

गणित

कक्षा १०

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

© सर्वाधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

यस पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी सम्पूर्ण अधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र सानोठिमी, भक्तपुरमा निहित रहेको छ । पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट रेकर्ड गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

प्रथम संस्करण : वि.स. २०८०

पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी पाठकहरूका कुनै पनि प्रकारका सुझावहरू भएमा पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, समन्वय तथा प्रकाशन शाखामा पठाइदिनुहुन अनुरोध छ । पाठकहरूबाट आउने सुझावहरूलाई केन्द्र हार्दिक स्वागत गर्दछ ।

हाम्रो भनाइ

पाठ्यक्रम शिक्षण सिकाइको मूल आधार हो । पाठ्यपुस्तक विद्यार्थीमा अपेक्षित दक्षता विकास गर्ने एक मुख्य साधन हो । यस पक्षलाई दृष्टिगत गर्दै पाठ्यक्रम विकास केन्द्रले विद्यालय शिक्षालाई व्यावहारिक, समयसापेक्ष र गुणस्तरीय बनाउने उद्देश्यले पाठ्यक्रम तथा पाठ्यपुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यलाई निरन्तरता दिँदै आएको छ । आधारभूत शिक्षाले बालबालिकामा आधारभूत साक्षरता, गणितीय अवधारणा र सिप एवम् जीवनोपयोगी सिपको विकासका साथै व्यक्तिगत स्वास्थ्य तथा सरसफाइसम्बन्धी बानीको विकास गर्ने अवसर प्रदान गर्नुपर्छ । आधारभूत शिक्षाका माध्यमबाट बालबालिकाहरूले प्राकृतिक तथा सामाजिक वातावरणप्रति सचेत भई अनुशासन, सदाचार र स्वावलम्बन जस्ता सामाजिक एवम् चारित्रिक गुणको विकास गर्नुपर्छ । यसले विज्ञान, वातावरण र सूचना प्रविधिसम्बन्धी आधारभूत ज्ञानको विकास गराई कला तथा सौन्दर्यप्रति अभिरुचि जगाउनुपर्छ । शारीरिक तन्दुरुस्ती, स्वास्थ्यकर बानी एवम् सिर्जनात्मकताको विकास तथा जातजाति, धर्म, भाषा, संस्कृति, क्षेत्रप्रति सम्मान र समभावको विकास पनि आधारभूत शिक्षाका अपेक्षित पक्ष हुन् । देशप्रेम, राष्ट्रिय एकता, लोकतान्त्रिक मूल्यमान्यता तथा संस्कार सिकी व्यावहारिक जीवनमा प्रयोग गर्नु, सामाजिक गुणको विकास तथा नागरिक कर्तव्यप्रति सजगता अपनाउनु, र दैनिक जीवनमा आइपर्ने व्यावहारिक समस्याको पहिचान गरी समाधानका उपायको खोजी गर्नु पनि माध्यमिक तहको शिक्षाका आवश्यक पक्ष हुन् । यस पक्षलाई दृष्टिगत गरी विद्यालय शिक्षाको राष्ट्रिय पाठ्यक्रम प्रारूप, २०७६ को मर्मअनुरूप कक्षा १० को गणित विषयको पाठ्यक्रमअनुरूप यो पुस्तक विकास गरिएको हो ।

यस पाठ्यपुस्तकको लेखन श्री नरहरि आचार्य, श्री शक्ति प्रसाद आचार्य, श्री सुशिल खनाल, श्री रामचन्द्र ढकाल र श्री जगन्नाथ अधिकारीबाट भएको हो । पाठ्यपुस्तकलाई यस रूपमा ल्याउने कार्यमा यस केन्द्रका महानिर्देशक श्री वैकुण्ठप्रसाद अर्याल, प्रा.डा. हरिप्रसाद उपाध्याय, श्री प्रमिला बखती, श्री ज्ञानेन्द्र वन, श्री नवीन पौडेल, श्री अनुपमा शर्मा, श्री सत्यनारायण महर्जन, श्री रितु श्रेष्ठ र श्री राजुकान्त आचार्यको योगदान रहेको छ । यस पाठ्यपुस्तकमा भएका त्रुटी सुधार, खुला प्रश्न समावेश गरी विषयवस्तु सम्पादन सहित यस परिमार्जित संस्करणमा ल्याउन डा. श्याम प्रसाद आचार्य र शिक्षकहरूको महत्त्वपूर्ण योगदान रहेको छ । यसको भाषा सम्पादन श्री चिनाकुमारी निरौलाबाट र लेआउट डिजाइन श्री नवराज पुरीबाट भएको हो । यसको विकासमा संलग्न सम्पूर्णप्रति केन्द्र हार्दिक कृतज्ञता प्रकट गर्दछ ।

यस पाठ्यपुस्तकले विद्यार्थीमा निर्धारित सक्षमता विकासका लागि विद्यार्थीलाई सहयोग गर्ने छ । यसले विद्यार्थीको सिकाइमा सहयोग पुऱ्याउने एउटा महत्त्वपूर्ण र आधारभूत सामग्रीका रूपमा कक्षा क्रियाकलापबाट हुने सिकाइलाई मजबुत बनाउन सहयोग गर्ने छ । त्यसैले यो शिक्षकको सिकाइ क्रियाकलापको योजना नभई विद्यार्थीका सिकाइलाई सहयोग पुऱ्याउने सामग्री हो । पाठ्यपुस्तकलाई विद्यार्थीको सिकाइमा सहयोग पुऱ्याउने एउटा महत्त्वपूर्ण आधारका रूपमा बालकेन्द्रित, सिकाइकेन्द्रित, अनुभवकेन्द्रित, उद्देश्यमूलक, प्रयोगमुखी र क्रियाकलापमा आधारित बनाउने प्रयास गरिएको छ । सिकाइ र विद्यार्थीको जीवन्त अनुभवविच तादात्म्य कायम गर्दै यसको सहज प्रयोग गर्न शिक्षकको सहजकर्ता, उत्प्रेरक, प्रवर्धक र खोजकर्ताका रूपमा भूमिकाको अपेक्षा गरिएको छ । यस पुस्तकलाई अभि परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत विशेष भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुभावाका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

वि. स. २०८०

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

विषयसूची

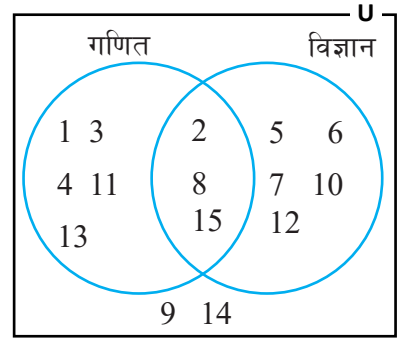
| पाठ | शीर्षक | पृष्ठसङ्ख्या |
|-----|---|--------------|
| १ | समूह (Sets) | १ - २५ |
| २ | चक्रीय ब्याज (Compound Interest) | २६ - ४६ |
| ३ | वृद्धि र ह्रास (Growth and Depreciation) | ४७ - ६५ |
| ४ | मुद्रा र विनिमय दर (Currency and Exchange Rate) | ६६ - ७९ |
| ५ | क्षेत्रफल र आयतन (Area and Volume) | ८० - १२९ |
| ६ | अनुक्रम र श्रेणी (Sequence and Series) | १३० - १५१ |
| ७ | वर्ग समीकरण (Quadratic Equation) | १५२ - १७२ |
| ८ | बीजीय भिन्न (Algebraic Fraction) | १७३ - १८० |
| ९ | घाताङ्क (Indices) | १८१ - १९३ |
| १० | त्रिभुज र चतुर्भुजहरू (Triangle and Quadrilaterals) | १९४ - २०९ |
| ११ | रचना (Construction) | २१० - २२० |
| १२ | वृत्त (Circle) | २२१ - २३८ |
| १३ | तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics) | २३९ - २७० |
| १४ | सम्भाव्यता (Probability) | २७१ - २९३ |
| १५ | त्रिकोणमिति (Trigonometry) | २९४ - ३०५ |

1.0 पुनरवलोकन (Review)

कक्षा 10 का रोल नम्बर 1 देखि 15 सम्मका विद्यार्थीलाई गणित मन पर्छ कि विज्ञान मन पर्छ भनी एउटा सर्वेक्षण गरिएको थियो । सर्वेक्षणबाट प्राप्त भएको जानकारीलाई रोल नम्बरअनुसार भेनचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

भेनचित्र हेरेर त्यसका आधारमा तलका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

- (क) गणित मन पराउने विद्यार्थीको समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । उक्त समूहको सदस्य सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।
- (ख) **गणित मात्र** मन पर्छ भन्ने विद्यार्थीको समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । उक्त समूहको सदस्य सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।
- (ग) विज्ञान मन पर्छ भन्ने विद्यार्थीको समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । उक्त समूहको सदस्य सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।
- (घ) **विज्ञान मात्र** मन पर्छ भन्ने विद्यार्थीको समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । उक्त समूहको सदस्य सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।
- (ङ) **गणित र विज्ञान दुवै** मन पर्छ भन्ने विद्यार्थीको समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । उक्त समूहको सदस्य सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।
- (च) गणित वा विज्ञानमध्ये कुनै पनि मन पर्दैन भन्ने विद्यार्थी समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । उक्त समूहको सदस्य सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।
- (छ) सर्वेक्षणमा जम्मा कति जना विद्यार्थी सहभागी रहेछन् ?



1.1 दुई समूहको गणनात्मकता (Cardinality of the two Sets)

क्रियाकलाप 1

कक्षा 10 का विद्यार्थीलाई कफी र चियामध्ये कुन मन पर्छ भनी सोधिएको प्रश्नमा निम्नानुसारको जानकारी प्राप्त भयो :

- (क) कफी मन पर्छ भन्ने विद्यार्थी 15 जना
- (ख) चिया मन पर्छ भन्ने विद्यार्थी 10 जना
- (ग) चिया र कफी **दुवै मन पर्छ** भन्ने विद्यार्थी 6 जना
- (घ) चिया वा कफी **दुवै मन पर्दैन** भन्ने विद्यार्थी 5 जना

माथिको जानकारीका आधारमा निम्नलिखित प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

- (क) दिइएको जानकारीलाई भेनचित्रमा कसरी प्रस्तुत गर्ने होला ?
- (ख) कफी मात्र मन पराउने विद्यार्थी कति जना रहेछन् ?
- (ग) चिया मात्र मन पराउने विद्यार्थी कति जना रहेछन् ?
- (घ) त्यस कक्षामा जम्मा कति जना विद्यार्थी रहेछन् ?

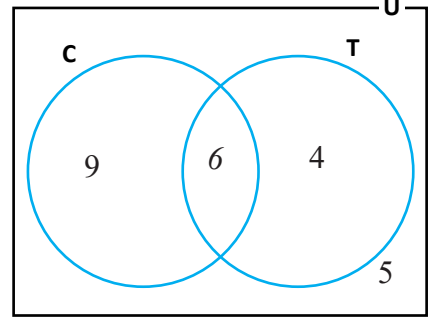
यहाँ $n(C)$ कफी मन पराउने, $n(T)$ चिया मन पराउनेहरूको सङ्ख्यालाई जनाउँछ। त्यसै गरी $n_0(T)$ र $n_0(C)$ ले क्रमशः चिया मात्र र कफी मात्र मन पराउने सङ्ख्यालाई जनाउँछ।

अब यसलाई भेनचित्रमा देखाउँदा,

चिया र कफी दुवै मन पराउनेको सङ्ख्या $n(C \cap T)$ लाई जनाउने हुँदा, सर्वप्रथम त्यसलाई भेनचित्रमा भरौं।

त्यस्तै चिया मन पराउनेको सन्दर्भमा,

चिया मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या $n_0(T) = 10 - 6 = 4$ भरौं।



कफी मन पराउनेको सङ्ख्या $n(C) + n_0(C) + n(C \cap T)$

अथवा, कफी मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या $n_0(C) = n(C) - n(C \cap T)$ हुन्छ।

$$n_0(C) = 15 - 6 = 9$$

अब चिया वा कफी दुवै मन नपराउनेको सङ्ख्या

$$n(\overline{C \cup T}) = 5 \text{ भरौं।}$$

यसप्रकार सो कक्षामा भएका जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या $n(U) = 9 + 6 + 4 + 5 = 24$ जना

यदि A र B दुईओटा खण्टिएका समूह छन् भने,

(i) दुवै समूहको जम्मा सङ्ख्या $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(ii) A मा मात्र भएको सङ्ख्या $n_0(A) = n(A) - n(A \cap B)$

(iii) B मा मात्र भएको सङ्ख्या $n_0(B) = n(B) - n(A \cap B)$

(iv) A र B दुवै समूहमा भएको सङ्ख्या $n(A \cup B) = n_0(A) + n_0(B) + n(A \cap B)$

(v) यदि A र B अलगगएका समूह भए $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

(vi) यदि U भित्र A र B का मात्र सदस्य भए $n(U) = n(A \cup B)$ हुन्छ।

(vii) U भित्र A र B का सदस्यबाहेक अन्य सदस्य भए $n(U) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B})$ हुन्छ।

अन्य केही शब्दावलीहरू

कम्तीमा एउटामा पर्ने (at least one) : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

अथवा, $n(A \cup B) = n_0(A) + n_0(B) + n(A \cap B)$

बढीमा एउटामा पर्ने (at most one) : $n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B)$

एउटामा मात्र पर्ने (exactly one) : $n_0(A) + n_0(B) = n(A) + n(B) - 2 \times n(A \cap B)$

उदाहरण 1

एउटा समुदायका 300 जना मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 175 जनाले क्रिकेट र 150 जनाले फुटबल मन पराए तर 25 जनाले कुनै पनि खेल मन नपराएको पाइयो। यसका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

- (क) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।
- (ख) दुवै खेल मन पराउने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्
- (ग) एउटा मात्र खेल मन पराउने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

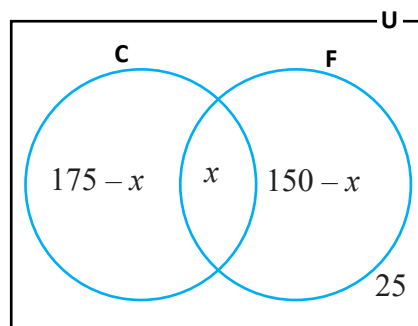
समाधान

मानौं, C र F ले क्रमशः क्रिकेट र फुटबल खेल मन पराउने मानिसको समूहलाई जनाउँछन्। त्यस्तै U ले जम्मा मानिसको समूहलाई जनाउँछ।

प्रश्नअनुसार

$$n(U) = 300, n(C) = 175, n(F) = 150 \text{ र } n(\overline{C \cup F}) = 25$$

$$\text{मानौं, } n(C \cap F) = x$$



- (क) प्राप्त जानकारीलाई भेनचित्रमा दायाँ भागमा प्रस्तुत गरिएको छ।
- (ख) भेनचित्रबाट प्राप्त जानकारीलाई यसरी लेख्न सकिन्छ,

$$n(U) = n_o(C) + n(C \cap F) + n_o(F) + n(\overline{C \cup F})$$

$$300 = (175 - x) + x + (150 - x) + 25$$

$$\text{अथवा, } 300 = 175 - x + x + 150 - x + 25$$

$$\text{अथवा, } 300 = 350 - x$$

$$\text{अथवा, } x = 350 - 300$$

$$\therefore x = 50$$

$$\therefore n(C \cap F) = 50$$

त्यसैले क्रिकेट र फुटबल दुवै खेल मन पराउने मानिसको सङ्ख्या जम्मा 50 रहेछ।

फेरि,

$$(ग) \text{ क्रिकेट खेल मात्र मन पराउने मानिसको सङ्ख्या } n_o(C) = 175 - 50 = 125$$

$$\text{फुटबल खेल मात्र मन पराउने मानिसको सङ्ख्या } n_o(F) = 150 - 50 = 100$$

त्यसैले एउटा मात्र खेल मन पराउने मानिसको सङ्ख्या $n_o(C) + n_o(F) = 125 + 100 = 225$ रहेछ।

उदाहरण 2

कुनै एउटा विद्यालयको कक्षा 10 का 120 जना विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणबाट प्राप्त नतिजा यसप्रकार छ :

30 जनाले गणित मात्र मन पराउँछन् ।

40 जनाले अङ्ग्रेजी मात्र मन पराउँछन् ।

10 जना विद्यार्थीले गणित वा अङ्ग्रेजीमध्ये कुनै पनि मन पराउँदैनन् ।

यसका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

- (क) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- (ख) दुवै विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) कम्तीमा एक विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, M र E ले क्रमशः गणित र अङ्ग्रेजी मन पराउने विद्यार्थीको समूह जनाउँछन् । त्यस्तै U ले जम्मा विद्यार्थीको समूह जनाउँछ ।

प्रश्नअनुसार,

$$n(U) = 120, n_o(M) = 30, n_o(E) = 40 \text{ र } n(\overline{M \cup E}) = 10$$

$$\text{मानौं, } n(M \cap E) = x$$

(क) प्राप्त जानकारीलाई भेनचित्रमा दायाँ भागमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

(ख) भेनचित्रबाट,

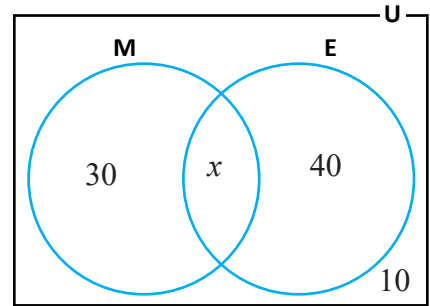
$$30 + x + 40 + 10 = 120$$

$$\text{अथवा, } 80 + x = 120$$

$$\text{अथवा, } x = 120 - 80 = 40$$

$$\text{अथवा } x = 40$$

$$\therefore n(M \cap E) = 40$$



त्यसैले गणित र अङ्ग्रेजी दुवै मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या 40 रहेछ ।

(ग) कम्तीमा एक विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या $n(M \cup E) = 30 + 40 + 40 = 110$ रहेछ ।

उदाहरण 3

कुनै एउटा विद्यालयमा एसईई दिएर बसेका केही विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 75% ले विज्ञान पढ्ने, 55% ले स्टाफ नर्स पढ्ने रुचि देखाएछन् तर 5% ले कुनै पनि विषय पढ्ने रुचिको जानकारी गराएनन् जहाँ 21 जना विद्यार्थीले विज्ञान र स्टाफ नर्स दुवै पढ्ने कुरामा रुचि देखाएछन्। यसका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

- (क) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।
- (ख) सर्वेक्षणमा सहभागी जम्मा विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।
- (ग) स्टाफ नर्स मात्र पढ्ने रुचि देखाउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

मानौं, S र N ले क्रमशः विज्ञान र स्टाफ नर्स पढ्ने रुचि देखाउने विद्यार्थीको समूह जनाउँछन्। त्यस्तै U ले जम्मा विद्यार्थीको समूह जनाउँछ।

प्रश्नअनुसार,

$$\text{मानौं, } n(U) = x$$

$$n(S) = x \text{ को } 75\% = 0.75x$$

$$n(N) = x \text{ को } 55\% = 0.55x$$

$$n(S \cap N) = 21 \text{ र } n(\overline{S \cup N}) = x \text{ को } 5\% = 0.05x,$$

