समकोणी त्रिभुजका आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :



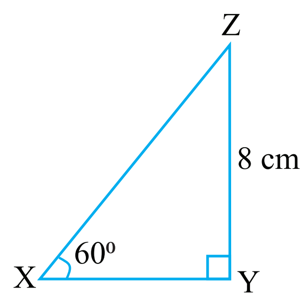
(क) $\angle B$ लाई सन्दर्भ कोण मानेर लम्ब, आधार र कर्ण छुट्याउनुहोस् ।

(ख) त्रिभुज ABC बाट (क) का आधारमा 6 ओटा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू लेख्नुहोस् ।

(ग) यदि $h = 20$ र $b = 12$ भएमा tanB को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) त्रिभुजमा (ग) का आधारमा $\sin^2 B$, $\cos^2 B$ र $\tan^2 B$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. सँगैको समकोणी त्रिभुजका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर खोज्नुहोस् :



(क) XY र ZX को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $\sin^2 X + \text{Cos}^2 X = 1$ पुष्टि गर्नुहोस् ।

(ग) sinZ, cosZ र tanZ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) $\cos^2 X + \cos^2 Z$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (क) समतलीय भुइँमा भएको एउटा बाँसको तामाका टुप्पोमा त्यसका फेदभन्दा 30 ft टाढाबाट हेर्दा 30° को कोण बनाउँछ भने उक्त तामा कति अग्लो रहेछ ?

(ख) उक्त तामाको टुप्पामा हेर्दा 45° को कोण बनाउनका लागि पहिलेको बिन्दुभन्दा कति अगाडिबाट हेर्नुपर्ला ?

(ग) यदि चार दिनपछाडि उक्त तामाको उचाइ $30\sqrt{3}$ ft भयो भने पहिलेको बिन्दुबाट उक्त तामाको टुप्पामा हेर्दा कति डिग्रीको कोण बन्छ होला ?

उत्तर

1-2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (क) $10\sqrt{3}$ ft (ख) 12.68 ft (ग) 60°