(क) प्राप्त जानकारीलाई भेनचित्रमा दायाँ भागमा प्रस्तुत गरिएको छ।

(ख) अब भेनचित्रबाट,

$$(0.75x - 21) + 21 + (0.55x - 21) + 0.05x = x$$

$$\text{अथवा, } 1.35x - 21 = x$$

$$\text{अथवा, } 1.35x - x = 21$$

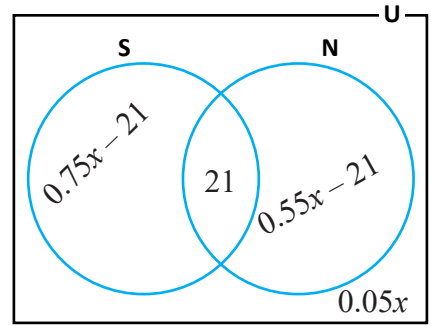
$$\text{अथवा, } 0.35x = 21$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{21}{0.35} = 60$$

$$\text{अथवा, } x = 60$$

$$\therefore n(U) = 60$$

त्यसैले सर्वेक्षणमा सहभागी विद्यार्थीको सङ्ख्या जम्मा 60 रहेछ।



(ग) भेनचित्रबाट,

स्टाफ नर्स मात्र पढ्न रुचि देखाउने विद्यार्थीको सङ्ख्या

$$= 0.55x - 21$$

$$= 0.55 \times 60 - 21$$

$$= 33 - 21$$

$$= 12$$

त्यसैले स्टाफ नर्स मात्र पढ्न रुचि देखाउने विद्यार्थीको सङ्ख्या जम्मा 12 रहेछ ।

उदाहरण 4

नेपाल भ्रमणका लागि आएका 300 जना विदेशीमा गरिएको सर्वेक्षणमा पोखरा भ्रमण गर्ने र लुम्बिनी भ्रमण गर्ने पर्यटकको अनुपात 2:3 पाइयो, जसमध्ये 90 जनाले दुवै ठाउँ भ्रमण गरेका रहेछन् तर 60 जनाले पोखरा वा लुम्बिनी कुनै पनि ठाउँ भ्रमण गरेका रहेनछन् । यसका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) एउटा मात्र ठाउँ भ्रमण गरेका पर्यटकको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) कम्तीमा एक ठाउँ भ्रमण गरेका पर्यटकको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, P र L ले क्रमशः पोखरा र लुम्बिनी भ्रमण गरेका पर्यटकको समूह जनाउँछन् । त्यस्तै U ले जम्मा पर्यटकको समूह जनाउँछ ।

प्रश्नअनुसार,

$$n(U) = 300, n(P \cap L) = 90 \text{ र } n(\overline{P \cap L}) = 60$$

$$\text{मानौं, } n(P) = 2x, n(L) = 3x$$

(क) प्राप्त जानकारीलाई भेनचित्रमा दायाँ भागमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

(ख) अब भेनचित्रबाट,

$$(2x - 90) + 90 + (3x - 90) + 60 = 300$$

$$\text{अथवा, } 5x - 30 = 300$$

$$\text{अथवा, } 5x = 300 + 30$$

$$\text{अथवा, } 5x = 330$$

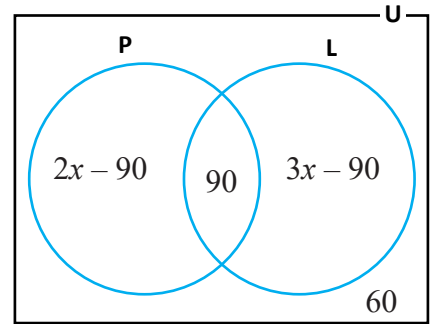
$$\text{अथवा, } x = \frac{330}{5}$$

$$\therefore x = 66$$

$$\text{तसर्थ } n_0(P) = 2 \times 66 - 90 = 42 \text{ र } n_0(L) = 3 \times 66 - 90 = 108$$

$$\text{त्यसैले एउटा मात्र भ्रमण गर्ने पर्यटकको सङ्ख्या} = 42 + 108 = 150$$

$$(ग) \text{ कम्तीमा एक ठाउँ भ्रमण गर्ने पर्यटकको सङ्ख्या} = 300 - 60 = 240$$



उदाहरण 5

कक्षा १० मा अध्ययनरत 200 जना विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणमा गणित मात्र मन पराउने र अङ्ग्रेजी मात्र मन पराउनेको अनुपात 2:3 पाइयो, जसमध्ये जम्मा विद्यार्थीको 30% ले दुवै विषय मन पराए तर 15% ले गणित वा अङ्ग्रेजी दुवै विषय मन पराएनन्। यसका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

- (क) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।
 (ख) गणित मन पराउने र अङ्ग्रेजी मन पराउने विद्यार्थीबिचको फरक कति छ, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

मानौं, M र E ले क्रमशः गणित र अङ्ग्रेजी विषय मन पराउने विद्यार्थीको समूहलाई जनाउँछन्। त्यस्तै U ले जम्मा विद्यार्थीको समूहलाई जनाउँछ।

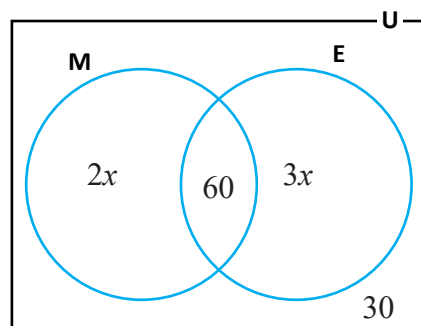
प्रश्नानुसार,

$$n(U) = 200, n(M \cap E) = 200 \text{ को } 30\% = 60 \text{ र}$$

$$n(\overline{M \cup E}) = 200 \text{ को } 15\% = 30$$

मानौं, $n_o(M) = 2x$, $n_o(E) = 3x$

- (क) प्राप्त जानकारीलाई भेनचित्रमा दायाँ भागमा प्रस्तुत गरिएको छ।



- (ख) भेनचित्रबाट,

$$2x + 60 + 3x + 30 = 200$$

$$\text{अथवा, } 90 + 5x = 200$$

$$\text{अथवा, } 5x = 200 - 90$$

$$\text{अथवा, } 5x = 110$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{110}{5}$$

$$\therefore x = 22$$

त्यसैले

गणित विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या $n(M) = 2x + 60 = 2 \times 22 + 60 = 104$ जना रहेछ।

अङ्ग्रेजी विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या $n(E) = 3x + 60 = 3 \times 22 + 60 = 126$ जना रहेछ।

तसर्थ गणित र अङ्ग्रेजी विषय मन पराउने विद्यार्थीबिचको फरक $= 126 - 104 = 22$ जना रहेछ।

अभ्यास 1.1

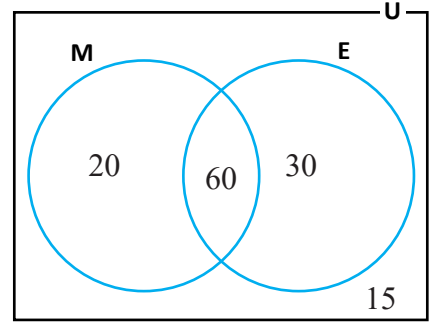
- (क) समूहको गणनात्मकतालाई उदाहरणसहित प्रस्तुत गर्नुहोस् र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

(ख) यदि समूह A र B मा $A \subset B$ भए $n(A \cup B)$ र $n(A \cap B)$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि समूह A र B एक आपसमा खप्टिएका समूह भए $n(A \cup B)$ को सूत्र उल्लेख गर्नुहोस् ।

(घ) समूह A र B मा क्रमशः 12 र 8 सदस्य छन् भने समूह $A \cup B$ मा घटीमा कति सदस्य हुन सक्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

- दिइएको भेनचित्रमा M समूहमा 80 जना, E समूहमा 90 जना र दुवै समूहमा नपरेका 15 जना सदस्य भए तलका समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् :



- (क) $n_0(M)$ (ख) $n_0(E)$

(ग) $n(M)$ (घ) $n(E)$

(ङ) $n(M \cup E)$ (च) $n(M \cap E)$

(छ) $n(\overline{M \cup E})$ (ज) $n(U)$
- (क) यदि $n(U) = 200$, $n_0(M) = 2x$, $n_0(E) = 3x$, $n(M \cap E) = 60$ र $n(\overline{M \cup E}) = 40$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $n(U) = 350$, $n(A) = 200$, $n(B) = 220$ र $n(A \cap B) = 120$ भए $n(A \cup B)$ र $n(\overline{A \cup B})$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $n(A) = 35$ र $n(\overline{A}) = 25$ भए $n(U)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) दुईओटा समूह P र Q मध्ये P मा 40 ओटा, $(P \cup Q)$ मा 60 ओटा र $(P \cap Q)$ मा 10 ओटा सदस्य छन् भने समूह Q मा जम्मा कति सदस्य छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (क) कुनै विद्यालयको 180 जना विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 45 जनाले नेपाली मात्र र 60 जनाले अङ्ग्रेजी मात्र मन पराउँछन् तर 15 जनाले कुनै पनि विषय मन पराउँदैनन् । त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) दुवै विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) कम्तीमा पनि एक विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा विद्यालयका 1200 जना विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 100 जनाले गणित मात्र र 200 जनाले विज्ञान मात्र मन पराउँछन् तर 700 जनाले कुनै पनि विषय मन पराउँदैनन् । त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) दुवै विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) कम्तीमा एक विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) 60 जना विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणमा 10 जनाले फुटबल मात्र र 20 जनाले भलिबल मात्र खेल्ने रहेछन् तर 12 जनाले कुनै पनि खेल खेल्ने रहेनछन् । त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) दुवै खेल खेल्ने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) कम्तीमा एक खेल खेल्ने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (क) एउटा समुदायका 900 जना मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 525 जना मधुपर्क र 450 जना युवामञ्च पढ्ने रहेछन् तर 75 जना कुनै पनि पत्रपत्रिका पढ्ने रहेनछन् । त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) दुवै पत्रपत्रिका पढ्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) एउटा मात्र पत्रपत्रिका पढ्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 150 जना मनिसको समूहमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 90 जना आधुनिक र 70 जना लोकदोहोरी गीत मन पराउँछन् तर 30 जना कुनै पनि गीत मन पराउँदैनन् । त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) दुवै गीत मन पराउने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) आधुनिक गीत मात्र मन पराउने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) एउटा समुदायका 360 जना खेलाडीमा गरिएको सर्वेक्षणमा 210 जना भलिबल खेल र 180 जना फुटबल खेल्न मन पराउँछन् तर 30 जना कुनै पनि खेल खेल्न मन पराउँदैनन् । त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) दुवै खेल खेल्ने खेलाडीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) एउटा मात्र खेल खेल्ने खेलाडीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (क) एउटा परीक्षामा सम्मिलित विद्यार्थीमध्ये 70% अङ्ग्रेजीमा उत्तीर्ण भए, 60% गणितमा उत्तीर्ण भए तर 20% दुवै विषयमा अनुत्तीर्ण भए र 550 जना विद्यार्थी दुवै विषयमा उत्तीर्ण भएको पाइयो। यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

(आ) परीक्षामा सहभागी जम्मा विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

(इ) अङ्ग्रेजी मात्र उत्तीर्ण हुने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

(ख) कक्षा 10 को परीक्षा दिएर बसेका केही विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 60% ले विज्ञान पढ्ने, 70% ले व्यवस्थापन पढ्ने रुचि देखाएछन् तर 10% ले विज्ञान र व्यवस्थापन दुवैमध्ये कुनै पनि रुचिको जानकारी गराएनन्, जसमा 400 जनाले विज्ञान र व्यवस्थापन दुवै पढ्ने कुरामा रुचि देखाएछन्। यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

(आ) सर्वेक्षणमा जम्मा कति विद्यार्थीको सहभागिता रहेछ पत्ता लगाउनुहोस्।

(इ) विज्ञान पढ्न मात्र रुचि देखाउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

(ग) एउटा समुदायका मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 65% ले मोटरसाइकल चलाउने 35% ले स्कुटर चलाउने, 20% ले दुवै चलाउने रहेछन् जसमा 200 जनाले मोटरसाइकल र स्कुटर दुवै चलाउने रहेछन्। यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

(आ) सर्वेक्षणमा सहभागी जम्मा मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

(इ) मोटरसाइकल मात्र चलाउने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

7. (क) एउटा समुदायका 95 मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार चिया पिउने र कफी पिउने मानिसको अनुपात 4:5 पाइयो, जसमध्ये 10 जनाले दुवै पिउने रहेछन् तर 15 जनाले चिया वा कफी दुवै पिउने रहेनछन्। यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

(आ) चिया वा कफीमध्ये एउटा मात्र पिउने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

(इ) चिया वा कफीमध्ये कम्तीमा एउटा पिउने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

(ख) एउटा कक्षाका 64 जना विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार दुध मात्र मन पराउने र दही मात्र मन पराउनेको अनुपात 2:1 र 16 जनाले दुवै मन पराउने पाइयो। त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

(आ) दुध मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

(इ) एउटा मात्र चिज मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

(ग) एउटा समारोहमा सहभागी 320 जना मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 60 जनाले गीत गाउने मात्र रहेछन् । 100 जनाले नाच्ने मात्र रहेछन् । यदि यी दुई विधामध्ये कुनै पनि नगर्ने मानिसको सङ्ख्या दुवै काम गर्ने मानिसको सङ्ख्याभन्दा तीन गुणा बढी छ । यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) कुनै पनि विधा नगर्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) बढीमा एउटा विधा प्रयोग गर्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा समुदायका 200 मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार ल्यापटप मात्र प्रयोग गर्ने र मोबाइल मात्र प्रयोग गर्नेको अनुपात 2:3 पाइयो, जसमध्ये जम्मा मानिसको 30% ले दुवै प्रयोग गर्ने रहेछन् तर 15% ले दुवै प्रयोग नगर्ने रहेछन् । यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) ल्यापटप प्रयोग गर्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) बढीमा एउटा साधन प्रयोग गर्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. एउटा सर्वेक्षणमा सहभागी 300 खेलाडीमध्ये एकतिहाइ खेलाडी भलिबल मात्र खेल्छन् । त्यसमध्ये बाँकी रहेका खेलाडीको 60% फुटबल मात्र खेल्छन् । तर 60 जना खेलाडीले दुवै खेल खेल्दैनन् भने भेनचित्रका माध्यमबाट भलिबल खेल्ने र फुटबल खेल्ने खेलाडीको अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. एउटा सर्वेक्षणमा सहभागी 65 खेलाडीमध्ये 11 जना खेलाडी भलिबल मात्र र 33 जना खेलाडी क्रिकेट मात्र खेल्छन् । यदि क्रिकेट खेल्ने खेलाडीको सङ्ख्या भलिबल खेल्ने खेलाडीको सङ्ख्याभन्दा दोब्बर छ भने भेनचित्रका माध्यमबाट दुवै खेल खेल्ने र दुवै खेल नखेल्ने खेलाडीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. 80 जना मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार 60 जनाले सुन्तला मात्र मन पराएको र 10 जनाले सुन्तला र स्याउ दुवै मन पराएको पाइयो । सुन्तला मन पराउने मानिसको सङ्ख्या स्याउ मन पराउने मानिसको सङ्ख्याभन्दा 5 गुणा बढी छ । भेनचित्र प्रयोग गरी स्याउमात्र मन पराउने र दुवैमध्ये कुनै पनि फलफूल मन नपराउने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

पाँच पाँच जना विद्यार्थीको समूह निर्माण गरी सबै समूहले आफ्नो विद्यालयका फरक फरक कक्षामा गई प्रत्येक विद्यार्थीलाई तल दिइएका प्रश्न सोधी उत्तर सङ्कलन गर्नुहोस् :

तपाईंलाई कुन खेल खेल्न मन पर्छ ? (क) क्रिकेट (ख) फुटबल (ग) क्रिकेट र फुटबल दुवै

(घ) अन्य

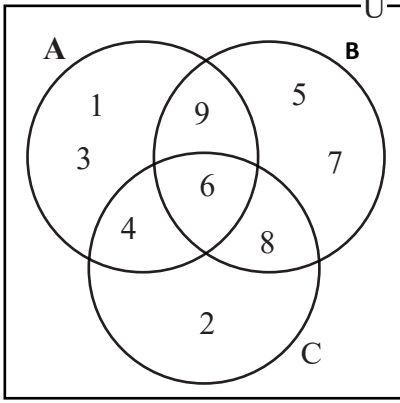
माथिका प्रश्नको उत्तर प्राप्त गरिसकेपछि उक्त तथ्याङ्कलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी प्राप्त नतिजालाई कक्षाकोठामा छलफल गर्नुहोस् ।

1. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) $n(B), n(A)$
 (ग) $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ अथवा $n_0(A) + n_0(B) + n(A \cap B)$ (घ) 12
2. (क) 20 (ख) 30 (ग) 80 (घ) 90 (ङ) 110 (च) 60 (छ) 15 (ज) 125
3. (क) 20 (ख) 300, 50 (ग) 60 (घ) 30
4. (क) (आ) 60, (इ) 165 (ख) (आ) 200 (इ) 500 (ग) (आ) 18 (इ) 48
5. (क) (आ) 150 (इ) 675 (ख) (आ) 40 (इ) 50 (ग) (आ) 60 (इ) 270
6. (क) (आ) 1100 (इ) 220 (ख) (आ) 1000
 (इ) 200 (ग)(आ) 1000 (इ) 450
7. (क) (आ) 70 (इ) 80 (ख) (आ) 48 (इ) 48
 (ग)(आ) 120 (इ) 280
8. (ख) 104 (ग) 140
9. 6:7 10. 11, 10 11. 4, 6

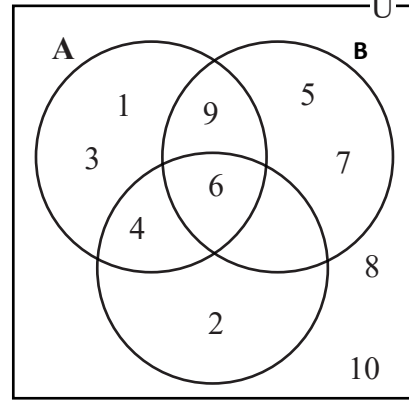
1.2 तीनओटा समूहको गणनात्मकता (Cardinality of Three Sets)

क्रियाकलाप 2

तल दिइएका दुईओटा भेनचित्रमा A, B, C का सदस्यलाई देखाइएको छ। यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नमाथि छलफल गर्नुहोस् :



चित्र नं. 1



चित्र नं. 2

- (क) चित्र नं. 1 र चित्र नं. 2 अवलोकन गरी A, B र C का सदस्यलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् ।
- (ख) चित्र नं. 1 मा समूह A, B र C को गणनात्मकता कति कति हुन्छ ?
- (ग) चित्र नं. 2 मा समूह A, B र C को गणनात्मकता कति कति हुन्छ ?
- (घ) चित्र नं. 1 बाट $n(A \cup B \cup C)$ र $n(U)$ को मान कति कति हुन्छ ?
- (ङ) चित्र नं. 2 बाट $n(A \cup B \cup C)$ र $n(U)$ को मान कति कति हुन्छ ?

साथीहरूको छलफलबाट प्राप्त निष्कर्षलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

| चित्र नं. 1 | चित्र नं. 2 |
|---|---|
| $A = \{1, 3, 4, 6, 9\} \therefore n(A) = 5$ | $A = \{1, 3, 4, 6, 9\} \therefore n(A) = 5$ |
| $B = \{5, 6, 7, 8, 9\} \therefore n(B) = 5$ | $B = \{5, 6, 7, 9\} \therefore n(B) = 4$ |
| $C = \{2, 4, 6, 8\} \therefore n(C) = 4$ | $C = \{2, 4, 6\} \therefore n(C) = 3$ |
| $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\therefore n(A \cup B \cup C) = 9$ | $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ $\therefore n(A \cup B \cup C) = 8$ |
| $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \therefore n(U) = 9$ | $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $\therefore n(U) = 10$ |
| माथिको तालिकाबाट चित्र नं. 1 र चित्र नं. 2 मा $n(A \cup B \cup C)$ र $n(U)$ विचको सम्बन्ध कस्तो छ, किन ? | |

क्रियाकलाप 3

कुनै कक्षामा भएका विद्यार्थीमा सर्वेक्षण गर्दा 40 जनाले सुन्तला, 35 जनाले आँप र 50 जनाले केरा मन पराउने पाइयो । साथै 15 जनाले सुन्तला र आँप, 20 जनाले आँप र केरा तथा 25 जनाले सुन्तला र केरा मन पराउने, 5 जनाले तीनओटै फलफूल मन पराउने र 30 जनाले कुनै पनि फलफूल मन नपराउने पनि पाइयो । यसका आधारमा भेनचित्रका माध्यमबाट सर्वेक्षणमा सहभागीको सङ्ख्या कसरी पत्ता लगाउने होला ?

यहाँ O, M र B ले क्रमशः सुन्तला, आँप र केरा मन पराउने विद्यार्थीको समूहलाई जनाउँछ ।

यहाँ देखाइएको भेनचित्रमा सुरुमा तीनओटै फलफूल मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या $n(O \cap M \cap B) = 5$ र कुनै पनि मन नपराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या $n(\overline{O \cup M \cup B}) = 30$ भरौं ।

त्यसपछि दुईओटा मात्र मन पराउने ठाउँमा भरौं,

सुन्तला र आँप मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(O \cap M) = 15$ छन् । 5 जना तीनओटैमा आइसकेकाले सुन्तला र आँप मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या $n_o(O \cap M) = 15 - 5 = 10$ जना राखौं ।

यसैगरी आँप र केरा मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(M \cap B) = 20$ छन् । 5 जना तीनओटैमा आइसकेकाले आँप र केरा मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या $n_o(M \cap B) = 20 - 5 = 15$ जना तथा सुन्तला र केरा मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या $n_o(O \cap B) = 25 - 5 = 20$ जना राखौं ।

यस्तै गरी,

40 जनाले सुन्तला मन पराउँछन् तर 5 जनाले सुन्तला, आँप र केरा तीनओटै फलफूल, 10 जनाले सुन्तला र आँप मात्र तथा 20 जनाले सुन्तला र केरा मात्र मन पराउँछन् ।

तसर्थ सुन्तला मात्र मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या $n_o(O) = 40 - (5 + 10 + 20) = 5$ हुन्छ ।

35 जनाले आँप मन पराउँछन् तर 5 जनाले सुन्तला, आँप र केरा तीनओटै फलफूल, 10 जनाले सुन्तला र आँप मात्र तथा 15 जनाले आँप र केरा मात्र मन पराउँछन् ।

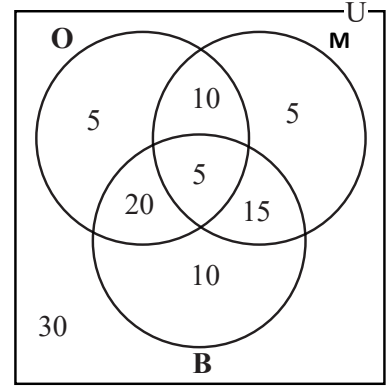
तसर्थ आँप मात्र मन पराउनेको विद्यार्थी सङ्ख्या $n_o(M) = 35 - (5 + 10 + 15) = 5$ हुन्छ ।

50 जनाले केरा मन पराउँछन् तर 5 जनाले सुन्तला, आँप र केरा तीनओटै फलफूल, 15 जनाले केरा र आँप मात्र तथा 20 जनाले सुन्तला र केरा मात्र मन पराउँछन् ।

तसर्थ केरा मात्र मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या $n_o(B) = 50 - (5 + 15 + 20) = 10$ हुन्छ ।

अब जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या $n(U) = 5 + 10 + 5 + 5 + 20 + 15 + 10 + 30 = 100$

तसर्थ जम्मा सहभागीको सङ्ख्या 100 रहेछ ।

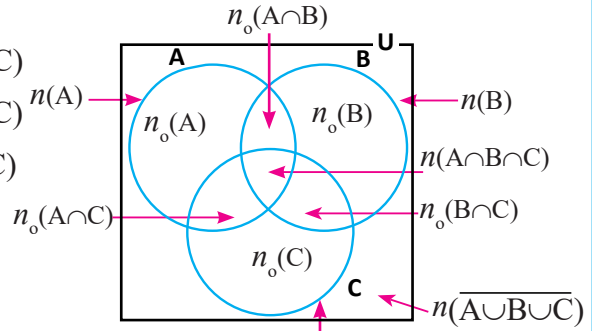


यदि A, B र C खप्तिएका समूह हुन् भने सँगै दिइएको चित्रबाट निम्नलिखित सम्बन्ध लेख्न सकिन्छ :

(क) $n_0(A \cap B) = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$

(ख) $n_0(A \cap C) = n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

(ग) $n_0(B \cap C) = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$



(घ) $n(A) = n_0(A) + n_0(A \cap B) + n_0(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(ङ) $n(B) = n_0(B) + n_0(A \cap B) + n_0(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(च) $n(C) = n_0(C) + n_0(A \cap C) + n_0(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(छ) $n(U) = n_0(A) + n_0(B) + n_0(C) + n_0(A \cap B) + n_0(B \cap C) + n_0(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) + n(\overline{A \cup B \cup C})$

अथवा, $n(U) = n(A \cup B \cup C) + n(\overline{A \cup B \cup C})$ जहाँ,

$n(A \cup B \cup C) = n_0(A) + n_0(B) + n_0(C) + n_0(A \cap B) + n_0(B \cap C) + n_0(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ हुन्छ ।

तीनओटा समूह सम्मिलित भेनचित्रबाट निम्नानुसारको सम्बन्ध पनि लेख्न सकिन्छ :

यदि A, B र C आपसमा खप्तिएका समूह (Overlapping sets) हुन् भने,

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ ।

त्यसैले,

$n(A \cup B \cup C) = n\{(A \cup B) \cup C\}$

$= n(A \cup B) + n(C) - n\{(A \cup B) \cap C\}$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n\{(A \cap C) \cup (B \cap C)\}$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - [n(A \cap C) + n(B \cap C) - n\{(A \cap C) \cap (B \cap C)\}]$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

यदि समूह अलगगिएका समूह (Disjoint sets) भएमा,

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $n(U) = 120$, $n(A) = 48$, $n(B) = 51$, $n(C) = 40$, $n(A \cap B) = 11$, $n(B \cap C) = 10$, $n(A \cap C) = 9$, र $n(A \cap B \cap C) = 4$ भए $n(A \cup B \cup C)$ र $n(\overline{A \cup B \cup C})$ को मान पत्ता लगाउनुहोस्। उक्त जानकारीलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

समाधान

यहाँ दिइएको,

$$n(U) = 120, n(A) = 48, n(B) = 51, n(C) = 40, n(A \cap B) = 11, n(B \cap C) = 10, n(A \cap C) = 9, \text{ र } n(A \cap B \cap C) = 4$$

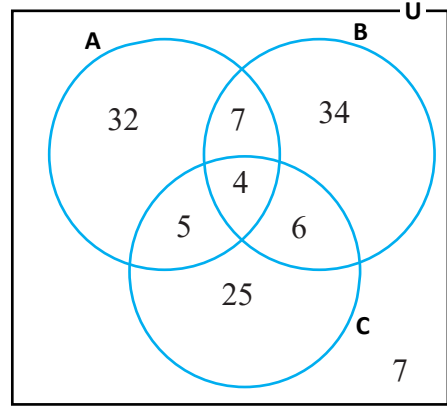
हामीलाई थाहा छ

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 48 + 51 + 40 - 11 - 10 - 9 + 4 \\ &= 113 \end{aligned}$$

फेरि,

$$\begin{aligned} n(U) &= n(A \cup B \cup C) + n(\overline{A \cup B \cup C}) \\ \text{अथवा, } 120 &= 113 + n(\overline{A \cup B \cup C}) \\ \text{अथवा, } n(\overline{A \cup B \cup C}) &= 120 - 113 \\ \therefore n(\overline{A \cup B \cup C}) &= 7 \end{aligned}$$

प्राप्त जानकारीलाई दायाँ भागमा भेनचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ।



उदाहरण 2

नेपाल माध्यामिक विद्यालयका वि.सं. 2071 को एसएलसी. परीक्षामा सहभागी जम्मा 180 जना विद्यार्थीमध्ये 86 जना विज्ञानमा, 80 जना गणितमा र 76 जना नेपालीमा उत्तीर्ण भएछन्। जसमध्ये 26 जना विज्ञान र गणितमा, 36 जना गणित र नेपालीमा र 32 जना विज्ञान र नेपालीमा उत्तीर्ण भएछन् तर 20 जना कुनै विषयमा पनि उत्तीर्ण भएनछन् भने,

- दिइएको जानकारीलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।
- तीनओटै विषयमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ M, S, र N ले क्रमशः गणितमा उत्तीर्ण विद्यार्थी सङ्ख्या, विज्ञानमा उत्तीर्ण विद्यार्थी सङ्ख्या र नेपालीमा उत्तीर्ण विद्यार्थी सङ्ख्यालाई जनाउँछन्।

यहाँ,

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या $n(U) = 180$

विज्ञानमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(S) = 86$

गणितमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(M) = 80$

नेपालीमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(N) = 76$

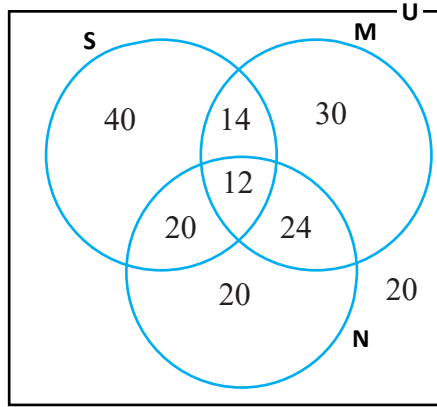
विज्ञान र गणितमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(S \cap M) = 26$

गणित र नेपालीमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(M \cap N) = 36$

विज्ञान र नेपालीमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(S \cap N) = 32$

कुनै पनि विषयमा उत्तीर्ण नहुने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(\overline{M \cup N \cup S}) = 20$

(क) भेनचित्रमा देखाउँदा,



(ख) हामीलाई थाहा छ,

$$n(U) = n(S) + n(M) + n(N) - n(S \cap M) - n(M \cap N) - n(S \cap N) + n(S \cap M \cap N) + n(\overline{S \cup M \cup N})$$

$$\text{अथवा, } 180 = 86 + 80 + 76 - 26 - 36 - 32 + n(S \cap M \cap N) + 20$$

$$\text{अथवा, } 180 = 168 + n(S \cap M \cap N)$$

$$\text{अथवा, } n(S \cap M \cap N) = 180 - 168$$

$$\text{अथवा, } n(S \cap M \cap N) = 12$$

तसर्थ तीनओटै विषयमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थीको सङ्ख्या जम्मा 12 रहेछ ।

वैकल्पिक तरिका

सबै विषयमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थी सङ्ख्या $n(M \cap N \cap S) = x$ मानौं

प्राप्त जानकारीलाई भेनचित्रमा देखाइएको छ ।

भेनचित्रबाट,

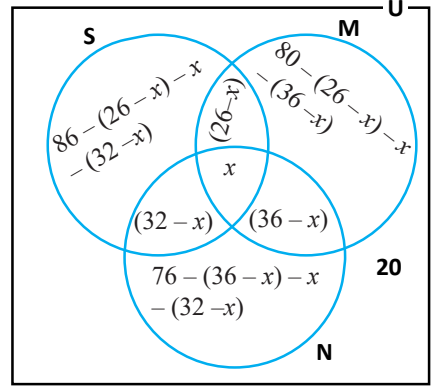
$$\{86 - (26 - x) - x - (32 - x)\} + (26 - x) + (32 - x) + x + (36 - x) + \{80 - (26 - x) - x - (36 - x)\} + \{76 - (36 - x) - x - (32 - x)\} + 20 = 180$$

$$\text{अथवा, } (28 + x) + 94 - 2x + (18 + x) + (8 + x) + 20 = 180$$

$$\text{अथवा, } 168 + x = 180$$

$$\text{अथवा, } x = 180 - 168$$

$$\therefore x = 12$$



तसर्थ, तीनओटै विषयमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थीको सङ्ख्या जम्मा 12 रहेछ ।

उदाहरण 3

विद्यालयले कुनै एक प्रतिस्पर्धामा विभिन्न विधामा विद्यार्थीलाई मेडल वितरण गरेको थियो, जसअनुसार 36 जनाले नृत्यमा, 12 जनाले नाटकमा र 18 जनाले सङ्गीतमा मेडल पाए । यदि ती मेडल जम्मा 45 जनाले पाएका थिए र 4 जनाले तीनओटै विधामा मेडल पाएका थिए भने दुईओटा विधामा मात्रै मेडल पाउने कति जना थिए पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ A, B र C ले नृत्यमा, नाटकमा र सङ्गीतमा मेडल पाउने विद्यार्थी सङ्ख्यालाई जनाउँछ ।

$$\text{नृत्यमा मेडल पाउने, } n(A) = 36$$

$$\text{नाटकमा मेडल पाउने, } n(B) = 12$$

$$\text{सङ्गीतमा मेडल पाउने, } n(C) = 18$$

$$\text{कम्तीमा एउटा विधामा मेडल पाउने, } n(A \cup B \cup C) = 45$$

$$\text{तीनओटै विधामा मेडल पाउने, } n(A \cap B \cap C) = 4$$

दुईओटा विधामा मात्र मेडल पाउने जम्मा विद्यार्थीको समूह

$$n_0(A \cap B) + n_0(B \cap C) + n_0(A \cap C) = ?$$

हामीलाई थाहा छ,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\text{अथवा, } 45 = 36 + 12 + 18 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + 4$$

$$\text{अथवा, } 45 = 70 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C)$$

$$\text{अथवा, } n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C) = 70 - 45$$

$$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C) = 25$$

अब,

$$n_0(A \cap B) + n_0(B \cap C) + n_0(A \cap C)$$

$$= \{n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)\} + \{n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)\} + \{n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)\}$$

$$= \{n(A \cap B) - 4\} + \{n(B \cap C) - 4\} + \{n(A \cap C) - 4\}$$

$$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C) - 4 - 4 - 4$$

$$= 25 - 12$$

$$= 13$$

वैकल्पिक तरिका

मानौं, $n_0(A \cap B) = a$, $n_0(B \cap C) = b$, $n_0(A \cap C) = c$

हामीलाई चाहिएको : $a + b + c = ?$

प्राप्त जानकारीलाई दायाँ भागमा भेनचित्रमा प्रस्तुत गरि
एको छ :

भेनचित्रबाट,

$$\{36 - (4 + a + c)\} + a + 4 + b + c + \{12 - (4 + a + b)\} + \{18 - (4 + b + c)\} = 45$$

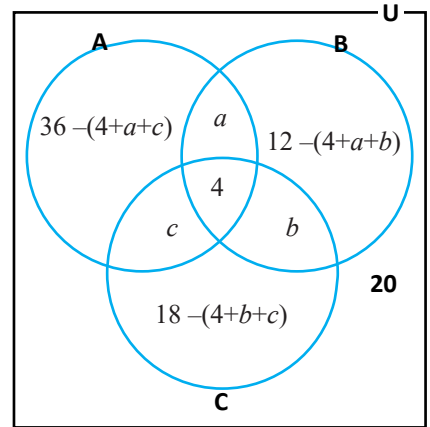
$$\text{अथवा, } (32 - a - c) + 4 + a + b + c + (8 - a - b) + (14 - b - c) = 45$$

$$\text{अथवा, } 58 - a - b - c = 45$$

$$\text{अथवा, } a + b + c = 58 - 45$$

$$\therefore a + b + c = 13$$

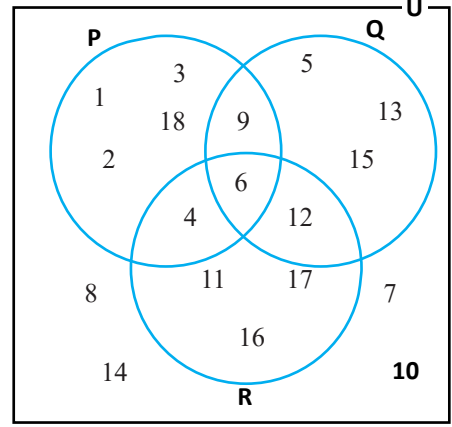
तसर्थ दुईओटा विधामा मात्र मेडल पाउने जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या 13 रहेछ ।



अभ्यास 1.2

1. दिइएको भेनचित्रमा P, Q र R का सदस्यलाई देखाइएको छ। यसका आधारमा तलका समूहको मान पत्ता लगाउनुहोस्।

- (क) $n(P)$ (ख) $n(Q)$
 (ग) $n(P \cup Q \cup R)$ (घ) $n_0(P)$
 (ङ) $n_0(R)$ (च) $n(P \cap R)$
 (छ) $n(\overline{P \cup Q \cup R})$ (ज) $n_0(P \cap Q)$
 (झ) $n(P \cap Q \cap R)$



2. यदि $U = \{30 \text{ भन्दा साना धनात्मक पूर्णाङ्कहरू}\}$

$P = \{2 \text{ का } 30 \text{ भन्दा साना अपवर्त्यहरू}\}$
 $Q = \{3 \text{ का } 30 \text{ भन्दा साना अपवर्त्यहरू}\}$
 $R = \{5 \text{ का } 30 \text{ भन्दा साना अपवर्त्यहरू}\}$ भएमा

P, Q, R को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी तलका सम्बन्धहरू प्रमाणित गर्नुहोस् :

- (क) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$
 (ख) $n(P \cup Q \cup R) = n(P) + n(Q) + n(R) - n(P \cap Q) - n(Q \cap R) - n(R \cap P) + n(P \cap Q \cap R)$
 (ग) $n(P \cup Q \cup R) = n(P - Q) + n(Q - R) + n(R - P) + n(P \cap Q \cap R)$
3. (क) यदि $n(U) = 100$, $n(M) = 45$, $n(E) = 50$, $n(S) = 35$, $n(M \cap E) = 20$, $n(E \cap S) = 20$, $n(S \cap M) = 15$ र $n(M \cap E \cap S) = 5$ भए $n(\overline{M \cup E \cup S})$ को मान पत्ता लगाउनुहोस्।
- (ख) यदि $n(U) = 105$, $n(A) = 40$, $n(B) = 35$, $n(C) = 30$, $n(A \cap B) = 15$, $n(B \cap C) = 12$, $n(A \cap B \cap C) = 6$ र $n(\overline{A \cup B \cup C}) = 30$ भए $n(A \cap C)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस्।
- (ग) यदि $n(U) = 120$, $n(M) = 50$, $n(E) = 40$, $n(S) = 45$, $n(M \cap E) = 15$, $n(E \cap S) = 15$, $n(S \cap M) = 15$ र $n(\overline{M \cup E \cup S}) = 15$ भए $n(M \cap E \cap S)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस्।
- (घ) यदि $n(A \cup B \cup C) = 105$, $n_0(A) = 25$, $n_0(B) = 25$, $n_0(C) = 15$, $n_0(A \cap B) = 15$, $n_0(A \cap C) = 10$ र $n(A \cap B \cap C) = 10$ भए $n_0(B \cap C)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस्।
4. (क) कुनै परीक्षामा सहभागी जम्मा 90 जना विद्यार्थीमध्ये 43 जना विज्ञानमा, 40 जना गणितमा र 38 जना नेपालीमा उत्तीर्ण भएछन्। जसमध्ये 13 जना विज्ञान र गणितमा, 18 जना गणित र नेपालीमा र 16 जना विज्ञान र नेपालीमा उत्तीर्ण भएछन् र 6 जना तीनओटै विषयमा उत्तीर्ण भएछन्। त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) कुनै पनि विषयमा उत्तीर्ण नहुने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा समूहमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार चिया मन पराउने 60 जना, कफी मन पराउने 45 जना, दुध मन पराउने 30 जना, कफी र चिया दुवै मन पराउने 25 जना, दुध र चिया दुवै मन पराउने 20 जना, कफी र दुध दुवै मन पराउने 15 जना र तीनओटै मन पराउने मानिसको सङ्ख्या 10 छ । त्यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) कति जना मानिसमा सर्वेक्षण गरिएको रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) 60 जना विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणमा 23 जनाले भलिबल, 15 जनाले बास्केटबल र 20 जनाले क्रिकेट खेल्ने रहेछन् । 7 जनाले भलिबल र बास्केटबल, 5 जनाले बास्केटबल र क्रिकेट, 4 जनाले भलिबल र क्रिकेट खेल्ने रहेछन् तर 15 जनाले यीमध्ये कुनै पनि खेल खेल्ने रहेनछन् । त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(अ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) कति जना विद्यार्थीले तीनओटै खेल खेल्ने रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) कति जनाले क्रिकेट र भलिबल मात्र खेल्ने रहेछन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. कुनै परीक्षामा सहभागी जम्मा विद्यार्थीमध्ये 40% विज्ञानमा, 45% गणितमा र 50% नेपालीमा उत्तीर्ण भएछन् । त्यसै गरी 10% विज्ञान र गणितमा, 20% गणित र नेपालीमा र 15% विज्ञान र नेपालीमा उत्तीर्ण भएछन् । यदि 5% तीनवटै विषयमा अनुत्तीर्ण भएछन् । त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) तीनवटै विषयमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थीको प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा मात्र विषयमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थीको प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) दुईओटा मात्र विषयमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थीको प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) कम्तीमा एउटा विषयमा उत्तीर्ण हुने विद्यार्थीको प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

6. तपाईं युवामञ्च, मधुपर्क र मुनामध्ये कुन पत्रिका पढ्नुहुन्छ भनी एउटा समुदायका केही मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणबाट निम्नानुसारको जानकारी पाइयो :

30 जनाले युवामञ्च, 25 जनाले मधुपर्क, 15 जनाले युवामञ्च र मुना दुवै पढ्छन्, 12 जनाले युवामञ्च र मधुपर्क दुवै पढ्छन्, 9 जनाले मधुपर्क मात्र पढ्छन्, 11 जनाले मुना मात्र पढ्छन्, 5 जनाले युवामञ्च र मधुपर्क मात्र पढ्छन् तर 10 जनाले कुनै पनि पत्रिका पढ्दैनन् । यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) सर्वेक्षणमा सहभागी जम्मा मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) दुई प्रकारका मात्र पत्रिका पढ्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) मुना पत्रिका पढ्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. 90 जना मानिसलाई उनीहरूले कुन भाषाको चलचित्र मन पराउँछन् भन्ने विषयमा सर्वेक्षण गर्दा 48 जनाले नेपाली, 40 जनाले अङ्ग्रेजी, 31 जनाले हिन्दी, 24 जनाले नेपाली र अङ्ग्रेजी, 19 जनाले हिन्दी र अङ्ग्रेजी, 6 जनाले सबै (तीनै) भाषाको र 21 जनाले चलचित्र नै हेर्न मन नपराउने पाइएछ भने,

(क) नेपाली र हिन्दी मन पराउने कति जना रहेछन् ?

(ख) हिन्दी चलचित्र कति जनाले मन नपराउँदा रहेछन् ?

(ग) नेपाली र हिन्दी दुवै चलचित्र मन नपराउने कति जना रहेछन् ?

परियोजना कार्य

विद्यालयले आयोजना गर्न लागेको शैक्षिक भ्रमणका बारेमा उपयुक्त भ्रमण स्थानको छनोट सम्बन्धमा निक्कै गर्नुपर्ने जिम्मेवारी तपाईंको कक्षाबाट हुने कुरा विद्यालय प्रशासनबाट जानकारी भयो । त्यसका लागि आफ्नो कक्षाका सम्पूर्ण विद्यार्थी सहभागी हुने गरी पाँच पाँच जना विद्यार्थीको समूह निर्माण गर्नुहोस् । सबै समूहले आफ्ना विद्यालयका फरक फरक कक्षामा गई प्रत्येक विद्यार्थीलाई तल दिइएका प्रश्न सोधी उत्तर सङ्कलन गर्नुहोस् :

तपाईंलाई शैक्षिक भ्रमणमा जानका लागि कुन ठाउँ मन पर्छ ?

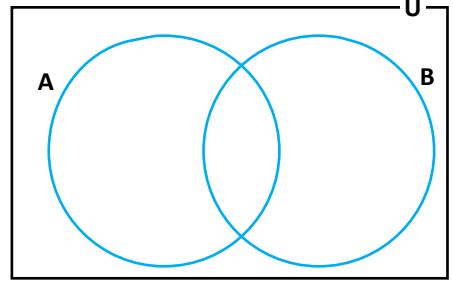
(क) पोखरा (ख) लुम्बिनी (ग) काठमाडौं (घ) पोखरा र लुम्बिनी (ङ) लुम्बिनी र काठमाडौं
(च) पोखरा र काठमाडौं (छ) पोखरा, लुम्बिनी र काठमाडौं (ज) यीबाहेक अन्य ठाउँ

सबै विद्यार्थीको उत्तर सङ्कलन गरेर प्राप्त तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी एउटा मात्र ठाउँ भ्रमण गर्न मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् र समूहका कार्यलाई पालैपालो कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

- | | | | | |
|---------------|------------|-----------|---------|-------|
| 1. (क) 7 | (ख) 6 | (ग) 14 | (घ) 4 | (ङ) 3 |
| (च) 2 | (छ) 4 | (ज) 1 | (झ) 1 | |
| 3. (क) 20 | (ख) 9 | (ग) 15 | (घ) 5 | |
| 4. (क) (आ) 10 | (ख) (आ) 85 | (ग) (आ) 3 | (इ) 1 | |
| 5. (क) 5% | (ख) 60% | (ग) 30%, | (घ) 95% | |
| 6. (ख) 64 | (ग) 17 | (घ) 30 | | |
| 7. (क) 7 | (ख) 59 | (ग) 13 | | |

1. दायँ भागमा देखाइएको भेनचित्रमा दुईओटा खण्टिएका समूह A र B छन्, जहाँ $n_0(A) = 16 + x$, $n_0(B) = 5x$, $n(A \cap B) = y$ र $n(\overline{A \cup B}) = x$ छ। त्यसका आधारमा तलका प्रश्नको जवाफ दिनुहोस्।



- (क) माथिको जानकारीलाई भेनचित्र बनाई भर्नुहोस्।
 (ख) यदि $n(A) = n(B)$ भए $n(\overline{A \cup B})$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ग) यदि $n(U) = 50$ भए $n(A \cap B)$ र $n(\overline{A \cup B})$ को अनुपात कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
2. सर्वव्यापक समूह U का उपसमूह A र B दुईओटा समूह छन्, जहाँ $n(U) = 100$, $n(A - B) = 32 + x$, $n(B - A) = 5x$, $n(A \cap B) = x$ र $n(\overline{A \cup B}) = y$ छ।

- (क) माथिको जानकारीलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।
 (ख) यदि $n(A) = n(B)$ भए $n(A \cap B)$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ग) $n(\overline{A \cup B})$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
 (घ) $n(A \cap B)$ र $n(\overline{A \cup B})$ मा $n(A \cap B)$ भन्दा $(\overline{A \cup B})$ कति प्रतिशतले घटी वा बढी छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
3. एउटा समुदायमा रहेका 93 जना महिलाको समूहमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार कृषिमा सहभागी महिलाको सङ्ख्या 80 र सिलाइ बुनाइ गर्ने महिलाको सङ्ख्या 71 छ भने यी दुवै कार्यबाहेक अन्य कार्यमा सहभागी महिलाको सङ्ख्या 10 छ।

- (क) दिइएका समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।
 (ख) कृषि र सिलाइ बुनाइ दुवैमा सहभागी महिलाको सङ्ख्या कति छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ग) कृषि कार्यमा मात्र सहभागी महिलाको सङ्ख्या सिलाइ बुनाइ कार्यमात्र गर्ने महिलाको सङ्ख्याभन्दा कति गुणा बढी छ, ? गणना गरी लेख्नुहोस्।
4. एउटा समुदायमा रहेका 1000 जना कृषकको समूहमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार आलु खेती गर्ने कृषकको सङ्ख्या 800 जना, गोलभेंडा खेती गर्ने कृषकको सङ्ख्या 500 जना रहेछन्। तर 50 जना कृषकले आलु वा गोलभेंडाबाहेक अरु नै खेती गर्दा रहेछन्।

- (क) दिइएका समूहको गणनात्मक पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।
 (ख) दुवै खेती गर्ने कृषकको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ग) आलु खेती मात्र गर्ने र गोलभेंडा खेती मात्र गर्ने मानिसको सङ्ख्या अनुपातमा लेख्नुहोस्।

5. एउटा समुदायका 400 मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणअनुसार मोटरसाइकलको मात्र लाइसेन्स हुने र कारको मात्र लाइसेन्स हुनेको अनुपात 5:3 पाइयो । जसमध्ये जम्मा मानिसको एक चौथाइसँग दुवैको लाइसेन्स भएको तर 60 जनासँग कुनैको पनि लाइसेन्स नभएको पाइयो :

- (क) माथिको तथ्यलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- (ख) माथिको जानकारीका आधारमा मोटरसाइकल र कारको लाइसेन्स हुने कति कति जना रहेछन् ?
- (ग) मोटरसाइकलको मात्र लाइसेन्स हुने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. कुनै एक विद्यालयमा भएका विद्यार्थीमा फुटबल, भलिबल र क्रिकेट खेलमा कुन खेल मन पर्छ भनी सोधेको प्रश्नमा प्राप्त जानकारी यसप्रकार छ :

- 100 जना फुटबल, 80 जना भलिबल र 120 जना क्रिकेट मन पराउँछन् ।
- फुटबल र भलिबल 30 जना, भलिबल र क्रिकेट 20 जना तथा फुटबल र क्रिकेट 35 जना मन पराउँछन् ।
- फुटबल, भलिबल र क्रिकेट तीनओटै 10 जना मन पराउँछन् तर 5 जना तीनओटै खेल मन पराउँदैनन् ।
- (क) दिइएको जानकारीलाई समूहको गणनात्मकताका रूपमा प्रस्तुत गर्नुहोस्
- (ख) दिइएको जानकारीलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- (ग) त्यस विद्यालयमा भएका जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) फुटबल मात्र मनपराउने विद्यार्थी कति प्रतिशत रहेछन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा समुदायमा रहेका विविध भाषाभाषी बोल्ने 45 जना मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणबाट निम्नानुसारको जानकारी पाइयो :

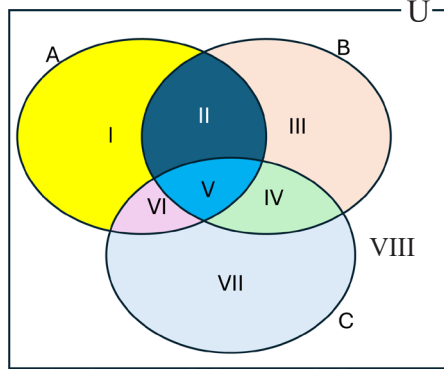
25 जनाले नेपाल भाषा बोल्छन्, 23 जनाले तामाङ भाषा बोल्छन्, 15 जनाले मैथिली भाषा बोल्छन् । 12 जनाले नेपाल भाषा र तामाङ भाषा बोल्छन्, 5 जनाले नेपाल भाषा र मैथिली भाषा बोल्छन्, 10 जनाले तामाङ र मैथिली भाषा बोल्छन् । 4 जना तीनओटै भाषा बोल्छन् ।

यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

- (क) माथिको तथ्यलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- (ख) कति जना मानिस नेपाल भाषा, तामाङ र मैथिलीबाहेक अन्य भाषा बोल्दा रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) एउटा मात्र भाषा बोल्ने मानिसको सङ्ख्या कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) नेपाल भाषा र तामाङ भाषा बोल्ने तर मैथिली भाषा नबोल्ने मानिसको सङ्ख्या कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

खुला प्रश्न

तलको चित्रमा देखाइएका समूहहरूको क्रियालाई I देखि VIII सम्म देखाइएको छ। ति क्रियाहरूलाई जनाउने सङ्केत र व्याख्या गर्ने तरिका फरक फरक हुन सक्छ ? सकेसम्म धेरै तरिकाबाट ति क्रियालाई सङ्केत र व्याख्या गर्नुहोस्। साथै तपाईंको उत्तर ठिक छ भनि पुष्टि गर्नुहोस्।



उत्तर

1. (ख) 4 (ग) 3:2
2. (ख) 8 (ग) 12 (घ) 50% बढी
3. (ख) 68 (ग) 4
4. (ख) 350 (ग) 3:1
5. (ख) 250 र 190 जना (ग) 150 जना
6. (ग) 230 जना (घ) 19.57%
7. (ख) 5 (ग) 21 (घ) 8

2.0 पुनरवलोकन (Review)

तलका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् र प्राप्त निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

एक व्यक्तिले व्यवसाय गर्न रु. 10,00,000 वाणिज्य बैङ्कबाट ऋण लिए ।

- वार्षिक 8% वार्षिक ब्याज दरले 2 वर्षपछि, उनले बैङ्कलाई कति रुपियाँ ब्याज तिर्नुपर्छ ?
- उक्त व्यक्तिले 2 वर्षपछि जम्मा कति रकम बैङ्कलाई तिर्नुपर्छ ? उक्त रकमलाई के भनिन्छ ?
- 5 वर्षका लागि ऋण लिएको भए यही ब्याज दरमा कति रकम ब्याज वापत तिर्नुपर्छ ?

छलफलबाट प्राप्त निष्कर्षलाई यहाँ प्रस्तुत गरिएको छ :

एकमुष्ट रूपमा वार्षिक 8% ब्याज दरमा 2 वर्षको अन्त्यमा बैङ्कलाई तिरेको रकमलाई साधारण ब्याज भनिन्छ । बैङ्कमा ऋण लिएको रकम र ब्याज थपी दिइएको रकमलाई मिश्रधन भनिन्छ । साधारण ब्याज पत्ता लगाउन निम्नानुसार सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

$$\text{साधारण ब्याज (SI)} = \frac{P \cdot T \cdot R}{100}$$

2.1. चक्रीय ब्याजको परिचय (Introduction of Compound Interest)

2.1.1 वार्षिक चक्रीय ब्याज (Compound Interest Compounded Annually)

क्रियाकलाप 1

एक शिक्षकले कमर्सियल बैङ्कबाट वार्षिक 12% ब्याज दरमा 2 वर्षका लागि वार्षिक रूपमा ब्याज बुझाउने गरी रु. 5,00,000 ऋण लिए । उनले पहिलो वर्षको अन्त्यमा तिर्नुपर्ने ब्याज तिर्न सकेनन् फलस्वरूप पहिलो वर्षको ब्याजको समेत दोस्रो वर्षमा ब्याज तिर्नुपर्ने भयो । यस अवस्थामा तल सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् र प्राप्त निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

- पहिलो वर्षमा तिर्नुपर्ने ब्याज रकम कति हुन आउँछ ?
- दोस्रो वर्षका लागि ऋणको मूलधन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- दोस्रो वर्षको ब्याज रकम कति तिर्नुपर्ने भयो ?

छलफलबाट प्राप्त निष्कर्षलाई यहाँ प्रस्तुत गरिएको छ :

$$\begin{aligned} \text{शिक्षकले पहिलो वर्षमा तिर्नुपर्ने ब्याज (I}_1\text{)} &= \frac{P \cdot T \cdot R}{100} = \frac{5,00,000 \times 1 \times 12}{100} \\ &= \text{रु. } 60,000 \text{ भयो ।} \end{aligned}$$

पहिलो वर्षको अन्त्यमा तिर्नुपर्ने ब्याज तिरन नसकेपछि,

दोस्रो वर्षका लागि मूलधन (P_1) = $P + I_1 = \text{रु. } 5,00,000 + \text{रु. } 6,0000 = \text{रु. } 5,60,000$ हुन्छ ।

तसर्थ दोस्रो वर्षका ब्याज (I_2) = $\frac{P_1 \times T \times R}{100} = \frac{5,60,000 \times 1 \times 12}{100} = \text{रु. } 67,200$ भयो ।

त्यसकारण शिक्षकले तिर्नुपर्ने जम्मा ब्याज = रु. 60,000 + रु. 67,200 = रु. 1,27,200

पहिलो वर्ष र दोस्रो वर्षका ब्याजमा किन फरक देखियो ?

कुनै मूलधनको प्रत्येक वर्ष वा निश्चित समय अवधि (वार्षिक, अर्धवार्षिक वा त्रैमासिक) पश्चात् ब्याज गणना गरी ब्याजलाई मूलधनमा जोडेर पुनः ब्याज गणना गरिन्छ, भने यसरी प्राप्त ब्याजलाई चक्रीय ब्याज (Compound interest) भनिन्छ । चक्रीय ब्याज र मूलधनको योगफललाई चक्रीय मिश्रधन (Compound amount) भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

एउटा बैङ्कबाट विशालले साधारण ब्याज र बढीले चक्रीय ब्याज तिरने सर्तमा 3 वर्षका लागि प्रतिवर्ष 10% ब्याजका दरले रु. 30,000 ऋण लिएछन् । यसका आधारमा तल दिइएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

- (क) विशालले जम्मा कति ब्याज तिर्नुपर्छ ?
- (ख) बढीले जम्मा कति ब्याज तिर्नुपर्छ ?
- (ग) कसले बढी ब्याज तिर्नुपर्छ ?

| विशालले तिर्नुपर्ने (साधारण ब्याज) | बढीले तिर्नुपर्ने (चक्रीय ब्याज) |
|--|--|
| पहिलो वर्षका लागि मूलधन (P_1) = रु. 30,000 ब्याज दर (R) = 10% समय (T_1) = 1 वर्ष ब्याज (I_1) = $\frac{30,000 \times 10 \times 1}{100} = \text{रु. } 3,000$ | पहिलो वर्षका लागि मूलधन (P_1) = रु. 30,000 ब्याज दर (R) = 10% समय (T_1) = 1 वर्ष ब्याज (I_1) = $\frac{30,000 \times 10 \times 1}{100} = \text{रु. } 3,000$ |
| दोस्रो वर्षका लागि मूलधन (P_2) = 30,000, ब्याज दर (R) = 10% समय (T_2) = 1 वर्ष ब्याज (I_2) = $\frac{30,000 \times 10 \times 1}{100} = \text{रु. } 3,000$ | दोस्रो वर्षका लागि मूलधन (P_2) = रु. 30,000 + 3,000 = 33,000 ब्याज दर (R) = 10%, समय (T_2) = 1 वर्ष ब्याज (I_2) = $\frac{33,000 \times 10 \times 1}{100} = \text{रु. } 33,00$ |

तेस्रो वर्षका लागि

मूलधन (P_1) = रु. 30,000

ब्याज दर (R) = 10%

समय (T_3) = 1 वर्ष

ब्याज (I_3) = $\frac{30,000 \times 10 \times 1}{100}$ = रु. 3,000

जम्मा ब्याज (I) = $I_1 + I_2 + I_3$
= 3000 + 3000 + 3000
= रु. 9,000

तेस्रो वर्षका लागि

मूलधन (P_3) = रु. (33,000 + 3,300) = रु. 36,300

ब्याज दर (R) = 10%, समय (T_3) = 1 वर्ष

ब्याज (I_3) = $\frac{36,300 \times 10 \times 1}{100}$ = रु. 3,630

जम्मा ब्याज (I) = $I_1 + I_2 + I_3$
= 3000 + 3300 + 3630
= रु. 9,930

ए ! एउटै ब्याज दरमा पनि

साधारण ब्याजभन्दा चक्रीय ब्याजमा बढी ब्याज
आउने रहेछ । चक्रीय ब्याजमा प्रत्येक वर्ष मूलधन कायम गर्दा
अगिल्लो वर्षको मूलधनमा ब्याज जोडिँदै दोरहेछ । यसमा
त ब्याजको पनि ब्याज लाग्दो रहेछ ।



साधारण ब्याज गणना गर्दा प्रत्येक वर्षका लागि मूलधन रकम एउटै हुन्छ । तर चक्रीय ब्याज गणना गर्दा प्रत्येक वर्ष मूलधन रकम परिवर्तन (दोस्रो वर्षका मूलधन रकम पहिलो वर्षको मिश्रधन, त्यस्तै तेस्रो वर्षका सावाँ रकम भनेको दोस्रो वर्षका मिश्रधन आदि) हुन्छ । एउटै सावाँको बराबर ब्याज दर र समयमा साधारण ब्याजभन्दा चक्रीय ब्याजमा धेरै ब्याज आउने रहेछ ।

क्रियाकलाप 3

वार्षिक $R\%$ ब्याज दरमा, T वर्षका लागि कुनै बैङ्कमा जम्मा गरेको मूलधन (P) छ भने तलका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

- एक वर्षको अन्त्यमा हुने ब्याज कति हुन्छ ?
- दुई वर्षको अन्त्यमा हुने ब्याज कति हुन्छ ?
- त्यसै गरी तीन वर्षको अन्त्यमा हुने ब्याज कति हुन्छ ?
- अन्त्यमा T वर्षमा हुने ब्याज कति हुन्छ ?

एक वर्षको अन्त्यमा हुने ब्याज (I_1) = $\frac{P \times T \times R}{100} = \frac{P \times 1 \times R}{100} = \frac{PR}{100}$

एक वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन (A_1) = $P_1 + I_1 = P + \frac{PR}{100} = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)$

हामीलाई थाहा छ,

एक वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन = दोस्रो वर्षको मूलधन हुन्छ ।

त्यसैले दोस्रो वर्षको मूलधन (P_2) = $P \left(1 + \frac{R}{100} \right)$

$$\begin{aligned} \text{दोस्रो वर्षको ब्याज } (I_2) &= \frac{P \left(1 + \frac{R}{100} \right) \times T \times R}{100} \\ &= \frac{P \left(1 + \frac{R}{100} \right) \times 1 \times R}{100} = P \left(1 + \frac{R}{100} \right) \times \frac{R}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{दोस्रो वर्षका अन्त्यमा हुने मिश्रधन } (A_2) &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right) + P \left(1 + \frac{R}{100} \right) \times \frac{R}{100} \\ &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right) \left(1 + \frac{R}{100} \right) \\ &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 \end{aligned}$$

त्यसै गरी दोस्रो वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन = तेस्रो वर्षका लागि मूलधन

$$\text{त्यसैले तेस्रो वर्षको लागि मूलधन } (P_3) = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2$$

$$\text{तेस्रो वर्षको ब्याज } (I_3) = \frac{P_3 \times T \times R}{100} = \frac{P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 \times 1 \times R}{100}$$

$$= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 \times \frac{R}{100}$$

तेस्रो वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन (A_3) = $P_3 + I_3$

$$= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 + \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 \times \frac{R}{100}$$

$$= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 \left(1 + \frac{R}{100} \right) = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^3$$

माथिको गणनाबाट T वर्षको अन्तमा हुने चक्रीय मिश्रधन (CA) कति हुन्छ ?

अतः T वर्षको अन्त्यमा हुने चक्रीय मिश्रधन (CA) = $P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$ हुन्छ ।

त्यसै गरी चक्रीय ब्याज (CI) = मिश्रधन (CA) – मूलधन (P)

$$CI = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - P$$

$$\text{तसर्थ } \boxed{CI = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right]} \text{ हुन्छ ।}$$

क्रियाकलाप 4

तलका अवस्थामा चक्रीय ब्याज र मिश्रधन कसरी गणना गर्ने होला ?

- (अ) प्रत्येक वर्ष ब्याज दर फरक फरक भएमा
- (आ) समय T वर्ष र M महिना भएमा
- (इ) अर्धवार्षिक रूपमा ब्याज गणना गर्नुपर्ने भएमा
- (ई) त्रैमासिक रूपमा ब्याज गणना गर्नुपर्ने भएमा

(अ) प्रत्येक वर्ष ब्याज दर फरक फरक भएमा

3 वर्षमा ब्याजको दर पहिलो वर्षको $R_1\%$, दोस्रो वर्षका $R_2\%$, तेस्रो वर्षका $R_3\%$ भएमा चक्रीय ब्याज र चक्रीय मिश्रधन कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

$$\text{चक्रीय मिश्रधन (CA)} = P \left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \left(1 + \frac{R_3}{100}\right) r$$

$$\text{चक्रीय ब्याज (CI)} = P \left[\left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \left(1 + \frac{R_3}{100}\right) - 1 \right]$$

(आ) समय 'T' वर्ष र 'M' महिनामा दिइएको छ भने चक्रीय ब्याज र चक्रीय मिश्रधन कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

$$\text{चक्रीय मिश्रधन (CA)} = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \left(1 + \frac{MR}{1200}\right)$$

$$\text{चक्रीय ब्याज (CI)} = P \left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \left(1 + \frac{MR}{1200}\right) - 1 \right]$$

(इ) अर्धवार्षिक रूपमा ब्याज गणना गर्दा

ब्याजलाई अर्धवार्षिक रूपमा गणना गर्दा, ब्याज दर $R\%$ प्रतिवर्षलाई $\frac{R}{2}\%$ प्रति अर्धवार्षिक, समय (T) लाई $2 \times T = 2T$ गरिन्छ ।

$$\text{अब चक्रीय मिश्रधन (CA)} = P \left(1 + \frac{R}{2 \times 100}\right)^{2T} = P \left(1 + \frac{R}{200}\right)^{2T} \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{चक्रीय ब्याज CI} = P \left(1 + \frac{R}{2 \times 100}\right)^{2T} - P = P \left[\left(1 + \frac{R}{200}\right)^{2T} - 1 \right] \text{ हुन्छ ।}$$

कुनै वित्तीय संस्थाले आफ्नो बचत खातामा जम्मा हुन आएको रकममा वार्षिक $R\%$ का दरले ब्याज दिन्छ र प्रत्येक वर्षको 2 पटक श्रावण 1 गते र माघ 1 गते खातामा ब्याज थप्ने काम गर्छ । यसरी पहिलो 6 महिनामा सावाँको ब्याज र अर्को 6 महिनाका लागि सावाँमा र फेरि ब्याज जोडेपछिको रकमलाई सावाँ मानेर ब्याजको गणना गरिन्छ । यस्तो ब्याजलाई अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज

भनिन्छ ।

वार्षिक र अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याजमा के कति भिन्नता छ, छलफल गर्नुहोस् ।

(ई) त्रैमासिक (3 महिनामा) ब्याज गणना गर्दा

कुनै बैङ्कमा जम्मा गरेको मूलधन र ब्याज त्रैमासिक गणना गर्ने गरिएको छ भने ब्याज दर $R\%$ लाई $\frac{R}{4}\%$ प्रति एक चौथाइ वर्ष र समय T लाई $4T$ एक चौथाइ वर्ष लेखिन्छ । यस्तो अवस्थामा,

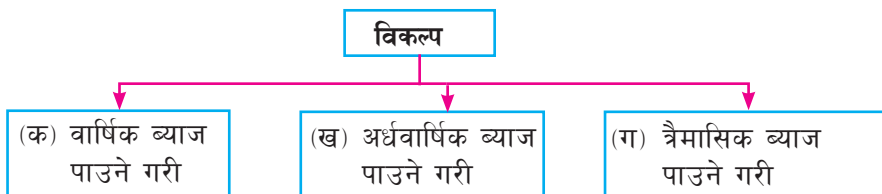
$$\text{चक्रीय मिश्रधन (CA)} = P \left(1 + \frac{R}{4 \times 100} \right)^{4T} = P \left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T}$$

$$\text{चक्रीय ब्याज (CI)} = P \left(1 + \frac{R}{4 \times 100} \right)^{4T} - P = P \left[\left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T} - 1 \right] \text{ हुन्छ ।}$$

वार्षिक र अर्धवार्षिक रूपमा ब्याज गणना गरे जसरी नै त्रैमासिक पनि गणना गरिन्छ ।

क्रियाकलाप 5

तपाईंको काकाले आफूसँग भएको रु. 1,00,000 को 15% प्रतिवर्ष ब्याज दरमा 1 वर्षका लागि चक्रीय ब्याजमा लगानी गर्ने सोच बनाउनु भएछ । वार्षिक ब्याज, अर्धवार्षिक ब्याज वा त्रैमासिक ब्याजमध्ये कुन विकल्पबाट लगानी गर्दा फाइदा होला भनी सोचिरहनुभएको छ । उहाँलाई कुन विकल्पअनुसार लगानी गर्न सुझाव दिनुहुन्छ, किन ? छलफल गर्नुहोस् ।



यहाँ मूलधन (P) = रु. 100,000 ब्याज दर (R) = 15% समय (T) = 1 वर्ष

(क) पहिलो विकल्पअनुसार,

$$\begin{aligned} \text{चक्रीय ब्याज (CI)} &= 100000 \left[\left(1 + \frac{15}{100} \right)^1 - 1 \right] \\ &= 100000 \left[\left(\frac{115}{100} \right) - 1 \right] = \text{रु. } 15,000 \end{aligned}$$

(ख) दोस्रो विकल्पअनुसार,

$$\text{चक्रीय ब्याज (CI)} = 100000 \left[\left(1 + \frac{15}{200} \right)^{2 \times 1} - 1 \right] = \text{रु. } 15,562.50$$

(ग) तेस्रो विकल्पअनुसार,

$$\text{चक्रीय ब्याज (CI)} = 100000 \left[\left(1 + \frac{15}{400} \right)^{4 \times 1} - 1 \right] = \text{रु. } 15,865.04$$

यी तीन विकल्पमध्ये तेस्रो विकल्पअनुसार लगानी गर्न सुझाव दिन्छु किनकि यो विकल्पबाट 1 वर्षपछि पाउने ब्याज अरू दुई विकल्पबाट पाउने ब्याजभन्दा धेरै छ। जसअनुसार पहिलो विकल्पभन्दा रु. 865.04 र दोस्रो विकल्पभन्दा रु. 302.54 ले चक्रीय ब्याज बढी प्राप्त हुन्छ।

एउटै मूलधनको उही ब्याज दर र उही समयमा गणना गर्दा एक चौथाइ वार्षिक चक्रीय ब्याज > अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज > वार्षिक चक्रीय ब्याज हुन्छ।

उदाहरण 1

रु. 2,000 को वार्षिक 12% ब्याज दरमा 2 वर्षपछि चक्रीय ब्याज र चक्रीय मिश्रधन कति हुन्छ ? चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउनुहोस्। (सूत्र प्रयोग नगरी)

समाधान

यहाँ,

मूलधन (P_1) = रु. 2,000

ब्याज दर (R) = 12% प्रतिवर्ष

समय (T) = 2 वर्ष

पहिलो वर्षको अन्त्यमा ब्याज (I_1) = $\frac{P_1 T R}{100} = \frac{2000 \times 1 \times 12}{100} = \text{रु. } 240$

दोस्रो वर्षका मूलधन (P_2) = पहिलो वर्षको अन्त्यको मिश्रधन = $P_1 + I_1 = \text{रु. } (2000 + 240)$
= रु. 2,240

फेरि दोस्रो वर्षका ब्याज (I_2) = $\frac{2240 \times 1 \times 12}{100} = \text{रु. } 268.8$

अतः दुई वर्षपछिको चक्रीय ब्याज (CI) = $I_1 + I_2 = 240 + 268.8 = \text{रु. } 508.8$

चक्रीय मिश्रधन (CA) = $P_1 + CI = 2000 + 508.8 = \text{रु. } 2,508.8$

उदाहरण 2

वार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार 12% प्रति वर्ष ब्याज दरले 3 वर्षका लागि रु. 25,000 सापटी लिएर ठिक 3 वर्षपछि बुझाउँदा हुन आउने चक्रीय ब्याज र चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ मूलधन (P) = रु. 25,000

ब्याज दर (R) = 12% प्रतिवर्ष

समय (T) = 3 वर्ष

चक्रीय ब्याज र मिश्रधन = ?

$$\begin{aligned}\text{सूत्रानुसार चक्रीय ब्याज (CI)} &= P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] \\ &= 25,000 \left[\left(1 + \frac{12}{100} \right)^3 - 1 \right] \\ &= 25,000 \left[\left(\frac{112}{100} \right)^3 - 1 \right] \\ &= 25,000 [1.404928 - 1] \\ &= 25,000 \times 0.404928 \\ &= 10123.20\end{aligned}$$

फेरि चक्रीय मिश्रधन (CA) = मूलधन (P) + चक्रीय ब्याज (CI)

$$= \text{रु. } 25000 + \text{रु. } 10123.20 = \text{रु. } 35,123.20$$

उदाहरण 3

एक जना मानिसले आफ्नो साथीबाट वार्षिक 12.5% साधारण ब्याज दरले रु. 32,000 ऋण लिएछ । उसले सोही ब्याज दरले चक्रीय ब्याज पाउने गरी ऋणमा लिएको सम्पूर्ण रकम एक जना पसलेलाई सापटी दिएछ । 3 वर्षपछि उसले कति रकम बढी पाउँछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

मूलधन (P) = रु. 32,000

ब्याज दर (R) = 12.5% प्रतिवर्ष

समय (T) = 3 वर्ष

साधारण ब्याज (SI) = ?

चक्रीय ब्याज (CI) = ?

$$\text{पहिलो अवस्थाअनुसार साधारण ब्याज (SI)} = \frac{P T R}{100} = \frac{32000 \times 3 \times 12.5}{100} = \text{रु. } 12,000$$

$$\text{दोस्रो अवस्थाअनुसार चक्रीय ब्याज (CI)} = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= 32,000 \left[\left(1 + \frac{12.5}{100} \right)^3 - 1 \right] \\
&= 32,000 \left[\left(\frac{112.5}{100} \right)^3 - 1 \right] \\
&= 32,000 [1.423828125 - 1] \\
&= 32,000 \times 0.423828125 \\
&= \text{रु. } 13562.50
\end{aligned}$$

उक्त मानिसले बढी पाउने रकम = CI – SI = 13562.50 – 12000 = रु.1562.50

उदाहरण 4

समिरले रु. 5,000 वार्षिक 8% का दरले 2 वर्षका लागि लगानी गर्ने निधो गरे। त्यसका लागि उनीसँग 2 ओटा सुरक्षित विकल्प छन्। पहिलो विकल्प अर्धवार्षिक रूपमा ब्याज पाउने र दोस्रो विकल्प वार्षिक रूपमा ब्याज पाउने छ। यदि तपाईंले सुझाव दिनुपर्ने भन्ने कुन विकल्पमा जाने सुझाव दिनुहन्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस्।

समाधान

यहाँ,

मूलधन (P) = रु. 5,000

ब्याज दर (R) = 8% प्रतिवर्ष

समय (T) = 2 वर्ष

(क) पहिलो विकल्पअनुसार,

$$\begin{aligned}
\text{अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज (CI}_1\text{)} &= P \left[\left(1 + \frac{R}{200} \right)^{2T} - 1 \right] \\
&= 5,000 \left[\left(1 + \frac{8}{200} \right)^{2 \times 2} - 1 \right] \\
&= 5,000 \left[\left(\frac{208}{200} \right)^4 - 1 \right] \\
&= 5,000 [1.16985856 - 1] \\
&= 5,000 \times 0.16985856 \\
&= \text{रु. } 849.29
\end{aligned}$$

(ख) दोस्रो विकल्पअनुसार,

$$\begin{aligned}\text{वार्षिक चक्रीय ब्याज (CI}_2\text{)} &= P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] \\ &= 5000 \left[\left(1 + \frac{8}{100} \right)^2 - 1 \right] \\ &= 5000 \left[\left(\frac{108}{100} \right)^2 - 1 \right] \\ &= 5000 [(1.08)^2 - 1] \\ &= 5000 (1.1664 - 1) \\ &= 5000 \times 0.1664 \\ &= \text{रु. 832}\end{aligned}$$

अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज र वार्षिक चक्रीय ब्याजमा फरक,

$$CI_1 - CI_2 = \text{रु. 849.29} - \text{रु. 832} = \text{रु. 17.29}$$

अतः अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार रु. 17.29 बढी प्राप्त हुने हुनाले दिइएको पहिलो विकल्पअनुसार लगानी गर्न सुभाब दिन्छु।

उदाहरण 5

कक्षा 12 पढ्दै गरेको विद्यार्थीले रु. 10,000 वार्षिक चक्रीय ब्याज दरमा 2 वर्षका लागि लगानी गरेछन्। एक वर्षको अन्त्यमा चक्रीय मिश्रधन रु. 11,200 हुन्छ भने,

(क) वार्षिक चक्रीय ब्याज दर पत्ता लगाउनुहोस्।

(ख) दोस्रो वर्षका अन्त्यमा चक्रीय मिश्रधन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

(क) यहाँ, मूलधन (P) = रु. 10,000

पहिलो वर्षको अन्त्यमा चक्रीय मिश्रधन (CA) = रु. 11,200

समय (T_1) = 1 वर्ष

$$\text{सूत्रानुसार (CA)} = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } 11200 = 10000 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^1$$

$$\text{अथवा, } \frac{11200}{10000} = 1 + \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } 1.12 = 1 + \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } 0.12 \times 100 = R$$

$$\text{अथवा, } R = 12\%$$

अतः वार्षिक चक्रीय ब्याज दर (R) = 12%

(ख) दोस्रो वर्षका अन्त्यमा मिश्रधन (CA) = ?

जम्मा समय (T) = 2 वर्ष

$$\begin{aligned}\text{चक्रीय मिश्रधन (CA)} &= P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \\ &= 10,000 \left(1 + \frac{12}{100}\right)^2 \\ &= 10,000 \left(\frac{112}{100}\right)^2 \\ &= \text{रु. } 12,544\end{aligned}$$

अतः दोस्रो वर्षका अन्तिममा हुने चक्रीय मिश्रधन = रु. 12,544

उदाहरण 6

रु. 2,00,000 लाई पहिलो वर्षका लागि 8% प्रतिवर्ष दोस्रो वर्षका लागि 10% प्रतिवर्ष र तेस्रो वर्षका लागि 12% प्रतिवर्ष ब्याज दर निर्धारण गरी लगानी गर्दा तीन वर्षपछिको चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ मूलधन (P) = रु. 2,00,000

समय (T) = 3 वर्ष

पहिलो वर्षको ब्याज दर (R_1) = 8% प्रतिवर्ष

दोस्रो वर्षका ब्याज दर (R_2) = 10% प्रतिवर्ष

तेस्रो वर्षको ब्याज दर (R_3) = 12% प्रतिवर्ष

चक्रीय मिश्रधन (CA) = ?

चक्रीय ब्याज (CI) = ?

$$\begin{aligned}\text{अब सूत्रानुसार चक्रीय मिश्रधन (CA.)} &= P \left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \left(1 + \frac{R_3}{100}\right) \\ &= 200000 \left(1 + \frac{8}{100}\right) \left(1 + \frac{10}{100}\right) \left(1 + \frac{12}{100}\right) \\ &= 200000 \left(\frac{108}{100}\right) \left(\frac{110}{100}\right) \left(\frac{112}{100}\right) \\ &= \text{रु. } 2,66,112\end{aligned}$$

चक्रीय ब्याज (CI) = चक्रीय मिश्रधन (CA) – मूलधन (P)

$$\begin{aligned}\text{तसर्थ चक्रीय ब्याज (CI)} &= \text{रु. } 2,66,112 - \text{रु. } 200000 \\ &= \text{रु. } 66,112\end{aligned}$$

उदाहरण 7

निश्चित वार्षिक चक्रीय ब्याज दरले कुनै धनको मिश्रधन 2 वर्षमा रु. 14,520 र 3 वर्षमा रु. 15,972 हुन्छ भने,

(क) ब्याज दर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) मूलधन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ मानौं ब्याज दर (R) = R%, मूलधन (P) =Rs. x

पहिलो अवस्थाअनुसार,

चक्रीय मिश्रधन (CA₁) = रु. 14,520

समय (T) = 2 वर्ष

सूत्रानुसार चक्रीय मिश्रधन (CA₁) = $P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$

$$\text{रु. } 14,520 = x \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 \dots\dots\dots(i)$$

दोस्रो अवस्थाअनुसार,

चक्रीय मिश्रधन (CA₂) = रु. 15,972

समय (T) = 3 वर्ष

फेरि (CA₂) = $P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$

$$\text{रु. } 15,972 = x \left(1 + \frac{R}{100} \right)^3 \dots\dots\dots(ii)$$

समीकरण (ii) लाई (i) ले भाग गर्दा,

$$\text{अथवा, } \frac{15,972}{14,520} = \frac{x \left(1 + \frac{R}{100} \right)^3}{x \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2}$$

$$\text{अथवा, } 1.10 = 1 + \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } 1.10 - 1 = \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } 0.10 \times 100 = R$$

$$\text{अथवा, } R = 10\%$$

तसर्थ, ब्याज दर = 10% प्रतिवर्ष

फेरि $R = 10\%$ समीकरण (i) मा राख्दा

$$14520 = x \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2$$

अथवा, $14520 = x \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$

अथवा, $14520 = x \times 1.21$

अथवा, $\frac{14520}{1.21} = x$

$x = 12000$

अतः मूलधन (P) = रु. 12,000

वैकल्पिक तरिका

2 वर्षको मिश्रधन (CA₁) = रु. 14,520

अथवा, $P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = \text{रु. } 14,520$

$x \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = \text{रु. } 14,520 \dots\dots\dots(i)$

फेरि 3 वर्षको मिश्रधन (CA₂) = रु. 15,972

अथवा, $P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3 = \text{रु. } 15,972$

अथवा, $x \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3 = 15,972$

अथवा, $x \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 \left(1 + \frac{R}{100}\right) = 15,972$

$14,520 \left(1 + \frac{R}{100}\right) = 15,972$ [समीकरण (i) बाट]

अथवा, $\left(1 + \frac{R}{100}\right) = \frac{15,972}{14,520}$

अथवा, $1 + \frac{R}{100} = 1.10$

अथवा, $\frac{R}{100} = 1.10 - 1$

अथवा, $R = 0.10 \times 100$

$R = 10\%$ प्रतिवर्ष

R को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$x \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = \text{रु. } 14,520$$

$$\text{अथवा, } x \left(\frac{110}{100}\right)^2 = 14,520$$

$$\text{अथवा, } x \times 1.21 = 14,520$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{14,520}{1.21}$$

$$\text{अथवा, } x = 12,000$$

$$\text{अतः मूलधन (P) = रु. } 12,000$$

ब्याज दर (R) = 10% प्रतिवर्ष

उदाहरण 8

एक जना व्यक्तिले, विकास बैङ्कमा रु. 2,00,000 दुई वर्षका लागि प्रति वर्ष 10% को दरमा पाएको ब्याजमा 5% कर कट्टी हुने गरी अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज पाउने गरी जम्मा गरेछन्। तर ठिक एक वर्षपछि बैङ्कले नीति परिवर्तन गरी सोही ब्याज दरमा त्रैमासिक चक्रीय ब्याज दिने निर्णय गरेछ भने

- (क) कर कट्टी गरी पहिलो वर्षको ब्याज रकम पत्ता लगाउनुहोस्।
- (ख) कर कट्टी गरी दोस्रो वर्षका ब्याज रकम कति होला ?
- (ग) कर कट्टी गरी पहिलो र दोस्रो वर्षको ब्याज रकममा कति फरक छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
- (घ) कर कट्टी गरी पहिलो वर्षको र दोस्रो वर्षको ब्याज रकममा कति प्रतिशतले फरक परेछ ? हिसाब गरी गणना गर्नुहोस्।

समाधान

यहाँ मूलधन (P) = रु. 2,00,000

ब्याज दर (R) = 10% प्रतिवर्ष

(क) पहिलो वर्षका लागि, अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार

$$\begin{aligned} CI_1 &= P \left[\left(1 + \frac{R}{200}\right)^{2T} - 1 \right] \\ &= 200000 \left[\left(1 + \frac{10}{200}\right)^{2 \times 1} - 1 \right] \\ &= 2,00,000 \left[\left(\frac{210}{200}\right)^2 - 1 \right] \\ &= 2,00,000 [1.1025 - 1] \\ &= 2,00,000 \times 0.1025 = \text{रु. } 20,500 \end{aligned}$$

$$5\% \text{ कर कट्टीको रकम} = \text{रु. } 20,500 - \text{रु. } 20,500 \times \frac{5}{100} = \text{रु. } 1,025$$

$$= \text{रु. } 20500 - \text{रु. } 1025 = \text{रु. } 19,475$$

अतः कर कट्टी गरी पहिलो वर्षको ब्याज रकम $(CI_1) = \text{रु. } 19,475$

(ख) एक वर्षपछिको चक्रीय मिश्रधन $(CA) = \text{रु. } 2,00,000 + \text{रु. } 19,475 = \text{रु. } 2,19,475$

अब दोस्रो वर्षका लागि मूलधन $(P) = \text{एक वर्षपछिको चक्रीय मिश्रधन} = \text{रु. } 2,19,475$

$$\text{एक चौथाइ वार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार, } (CI_2) = P \left[\left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T} - 1 \right]$$

$$= 2,19,475 \left[\left(1 + \frac{10}{400} \right)^{4 \times 1} - 1 \right]$$

$$= 2,19,475 [0.1038128906]$$

$$= 22,784.33$$

$$= \text{रु. } 22,784.33$$

फेरि 5%कर कट्टीको रकम $= 22,784.33 \times \frac{5}{100} = \text{रु. } 1139.21$

$$\text{कर कट्टीपछिको ब्याज रकम } (CI_2) = 22,784.33 - 1,139.21$$

$$= \text{रु. } 21,645.12$$

∴ कर कट्टीपछि दोस्रो वर्षका ब्याज रकम रु. 21,645.12

$$\text{(ग) ब्याज रकममा फरक} = CI_2 - CI_1 = 21,645.12 - 19,475$$

$$= \text{रु. } 2170.12$$

$$\text{(घ) ब्याज रकमको फरक (प्रतिशतमा)} = \frac{CI_2 - CI_1}{CI_1} \times 100\%$$

$$= \frac{2170.12}{19475} \times 100\% = 11.14\%$$

अतः पहिलो वर्षको ब्याजभन्दा दोस्रो वर्षको ब्याज 11.14% ले बढी पाउने रहेछ ।

उदाहरण 9

वाणिज्य बैंडकले रु. 52,500 बाबुलाल र जीवलाललाई वार्षिक 10% चक्रीय ब्याज दरमा ऋण प्रवाह गरेछ बाबुलालले 2 वर्षपछि बैंडकलाई बुझाएको चक्रीय मिश्रधन र जीवलालले 3 वर्षपछि बुझाएको चक्रीय मिश्रधन बराबर रहेछ भने उनीहरूले बैंडकबाट कति कति रकम ऋण लिएका रहेछन् ?

समाधान

मानौं बाबुलालले ऋण लिएको रकम $(P_1) = रु. x$

त्यसैले, जीवलालले ऋण लिएको रकम $(P_2) = रु. (52,500 - x)$

यहाँ बाबुलालले 2 वर्षपछि बुझाउनु पर्ने चक्रीय मिश्रधन

$$\begin{aligned} CA_1 &= P_1 \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \\ &= x \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 \\ &= x \left(\frac{110}{100}\right)^2 \\ &= 1.21x \end{aligned}$$

त्यस्तै जीवलालले 3 वर्षपछि बुझाउनुपर्ने चक्रीय मिश्रधन

$$\begin{aligned} CA_2 &= P_2 \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \\ &= (52500 - x) \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 \\ &= (52500 - x) \left(\frac{110}{100}\right)^3 \\ &= (52500 - x) 1.331 \\ &= 69877.5 - 1.331x \end{aligned}$$

अब प्रश्नअनुसार,

$$CA_1 = CA_2$$

$$1.21x = 69877.5 - 1.331x$$

$$\text{अथवा, } 1.21x + 1.331x = 69877.5$$

$$\text{अथवा, } 2.541x = 69877.5$$

$$\therefore x = 27,500$$

अतः बाबुलालले रु. 27,500 र जीवलालले रु. $(52,500 - 27,500) = रु. 25,000$ ऋण लिएका रहेछन् ।

अभ्यास 2.1

1. परिभाषित गर्नुहोस् :

- (क) वार्षिक चक्रीय ब्याज
- (ख) अर्ध वार्षिक चक्रीय ब्याज
- (ग) त्रैमासिक चक्रीय ब्याज

2. (क) वार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार, मूलधन (P) वार्षिक चक्रीय ब्याज दर (R) र समय (T) भए चक्रीय मूलधन (CA) पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

- (ख) कुनै धन P को T वर्षमा वार्षिक R% को दरले चक्रीय ब्याज (CI) हुन्छ भने P, T, R र CI को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।
- (ग) कर्मचारी सञ्चयकोषले देशको आर्थिक तरलताअनुसार प्रतिवर्ष ब्याज दरमा परिवर्तन गर्ने गर्छ । सोहीअनुसार कुनै धन (P) को पहिलो, दोस्रो र तेस्रो वर्षका ब्याज दरहरू क्रमशः $R_1\%$, $R_2\%$, $R_3\%$ अनुसार चक्रीय मिश्रधन (CA) हुन्छ भने (CA) पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

3. चक्रीय ब्याजको सूत्र प्रयोग नगरी तल दिइएको अवस्थामा वार्षिक चक्रीय ब्याज र चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् :

- (क) मूलधन (P) = रु. 10,000 समय, (T) = 2 वर्ष र ब्याज दर (R) = 6% प्रतिवर्ष
- (ख) मूलधन (P) = रु. 64,000 समय, (T) = 3 वर्ष र ब्याज दर (R) = 6% प्रतिवर्ष
- (ग) मूलधन (P) = रु. 20,000 समय, (T) = 2 वर्ष, पहिलो वर्षको ब्याज दर (R_1) = 10%, प्रतिवर्ष र दोस्रो वर्षका ब्याज दर (R_2) = 12%, प्रतिवर्ष

4. (क) कति प्रतिशत चक्रीय ब्याजका दरले रु. 100 को 1 वर्षको चक्रीय ब्याज रु. 12 हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

- (ख) कति प्रतिशत चक्रीय ब्याजको दरले रु. 200 को 2 वर्षको चक्रीय ब्याज रु. 42 हुन्छ, पत्ता लगाउनहोस् ।

5. (क) एक कृषकले कुखुरा पालनका लागि रु. 20,000 एक सहकारीबाट 15% प्रतिवर्ष ब्याज दरमा 3 वर्षका लागि कर्जा लिएछन् । 3 वर्षपछिको वार्षिक चक्रीय ब्याज र चक्रीय मिश्रधन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ख) एक शिक्षकले रु. 50,000 आफ्नो छोरीको नाममा बैङ्कमा जम्मा गरे । यदि बैङ्कले वार्षिक 10% ब्याज दर प्रदान गर्छ भने 3 वर्षपछिको चक्रीय ब्याज र मिश्रधन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ग) सविताले रु. 1,50,000 बैङ्कमा जम्मा गरिन् । यदि बैङ्कले वार्षिक 6% ब्याज दर प्रदान गर्छ भने 2 वर्ष 5 महिनापछिको उनले प्राप्त गर्ने,

(अ) चक्रीय मिश्रधन कति हुन्छ ?

(आ) चक्रीय ब्याज कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (क) मनिपाले वार्षिक चक्रीय ब्याज 8% ले रु. 50,000 बैङ्कमा जम्मा गरिन् । यदि बैङ्कले अर्धवार्षिक हिसाबले चक्रीय ब्याज दिने रहेछ भने 2 वर्षपछि उनले पाउने मिश्रधन र चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) एउटा बैङ्कले त्रैमासिक वार्षिक हिसाबले चक्रीय ब्याज दिन्छ । सुनिलले रु. 50,00,000 वार्षिक 12%, ब्याज पाउने गरी 1 वर्षका लागि जम्मा गरे भने मिश्रधन र चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. (क) कर्मा गुरुङले वार्षिक चक्रीय ब्याज 8% को दरले रु. 80,000 एउटा बैङ्कमा जम्मा गरेछन् । 2 वर्षपछि सो रकमको साधारण ब्याज र वार्षिक चक्रीय ब्याजको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) रु. 7,500 को वार्षिक 12% ब्याज दरले 3 वर्षमा हुने साधारण ब्याज र वार्षिक चक्रीय ब्याजको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. (क) छिरिङले वार्षिक चक्रीय ब्याज 6% ले रु. 40,000 एउटा बैङ्कमा जम्मा गरेका रहेछन् भने 2 वर्षमा सोको वार्षिक र अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याजको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) रु. 18,000 को 1 वर्षमा 12% वार्षिक ब्याज दरले हुने अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज र त्रैमासिक चक्रीय ब्याजको अन्तर कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) तपाईं 2 वर्षका लागि रु. 60,000 कुनै बैङ्कमा जम्मा गर्न जानु भएको थियो । बैङ्कको सूचना पाटीमा भएको जानकारी तल दिइएको छ :

| बैङ्कको निक्षेप सङ्कलनको ब्याज सम्बन्धमा सूचना | |
|--|---------------------------------------|
| मिति 2079-01-01 देखि लागु हुने गरी दुई किसिमका नयाँ मुद्दती खाता सञ्चालनमा आएका छन् समयमा मुद्दती खातामा रकम जम्मा गरी मौकाको फाइदा उठाउनुहोस् । | |
| मुद्दती खाता (P) | मुद्दती खाता (Q) |
| अर्ध वार्षिक चक्रीय ब्याज दर 10% प्रतिवर्ष | वार्षिक चक्रीय ब्याज दर 12% प्रतिवर्ष |

- (अ) मुद्दती खाता (P) मा 2 वर्षमा कति ब्याज प्राप्त हुन्छ ?
- (आ) मुद्दती खाता (Q) बाट 2 वर्षमा कति ब्याज प्राप्त हुन्छ ?
- (इ) दुवै विकल्पबाट प्राप्त हुने ब्याज थाहा पाइसकेपछि तपाईं कुन विकल्पअनुसार पैसा जम्मा गर्नुहुन्छ, किन ?
9. (क) प्रतिवर्ष 15% ब्याज दरले 2 वर्षमा हुने रकमको वार्षिक चक्रीय ब्याज साधारण ब्याजभन्दा रु. 180 ले बढी हुन आउँछ भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) वार्षिक 10% का दरले कुनै धनराशिको हुने अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज सोही अवधिमा उही दरले हुन आउने वार्षिक चक्रीय ब्याजभन्दा रु. 40 ले बढी हुन्छ भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ग) सुप्रिमले वार्षिक चक्रीय ब्याज दर 10% का दरले दुई वर्षका लागि केही रुपियाँ सापटी लियो र तुरुन्तै उसले अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज दरमा सोही दरले उतिनै समयका निम्ति सापटी दियो । यो सिलसिलामा उसले रु. 2019.24 नाफा गच्यो भने कति रुपियाँ सापटी लिएको थियो होला, पत्ता लगाउनहोस् ।
- 10.** (क) कति समयमा वार्षिक 10% चक्रीय ब्याज दरमा मूलधन रु. 1,00,000 को मिश्रधन रु. 1,21,000 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) वार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार प्रतिवर्ष 5% ब्याज दरले कति समयमा रु. 8,00,000 को चक्रीय ब्याज रु. 1,26,100 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) कति प्रतिशत चक्रीय ब्याज दरले 2 वर्षमा रु. 700 को मिश्रधन रु. 847 हुन्छ होला ?
- (घ) वार्षिक कति प्रतिशत चक्रीय ब्याज दरले रु. 3,43,000 को 3 वर्षमा चक्रीय ब्याज रु. 1,13,533 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 11.** (क) वार्षिक चक्रीय ब्याज दरमा कुनै रकम 2 वर्षमा रु. 6,050 र 3 वर्षमा रु. 6,655 हुन्छ भने,
- (अ) चक्रीय ब्याज दर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (आ) मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) कुनै रकमको वार्षिक चक्रीय ब्याज दरले 2 वर्ष र 3 वर्षको मिश्रधन क्रमशः रु. 10,580 र रु. 12,167 हुन्छ भने,
- (अ) चक्रीय ब्याज दर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (आ) मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- 12.** (क) एक जना व्यक्तिले, कमर्सियल बैङ्कमा रु. 5,00,000 पाएको ब्याजमा दुई वर्षका लागि प्रति वर्ष 10% को दरमा अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज पाउने गरी जम्मा गरेछन् । नियमअनुसार पाएको ब्याजमा 5% कर लाग्छ । तर ठिक एक वर्षपछि बैङ्कले नीति परिवर्तन गरी सोही ब्याज दरमा त्रैमासिक चक्रीय ब्याज दिने निर्णय गरेछ भने,
- (अ) कर कट्टीपछि पहिलो वर्षको ब्याज रकम पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (आ) कर कट्टी गरिसकेपछि दोस्रो वर्षको ब्याज रकम कति होला ?
- (इ) कर कट्टीपछि पहिलो र दोस्रो वर्षको ब्याज रकममा कति फरक छ ?
- (ई) कर कट्टीपछि पहिलो वर्षको र दोस्रो वर्षको ब्याज रकममा कति प्रतिशतले फरक पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) एक जना व्यक्तिले दुई वर्षका लागि कुनै सहकारी संस्थामा रु. 80,000 प्रति वर्ष 15% को दरमा पाएको ब्याजमा 5% कर कट्टी गर्ने गरी वार्षिक चक्रीय ब्याज पाउने गरी जम्मा गरेछन् । तर ठिक एक वर्षपछि सहकारी संस्थाले नीति परिवर्तन गरी सोही ब्याज दरमा अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याज दिने निर्णय गरेछ । कर कट्टीपछि पहिलो वर्षको र दोस्रो

वर्षका ब्याज रकममा कति प्रतिशतले फरक परेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. (क) रामले रु. 41,000 दुई भागमा विभाजन गरी आफ्ना दुई छोरीका नाममा वार्षिक 5% चक्रीय ब्याज पाउने गरी 2 वर्ष र 3 वर्षका लागि कुनै बैङ्कमा जम्मा गरिदिएछन् । उनीहरूले 2 वर्ष र 3 वर्षपछि पाउने मिश्रधन बराबर हुन्छ भने प्रत्येकले कति कति रकम पाएका रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) रु. 21,000 लाई दुई भागमा विभाजन गर्नुहोस् । जसअनुसार 10% वार्षिक चक्रीय ब्याज दरले पहिलो भागको 3 वर्षको मिश्रधन र दोस्रो भागको 2 वर्षको मिश्रधन बराबर हुन्छ भने पहिलो भाग र दोस्रो भागमा कति कति रकम पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
14. (क) वार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार 1 वर्ष र 2 वर्षमा कुनै रकमको चक्रीय ब्याज क्रमशः रु. 450 र रु. 945 पुग्दछ भने ब्याज दर र मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) कुनै रकमको वार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार एक वर्ष र दुई वर्षको चक्रीय ब्याज क्रमशः रु. 1,800 र रु. 3,816 हुन्छ भने चक्रीय ब्याज दर र मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

खुला प्रश्न

- एउटै दरमा चक्रीय ब्याज र साधारण ब्याज दिँदा कुन कुन अवस्थामा साधारण ब्याज बढी हुन सक्छ ? आफ्नो उत्तर लेख्नुहोस् ।
- बैङ्कले किन चक्रीय ब्याज लिन्छ ? यसबाट बचतकर्ता र ऋणीलाई कस्तो प्रभाव पर्छ ? लेख्नुहोस् ।
- बैङ्कले साधारण ब्याजमा ऋण नै दिँदैन भनिन्छ । के सहमत हुनुहुन्छ ? उदाहरणसहित तर्क दिनुहोस् ।
- बैङ्कले बचतकर्तालाई ब्याज दिएको रकममा पनि कर लगाउँछ । त्यस्तो किन गरेको होला ? प्रष्ट पार्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

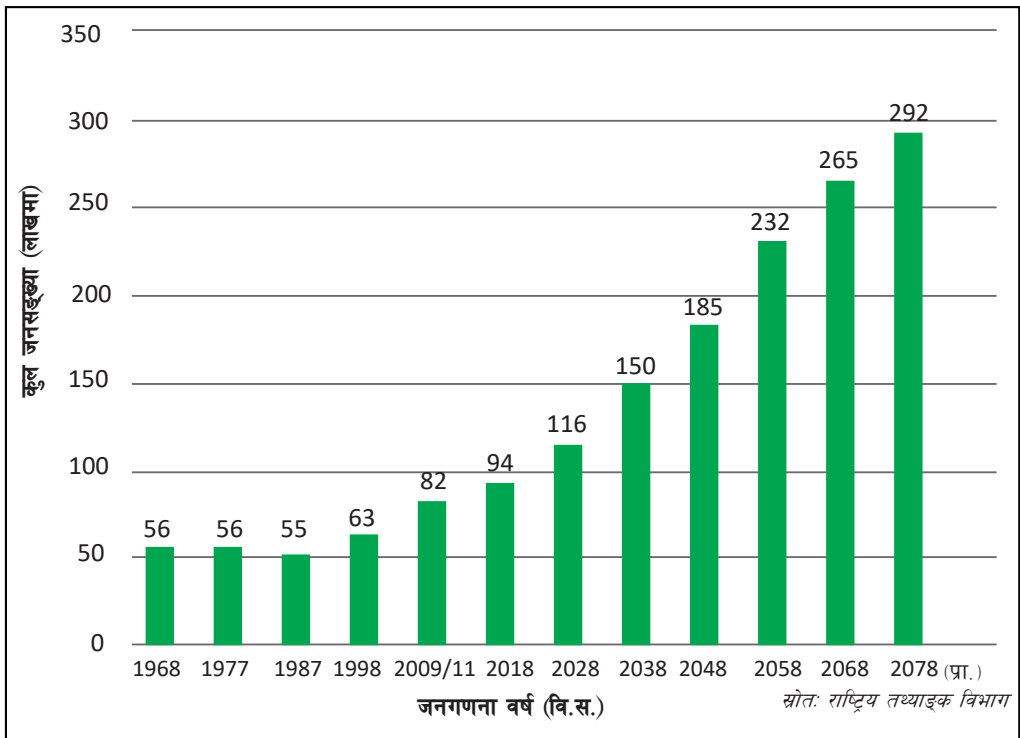
आफ्नो टोलछिमेकमा रहेका बैङ्क वित्तीय संस्था वा सहकारीमा जानुहोस् । तपाईं गएको संस्थाको प्रमुख वा सूचना अधिकारी वा जानकारी गराउने जो सुकै व्यक्तिलाई भेटी विभिन्न किसिमका योजनाको बारेमा जानकारी लिनुहोस् । यदि सो संस्थाको ब्रोसर पाउनु भयो भने त्यसमा भएका विभिन्न किसिमका योजनाको बारेमा अध्ययन गर्नुहोस् । आफ्नो आमा बुबा वा घरको अरु कोही सदस्यले निश्चित रकम बचत गर्न खोज्नु भएको छ भने कुन चाहिँ उपयुक्त हुन्छ भनी सल्लाह दिनुहुन्छ र किन ? आफ्ना तर्क समेटी एउटा रिपोर्ट तयार गर्नुहोस् । प्रतिवेदन तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. (क) रु. 1,236 र रु. 11,236 (ख) रु. 12,225.02 र रु. 76,225.02
 (ग) रु. 4,640 र रु. 24,640
4. (क) 12% (ख) 10%
5. (क) रु. 10,417.50 र रु. 30417.50 (ख) रु. 16,550 र रु. 66,550
 (ग) रु. 1,72,753.50 र रु. 22,753.50
6. (क) रु. 58492.93 र रु. 8492.93 (ख) रु. 5627,544.05 र रु. 627, 544.05
7. (क) रु. 512 (ख) रु. 336.96
8. (क) रु. 76.35 (ख) रु. 34.36 (ग) (अ) रु. 12930.37
 (आ) रु. 15264 (इ) रु. 2333.62 बढी ब्याज खाता (Q) मा हुन्छ
9. (क) रु. 8,000 (ख) रु. 16,000 (ग) रु. 366717.82
10. (क) 2 वर्ष (ख) 3 वर्ष (ग) 10% (घ) 10%
11. (क) (अ) 10% (आ) रु. 5,000
 (ख) (अ) 15% (आ) रु. 8,000
12. (क) (अ) रु. 48,687.5 (आ) 54112.79
 (इ) 5425.2936 (ई) 11.14% (ख) 18.53%
13. (क) रु. 21,000 र रु. 20,000 (ख) रु. 10,000 र रु. 11,000
14. (क) 10% र रु. 4,500 (ख) 12% र रु. 15,000

वृद्धि र ह्रास (Growth and Depreciation)

3.0 पुनरवलोकन (Review)

नेपालमा वि.स. 1968 (सन् 1911) सालदेखि जनगणना गर्ने काम सुरु भएको र त्यसपछि लगभग प्रत्येक 10/10 वर्षको अन्तरमा जनगणना हुँदै आएको छ । तल दिइएको तालिकामा वि.स. 1968 सालदेखि वि.स. 2078 सालको प्रारम्भिक जनगणनाको नतिजालाई प्रस्तुत गरिएको छ । दिइएको तालिकाका आधारमा तलका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :



- नेपालको जनसङ्ख्या वि.स. 1968 मा कति थियो ?
- नेपालको जनसङ्ख्या वि.स. 2078 (प्रारम्भिक) मा कति पुग्यो ?
- माथिको तालिकाअनुसार कुन कुन सालमा कति कति सङ्ख्याले जनसङ्ख्या घटेको छ वा बढेको छ, छलफल गर्नुहोस् ।
- वि.स. 2068 सालको जनसङ्ख्यालाई आधार मान्दा वि.स. 2078 मा कति प्रतिशतले जनसङ्ख्या वृद्धि भएको रहेछ ?

- (ड) वि.स. 1977 सालको जनसङ्ख्यालाई आधार मान्दा वि.स. 1987 मा कति प्रतिशतले जनसङ्ख्यामा कम भएको रहेछ ?
- (च) प्रत्येक जनगणनामा अगिल्लो जनगणनाभन्दा कतिले जनसङ्ख्या वृद्धि वा कमी भएको छ, गणना गर्नुहोस् ।
- (छ) हाम्रो दैनिक जीवनमा यस्तै वृद्धिका थप उदाहरण के के हुन्छन् ? सूची तयार गर्नुहोस् ।

3.1.1 वृद्धि (Growth)

क्रियाकलाप 1

वि.स. 2078 सालको जनगणनाअनुसार कुनै नगरपालिकाको जनसङ्ख्या 25,000 थियो । यदि सो जनसङ्ख्या प्रत्येक वर्ष 2% ले वृद्धि हुन्छ भने,

- (क) वि.स. 2079 सालमा सो नगरपालिकाको जनसङ्ख्या कति हुन्छ ?
- (ख) वि.स. 2080 सालमा सो नगरपालिकाको जनसङ्ख्या कति हुन्छ ?
- (ग) के जनसङ्ख्या वृद्धि पनि चक्रीय ब्याजको गणना प्रक्रियासँग समान हुन्छ ?

यहाँ वि.स. 2078 सालको सो नगरपालिकाको जनसङ्ख्या = 25,000

$$\begin{aligned} \text{वि.स. 2079 सालमा सो नगरपालिकाको जनसङ्ख्या} &= 25,000 + 25,000 \text{ को } 2\% \\ &= 25,000 + 25,000 \times \frac{2}{100} = 25,500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{फेरि वि.स. 2080 सालमा सो नगरपालिकाको जनसङ्ख्या} &= 25,500 + 25,500 \text{ को } 2\% \\ &= 25,500 + 25,500 \times \frac{2}{100} = 26,010 \end{aligned}$$

वि.स. 2078 को जनसङ्ख्या (P) = 25,000

जनसङ्ख्या वृद्धिदर (R) = 2%

समय (T) = 2 वर्ष

2 वर्षपछिको जनसङ्ख्या (P_2) = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ } P_T &= P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \\ &= 25000 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 \\ &= 25000 \times \left(\frac{51}{50}\right)^2 \\ &= 26,010 \end{aligned}$$

के माथिको अवस्थामा चक्रीय ब्याजको सूत्र प्रयोग गर्न सकिएला ?



यदि बाहिरी कुनै अवस्थाले असर नगरेमा कुनै ठाउँको जनसङ्ख्या एउटा निश्चित दरमा बढिरहेको हुन्छ । यसलाई जनसङ्ख्याको वृद्धिदर भनिन्छ भने बढेको जनसङ्ख्यालाई वृद्धि भएको जनसङ्ख्या भनिन्छ । जनसङ्ख्या वृद्धिसम्बन्धीका समस्यालाई चक्रीय व्याज प्रणालीसँग तुलना गरेर समाधान गर्न सकिन्छ ।

$$T \text{ वर्षपछिको जनसङ्ख्या } (P_T) = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$$

$$T \text{ वर्षपछिको बढेको जनसङ्ख्या} = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right]$$

यहाँ P = सुरुको वर्षको जनसङ्ख्या

R = जनसङ्ख्याको वृद्धिदर

T = समय

तर चक्रीय व्याजमा,

P ले मूलधनलाई, R ले व्याज दरलाई र T ले समयलाई जनाइन्छ ।

जनसङ्ख्या वृद्धिलाई बसाइँसराइ र मृत्यु जस्ता कुराले असर गर्छ ।

यदि प्रत्येक वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर फरक फरक भएमा T वर्षपछिको जनसङ्ख्या,

$$(P_T) = P \left(1 + \frac{R_1}{100} \right) \left(1 + \frac{R_2}{100} \right) \left(1 + \frac{R_3}{100} \right) \dots \left(1 + \frac{R_T}{100} \right) \text{ हुन्छ । जहाँ } R_1, R_2,$$

R_3, \dots, R_T ले क्रमशः प्रथम वर्ष, दोस्रो वर्ष, तेस्रो वर्ष, गर्दै T औँ वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदरलाई जनाउँछ ।

उदाहरण 1

कुनै एउटा सहरको वि.स.2078 को सुरुमा जनसङ्ख्या 50,000 थियो । यदि वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर 2% प्रति वर्ष थियो भने वि.स. 2080 को सुरुमा जनसङ्ख्या कति होला ? गणना गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ सहरको सुरुको जनसङ्ख्या $(P) = 50,000$

जनसङ्ख्या वृद्धि दर $(R) = 2\%$ प्रतिवर्ष

समय $(T) = \text{वि.स. 2080} - \text{वि.स. 2078} = 2$ वर्ष

वि.स. 2080 को सुरुमा जनसङ्ख्या $(P_T) = ?$

$$\text{हामीलाई थाहा छ } P_T = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$$

$$= 50,000 \left(1 + \frac{2}{100} \right)^2$$

$$50,000 \left(\frac{102}{100} \right)^2 = 50,000 \times 1.0404 = 52,020$$

अतः वि.स. 2080 को सुरुमा जनसङ्ख्या 52,020 हुन्छ ।

उदाहरण 2

दुई वर्ष अगाडि काठमाडौँमा 25 किलोग्रामको एक बोरा जिरा मसिनो चामलको मूल्य रु. 1,300 पर्दथ्यो ।
वार्षिक 5% मूल्य वृद्धि दर भएमा उक्त चामलको मूल्य अहिले कतिले बढ्यो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ जिरा मसिनो चामलको सुरुको मूल्य (P) = रु. 1300

मूल्य वृद्धि दर (R) = 5% प्रति वर्ष

समय (T) = 2 वर्ष

बढेको मूल्य = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ बढेको मूल्य} &= P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] \\ &= \text{रु.} 1300 \left[\left(1 + \frac{5}{100} \right)^2 - 1 \right] \\ &= \text{रु.} 1300 \left[\left(1 + \frac{105}{100} \right)^2 - 1 \right] \\ &= \text{रु.} 1300 \times 0.1025 \\ &= \text{रु.} 133.25 \end{aligned}$$

अतः एक बोरा जिरा मसिनो चामलको बढेको मूल्य रु.133.25 रहेछ ।

उदाहरण 3

एउटा फोटोकपी मेसिनको मूल्य 2 वर्षमा रु. 1,00,000 बाट बढेर रु. 1,21,000 भयो भने वार्षिक मूल्य वृद्धिदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ फोटोकपी मेसिनको सुरुको मूल्य (P) = रु. 1,00,000

समय (T) = 2 वर्ष

फोटोकपी मेसिनको अहिलेको मूल्य (P_T) = रु. 1,21,000

मूल्यवृद्धि दर (R) = ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ } P_T = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, रु. } 1,21,000 = \text{रु. } 1,00,000 \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } \frac{121000}{100000} = \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } \left(\frac{11}{10}\right)^2 = \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } \frac{11}{10} = 1 + \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } \frac{11}{10} - 1 = \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } \frac{11-10}{10} = \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } \frac{1}{10} \times 100 = R$$

$$\therefore R = 10\%$$

अतः मेसिनको मूल्यवृद्धि दर (R) = 10% प्रतिवर्ष रहेछ ।

उदाहरण 4

एउटा आधारभूत विद्यालयको हालको विद्यार्थी सङ्ख्या 500 छ । प्रत्येक वर्ष 20% को दरले विद्यार्थी सङ्ख्या बढ्दा कति वर्षमा विद्यार्थी सङ्ख्या 720 पुग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

अहिलेको विद्यार्थी सङ्ख्या (P) = 500

वृद्धि दर (R) = 20% प्रतिवर्ष

समय (T) = T वर्ष

T वर्षपछिको विद्यार्थी सङ्ख्या (P_T) = 720

$$\text{हामीलाई थाहा छ } P_T = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } 720 = 500 \left(1 + \frac{20}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } \frac{720}{500} = \left(1 + \frac{20}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } \frac{720}{500} = \left(\frac{120}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } \frac{36}{25} = \left(\frac{6}{5}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^T$$

$\Rightarrow T = 2$ वर्ष [∵ आधार एउटै हुँदा घाताङ्क बराबर हुने भएकाले]

अतः 2 वर्षपछि विद्यार्थी सङ्ख्या बढेर 720 पुग्छ ।

उदाहरण 5

एउटा जग्गाको हालको मूल्य रु. 15,97,200 प्रतिआना रहेको छ । यदि उक्त जग्गाको वार्षिक मूल्य वृद्धिदर 10% भए 3 वर्ष अगाडि उक्त जग्गाको मूल्य प्रति रोपनी कति थियो होला, पत्ता लगाउनुहोस् । (1 रोपनी = 16 आना)

समाधान

यहाँ प्रतिआना जग्गाको अहिलेको मूल्य (P_T) = रु. 15,97,200

समय (T) = 3 वर्ष

मूल्यवृद्धि दर (R) = 10% प्रतिवर्ष

3 वर्ष पहिलेको प्रतिआना जग्गाको मूल्य (P) = ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ } P_T = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } 15,97,200 = P \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3$$

$$\text{अथवा, } 15,97,200 = P \left(\frac{110}{100}\right)^3$$

$$\text{अथवा, } 15,97,200 = P \times 1.331$$

$$\text{अथवा, } \frac{1597200}{1.331} = P$$

$$\therefore P = \text{रु. } 12,00,000$$

तसर्थ 3 वर्ष पहिले प्रतिआना जग्गाको मूल्य (P) = रु. 12,00,000 थियो ।

हामीलाई थाहा छ, 16 आना = 1 रोपनी

अतः 3 वर्ष पहिले 1 रोपनी जग्गाको मूल्य = $16 \times \text{रु. } 12,00,000 = \text{रु. } 1,92,00,000$

उदाहरण 6

कुनै एउटा जिल्लाबाट वि.स. 2076 को एसईईमा सामेल विद्यार्थी सङ्ख्या 50,000 थियो । त्यसपछिका 3 वर्षमा क्रमशः 5%, 6% र 4% का दरले एसईई दिने विद्यार्थी सङ्ख्यामा वृद्धि भए वि.स. 2079 को एसईईमा सो जिल्लाबाट कति विद्यार्थी सामेल हुन्छन् होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ 3 वर्ष अगाडिको एसईई दिन विद्यार्थी सङ्ख्या (P) = 50,000

समय (T) = 3 वर्ष

पहिलो वर्षको वृद्धि दर (R_1) = 5% प्रतिवर्ष, दोस्रो वर्षका वृद्धि दर (R_2) = 6% प्रतिवर्ष र तेस्रो वर्षका वृद्धि दर (R_3) = 4% प्रतिवर्ष

3 वर्षपछिको एसईईमा सामेल विद्यार्थी सङ्ख्या (P_3) = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ } (P_3) &= P \left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \left(1 + \frac{R_3}{100}\right) \\ &= 50,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right) \left(1 + \frac{6}{100}\right) \left(1 + \frac{4}{100}\right) \\ &= 50,000 \left(\frac{105}{100}\right) \left(\frac{106}{100}\right) \left(\frac{104}{100}\right) \\ &= 57,876 \end{aligned}$$

अतः वि.स. 2079 को एसईईमा 57,876 विद्यार्थी उक्त जिल्लाबाट सामेल हुन्छन् ।

उदाहरण 7

वि.स. 2078 को सुरुमा एउटा नगरपालिको जनसङ्ख्या 1,00,000 थियो । वि.स. 2079 को सुरुमा 8,000 जना अन्यत्रबाट बसाइँ सरेर आए र विपत्का कारणबाट 500 जनाको मृत्यु भयो । यदि जनसङ्ख्या वृद्धि दर 2% प्रतिवर्ष छ भने वि.स. 2081 सालको सुरुमा सो नगरको जनसङ्ख्या कति होला, पत्ता लगाउनुहोस्

समाधान

यहाँ पहिलो अवस्थाअनुसार,

वि.स. 2078 को सुरुको जनसङ्ख्या (P) = 1,00,000

वृद्धि दर (R) = 2% प्रतिवर्ष

समय (T) = 1 वर्ष

बसाइँ सरेर आएको जनसङ्ख्या (M_{in}) = 8,000

मृत्यु भएको जनसङ्ख्या (D) = 500

वि.स. 2079 को जनसङ्ख्या (P_1) = ?

जनसङ्ख्या वृद्धि दर 2% हुँदा,

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ } P_T &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T \\ &= 1,00,000 \left(1 + \frac{2}{100} \right)^1 \\ &= 1,00,000 \left(\frac{102}{100} \right)^1 \\ &= 1,02,000 \end{aligned}$$

अब 2079 को सुरुको जनसङ्ख्या (P_1) = 1,02,000 + 8000 – 500 = 1,09,500

फेरि दोस्रो अवस्थाअनुसार,

वि.स.2079 को सुरुको जनसङ्ख्या (P_2) = 1,09,500

समय (T) = 2 वर्ष

वृद्धि दर (R) = 2% प्रतिवर्ष

वि.स. 2081 को सुरुको जनसङ्ख्या (P_T) = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ } P_T &= P_2 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T \\ &= 1,09,500 \left(1 + \frac{2}{100} \right)^2 \\ &= 1,09,500 \left(\frac{102}{100} \right)^2 \\ &= 1,13,924 \text{ (शून्यान्त गरिएको)} \end{aligned}$$

अतः वि.स. 2081 को सुरुको सो नगरपालिकाको जनसङ्ख्या 1,13,924 पुग्छ ।

अभ्यास 3.1

1. (क) कुनै ठाउँको सुरुको जनसङ्ख्या P , T वर्षपछिको जनसङ्ख्या P_T र वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर $R\%$ भए P_T पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
(ख) चितवन राष्ट्रिय निकुञ्जमा वि.स. 2079 सालमा बाघको सङ्ख्या x , वार्षिक बाघको वृद्धिदर $R\%$ प्रतिवर्ष भए N वर्षपछिको बाघको सङ्ख्या कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
(ग) नेपालबाट वैदेशिक रोजगारीमा जाने कामदारहरूको सङ्ख्याको वृद्धिदर पहिलो, दोस्रो र तेस्रो वर्षमा क्रमशः $R_1\%$, $R_2\%$ र $R_3\%$ भए 3 वर्षपछिको कामदार सङ्ख्या पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
2. (क) कुनै देशको जन्म दरभन्दा मृत्यु दर थोरै भएमा सो देशको जनसङ्ख्या बढ्छ कि घट्छ, लेख्नुहोस् ।
(ख) एक वर्ष अगाडि रु. 1500 मा 25 Kg को एक बोरा चामल किन्न सकिन्थ्यो । वार्षिक 10% महङ्गी बढनाले अहिले सो 25 Kg चामलको बोरालाई कति पर्छ ?
3. (क) सन् 2021 को जनगणनाअनुसार एउटा सहरको जनसङ्ख्या 5,18,452 थियो । यदि सो जनसङ्ख्या वृद्धि दर 4.5% प्रतिवर्ष भए 3 वर्षपछि उक्त सहरको जनसङ्ख्या कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) एउटा घर धनीले वार्षिक 15% प्रतिवर्षका दरले भाडा वृद्धि गर्ने सम्झौता व्यापारीसँग गरेका छन् । यदि उक्त सटरको हालको भाडा रु. 10,000 भए 3 वर्षपछि सो सटरको भाडा कति होला ?
(ग) दही जमाउने ब्याक्टेरियाको वृद्धि दर 10% प्रतिघण्टा रहेको छ । यदि बिहान 6 बजे ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या 4×10^{11} भए 2 घण्टापछि ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. (क) एउटा गाउँपालिकाको 2 वर्ष पहिलेको जनसङ्ख्या 28,500 थियो । यदि जनसङ्ख्या वृद्धि दर 2% प्रति वर्ष रहेछ भने 2 वर्षमा कतिले वृद्धि भयो होला ?
(ख) कुनै एउटा संस्थागत विद्यालयको 3 वर्ष अगाडि कक्षा 10 को मासिक शुल्क रु. 6,500 थियो । विद्यालयको आफ्नो विनियमअनुसार प्रत्येक वर्ष 10% ले शुल्क वृद्धि हुन्छ भने 3 वर्षमा कतिले शुल्क वृद्धि होला ?
(ग) एउटा जग्गाको हालको मूल्य रु. 6,00,000 रहेको छ । यदि उक्त जग्गाको वार्षिक मूल्य वृद्धि दर 10% भए 2 वर्षपछि सो जग्गाको मूल्यमा कति वृद्धि हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. (क) एउटा विश्वविद्यालयमा अहिले अध्ययनरत विद्यार्थी सङ्ख्या 21,632 छ । 2 वर्ष पहिले सो विश्वविद्यालयमा अध्ययन गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या जम्मा 20,000 थियो भने वार्षिक विद्यार्थी वृद्धि दर कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ख) एउटा गाउँपालिकाको जनसङ्ख्या ई.सं. 2018 को अन्त्यमा 40,000 थियो । ई.सं. 2020 को अन्त्यमा उक्त सङ्ख्या बढेर 44,100 भयो भने वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धि दर कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) 3 वर्ष अगाडि एक लिटर खाने तेलको मूल्य रु. 125 थियो । अहिले बढेर रु. 216 पर्छ भने तेलमा वार्षिक महङ्गी दर कति भयो होला ?
6. (क) एउटा गाउँको जनसङ्ख्या 13,310 छ । जब कि त्यस गाउँको वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धि दर 10% छ भने कति वर्ष पहिलेको जनसङ्ख्या 10,000 थियो होला ?
- (ख) मेवाको बिरुवा वैशाखको सुरुमा 4 मिटर थियो । सो मेवाको बिरुवाको वृद्धि दर 4% प्रतिमहिना छ भने कति महिनापछि उक्त बिरुवाको उचाइ 4.3264 मिटर हुन्छ ?
7. (क) एउटा जग्गाको हालको मूल्य रु. 19,96,500 प्रतिआना रहेको छ । यदि उक्त जग्गाको वार्षिक मूल्य वृद्धिदर 10% भए 3 वर्ष अगाडि उक्त जग्गाको मूल्य प्रति रोपनी कति थियो होला, पत्ता लगाउनुहोस् । (1 रोपनी = 16 आना)
- (ख) एउटा जग्गाको हालको मूल्य रु. 2,66,200 प्रतिआना रहेको छ । यदि उक्त जग्गाको वार्षिक मूल्य वृद्धिदर 10% भए 3 वर्ष अगाडि उक्त जग्गाको मूल्य प्रति रोपनी कति थियो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. (क) बिहान 6 बजे एक जना विरामीको प्रयोगशालामा पिसाब परीक्षण गर्दा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या 1×10^5 । त्यसपछि बिहानको 7 बजे, 8 बजे र 9 बजे परीक्षण गर्दा प्रतिघन्टा वृद्धिदर क्रमशः 3%, 4%, र 5%, पाइयो । बिहानको 9 बजे जम्मा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) आजभन्दा 3 वर्ष पहिले एउटा सहरको जनसङ्ख्या 1,50,000 थियो । त्यसपछिका 3 वर्षमा क्रमशः 2% पहिलो वर्ष, 4% दोस्रो वर्ष र 5% तेस्रो वर्षमा वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धि भएको छ भने सो सहरको अहिलेको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. (क) यदि 3 वर्ष पहिले खोलिएको एउटा जीवन बिमा कम्पनीमा देशभरिका शाखाहरूले जम्मा 1,000 जनालाई बिमा अभिकर्ताको तालिम दिइएको छ । बजारको प्रतिस्पर्धाअनुसार बिमितको सङ्ख्या बढाउँदै लानुपर्ने हुन्छ । त्यसैले 3 वर्ष पहिलेदेखि नै “प्रत्येक 5 जना बिमा अभिकर्ताको एउटा सानो समूहले प्रत्येक वर्ष 1 जना नयाँ अभिकर्ताको सङ्ख्या थप्नु पर्ने नीति लागु गरेर अभिकर्ताको सङ्ख्या बढाउँदै लगियो । हाल त्यस कम्पनीमा अभिकर्ताको सङ्ख्या कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) 2078 सालको सुरुमा स्थापना भएको एउटा वित्तीय संस्थामा 200 जना मात्र बजार प्रतिनिधिहरू छन् । उक्त संस्थाको कारोबार क्षेत्र बढाउँदै लगेपछि हरेक 5 जना बजार प्रतिनिधिको एउटा सानो समूहले 1 जना नयाँ बजार प्रतिनिधिको सङ्ख्या प्रत्येक वर्ष थप्ने पर्ने नीति लागु गरेर बजार प्रतिनिधिको सङ्ख्या बढाउँदै लगेको छ । अब 2079 सालको अन्त्यमा त्यस संस्थामा बजार प्रतिनिधिको सङ्ख्या कति होला पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. एउटा गाउँपालिकाको जनसङ्ख्या प्रत्येक वर्ष 10% ले बढ्दै जान्छ । यदि दुई वर्षको अन्त्यमा सो पालिकाको जनसङ्ख्या 30,000 पुगेको थियो । यदि सो 5,800 जना अन्तिममा बसाइँ सराइका कारणले थपिएका थिए भने सुरुको जनसङ्ख्या कति थियो ?
11. वार्षिक 5% का दरले 2 वर्ष लगातार अमेरिकी डलरको अधिमूल्यनपछि (\$)1 = रु. 120 भएछ भने 2 वर्ष पहिले अमेरिकी डलर (\$)1 बराबर कति नेपाली रुपियाँ थियो होला ?
12. एउटा गाउँको जनसङ्ख्या 2 वर्ष अगाडि 31,250 थियो । यदि उक्त गाउँको जनसङ्ख्या वृद्धिदर 6% छ । एक वर्ष अगाडि 625 जनाले अर्कै ठाउँमा बसाइँ सरेर गए भने उक्त गाउँको हालको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
13. 3 वर्ष अगाडि 3,75,000 जनसङ्ख्या भएको एउटा जिल्ला छ । यदि दोस्रो वर्षका अन्त्यमा 1480 जना मानिस बसाइँ सरेर आए र प्राकृतिक प्रकोपका कारण 2,750 जनाको मृत्यु भयो । यदि वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर 2% छ भने उक्त जिल्लाको हालको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
14. वि.स. 2075 मा महानगरको सुरुको जनसङ्ख्या 5,00,000 थियो । सोही महानगरको जनसङ्ख्या वि.स. 2077 को अन्त्यमा 6,65,500 थियो ।
 - (क) सो महानगरको जनसङ्ख्या वृद्धिदर कति थियो ?
 - (ख) यही प्रकारले वृद्धि हुँदै जाँदा वि.स. 2079 को अन्त्यमा सो नगरको जनसङ्ख्या कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

उपयुक्त समूह निर्माण गरी प्रत्येक समूहले आफ्नो वडा कार्यालय गएर अहिलेको जनसङ्ख्या कति छ तथ्याङ्क सङ्कलन गर्नुहोस् । गाउँपालिका वा वडा कार्यालयबाट वा अन्य किताब तथा स्मारिकाहरू प्रयोग गरी वि.स. 2078 सालको जनगणनाबाट प्राप्त तथ्याङ्कलाई आधार मानी आफ्नो वडाको जनसङ्ख्या वृद्धि कति भएको छ, पत्ता लगाउनुहोस् । कति जना अन्यत्रबाट बसाइँ सरेर आए, कति जना अन्यत्र बसाइँ सरेर गए र कति जनाको मृत्यु भयो सम्पूर्ण तथ्याङ्क सङ्कलन गरी प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

प्रश्न 1 र 2 को उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (क) 5,91,640 (ख) रु. 15,208.75 (ग) 4.84×10^{11}
4. (क) 1152 लगभग (ख) रु. 2151.5 (ग) रु. 1,26,000
5. (क) 4% (ख) 5% (ग) 20% 6. (क) 3 वर्ष (ख) 2 महिना
7. (क) रु. 2,40,00,000 (ख) रु. 32,00,000
8. (क) 1.12476×10^5 (ख) 1,67,076
9. (क) 1728 (ख) 288 10. 20,000
11. (\$)1 = 108.84 12. 34,450 13. 3,96,658
14. (क) 10% (ख) 8,05,255

3.2 मिश्र ह्रास (Compound Depreciation)

क्रियाकलाप 1

विद्यार्थी उपयुक्त सङ्ख्याका समूहमा बसी तल सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

- (क) एउटा किसानले 2 वर्ष अगाडि रु. 5,50,000 मा किनेको ट्र्याक्टर अहिले रु. 3,60,000 मा विक्री गर्‍यो भने मूल्यमा किन कमी भयो होला ?
- (ख) एउटा दराज पुरानो सामान विक्री गर्ने पसलबाट खरिद गर्दा नयाँको भन्दा रु. 15,000 सस्तोमा किन्न पाइयो, किन होला ?
- (ग) एउटा फोटोकपी मेसिन केही वर्ष अगाडि रु. 2,10,000 मा किनिएको थियो । सो फोटोकपी मेसिनको प्रयोगपछि हाल यसको विक्री मूल्य रु. 1,00,000 छ, किन ?

माथि दिइएका फरक अवस्थाअनुसार (क) मा ट्र्याक्टरको मूल्य दुई वर्षपछि रु. 1,90,000 ले घटेको छ । त्यस्तै (ख) मा पुरानो सामान खरिद गर्दा कुनै वस्तुको मूल्य नयाँभन्दा केही कमीमा पाइन्छ भन्ने जानकारी भयो । (ग) मा मेसिनरी सामानलाई प्रयोग गरपछि यसको मूल्यमा ह्रास हुन्छ ।

कुनै सामाग्री निश्चित अवधिका लागि तयार पारिएको हुन्छ । यसको क्षमता पनि सञ्चालन अवधि बढ्दै जाँदा क्रमशः कार्य क्षमता कम हुँदै जान्छ । तसर्थ कुनै पनि मेसिनरी सामानको प्रयोगपछि निश्चित समयवधिमा निश्चित दरमा तिनीहरूको मूल्यमा गिरावट आउँछ । यसलाई नै मूल्यमा भएको ह्रास भनिन्छ । यसरी कुनै निश्चित समय अवधिमा निश्चित दरमा घटेको मूल्यलाई मिश्रह्रास (Compound Depreciation) भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

विद्यार्थी उपयुक्त सङ्ख्याका समूहमा बस्नुहोस् ।

कुनै वस्तुको सुरुको मूल्य = V_0 , त्यसै गरी, प्रतिवर्ष ह्रासदर = $R\%$, समय अवधि = T वर्ष लिनुहोस् ।

T वर्षपछिको मूल्य = V_T

यस अवस्थामा T वर्षपछिको मूल्य कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ भनी आपसमा गरिएको छलफलपश्चात् एउटा समूहको निष्कर्ष तल प्रस्तुत गरिएको छ :

1 वर्षपछिको मूल्य (V_1) = $V_0 - V_0$ को $R\%$

$$= V_0 - V_0 \times \frac{R}{100}$$

$$= V_0 \left(1 - \frac{R}{100} \right)$$

दोस्रो वर्षका लागि,

$$\begin{aligned}
 2 \text{ वर्षपछिको मूल्य } (V_2) &= V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right) - V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right) \text{ को } R\% \\
 &= V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right) - V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100} \\
 &= V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right) \left(1 - \frac{R}{100}\right) \\
 &= V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{त्यसै गरी 3 वर्षपछिको मूल्य } (V_3) = V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right)^3$$

सोहीअनुसार,

$$(क) T \text{ वर्षपछिको मूल्य } (V_T) = V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T \text{ हुन्छ ।}$$

(ख) फेरि ह्रास भएको मूल्य कसरी पत्ता लगाउने,

$$\begin{aligned}
 \text{ह्रास भएको मूल्य} &= V_o - V_T \\
 &= V_o - V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T \\
 &= V_o \left[1 - \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T\right]
 \end{aligned}$$

(ग) के हरेक वर्ष कुनै सामानको मूल्य एउटै दरमा ह्रास हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

यदि $R_1\%$, $R_2\%$ र $R_3\%$ $R_T\%$ क्रमशः पहिलो, दोस्रो, तेस्रो..... T औं

वर्षको ह्रासदर हुन् भने,

$$T \text{ वर्षपछिको मूल्य } (V_T) = V_o \left(1 - \frac{R_1}{100}\right) \left(1 - \frac{R_2}{100}\right) \left(1 - \frac{R_3}{100}\right) \dots \dots \left(1 - \frac{R_T}{100}\right) \text{ हुन्छ ।}$$

वृद्धिमा बढ्दै जान्छ भने ह्रासमा घट्दै जाने रहेछ !



उदाहरण 1

3 वर्ष पहिले प्रकाशित रु. 200 पर्ने एउटा पुस्तकलाई हरेक वर्ष 5% मूल्य ह्रासमा प्रदर्शनीमा विक्री गरिँदै आएको छ । यस वर्ष उक्त पुस्तकको मूल्य कति होला ?

समाधान

यहाँ पुस्तकको सुरुको मूल्य $(V_o) = \text{रु. } 200$

मिश्रह्रास दर $(R) = 5\%$ प्रतिवर्ष

समय $(T) = 3$ वर्ष

पुस्तकको अहिलेको मूल्य (V_T) = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ } V_T &= V_0 \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T \\ &= 200 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^3 \\ &= 200 \left(\frac{95}{100}\right)^3 \\ &= 200 \times 0.857375 \\ &= \text{रु. } 171.47 \end{aligned}$$

अतः उक्त पुस्तकको मूल्य अहिले रु. 171.47 पर्छ ।

उदाहरण 2

सीमा BBA मा भर्ना भइन् । उनले आफ्नो पढाइका लागि एउटा कम्प्युटर रु. 40,000 मा किनेकी थिइन् । 2 वर्ष प्रयोग गरेपछि यसको मूल्यमा रु. 7,600 ले ह्रास भयो भने ह्रासदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ कम्प्युटरको सुरुको मूल्य (V_0) = रु. 40,000

समय (T) = 2 वर्ष

ह्रास भएको मूल्य = रु. 7,600

मिश्रह्रास दर (R) = ?

अब दुई वर्षपछिको मूल्य (V_T) = $V_0 - \text{रु. } 7,600 = \text{रु. } 40,000 - \text{रु. } 7,600 = \text{रु. } 32,400$

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ } V_T &= V_0 \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T \\ \text{अथवा, } 32,400 &= 40,000 \left(1 - \frac{R}{100}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{अथवा, } \frac{32400}{40000} = \left(1 - \frac{R}{100}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } \left(\frac{18}{20}\right)^2 = \left(1 - \frac{R}{100}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } \frac{18}{20} = 1 - \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } \frac{R}{100} = 1 - \frac{18}{20}$$

$$\text{अथवा, } \frac{R}{100} = \frac{2}{20}$$

$$\text{अथवा, } R = \frac{2}{20} \times 100 = 10\%$$

अतः उक्त कम्प्युटरको वार्षिक ह्रासदर 10% छ ।

उदाहरण 3

एउटा घरको हालको मूल्य रु. 20,00,000 पर्छ । यदि यसको मूल्य प्रतिवर्ष 10% ले घट्दै जान्छ भने कति वर्षपछि यसको मूल्य रु. 14,58,000 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ घरको हाल (सुरु) को मूल्य (V_0) = रु. 20,00,000

ह्रास दर (R) = 10%

T वर्षपछिको मूल्य (V_T) = रु. 14,58,000

समय (T) = ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ } V_T = V_0 \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } 14,58,000 = 20,00,000 \left(1 - \frac{10}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } \frac{1458000}{2000000} = \left(\frac{90}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } 0.729 = (0.9)^T$$

$$\text{अथवा, } (0.9)^3 = (0.9)^T$$

$$\Rightarrow T = 3 \text{ वर्ष}$$

अतः 3 वर्षपछि उक्त घरको मूल्य रु. 14,58,000 हुन्छ ।

उदाहरण 4

रु. 4 करोड पुँजी लगानी गरी स्थापना गरिएको एउटा कारखानाले 3 वर्षमा रु. 75 लाख मुनाफा कमाएछ तर त्यसको मूल्यमा वार्षिक 2.5% का दरले ह्रास भएछ भने 3 वर्षपछि विक्री गर्दा के कति नाफा वा नोक्सान हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ कारखानाको सुरुको लगानी मूल्य (V_0) = रु. 4,00,00,000

ह्रास दर (R) = 2.5%

समय (T) = 3 वर्ष

3 वर्षपछिको मूल्य (V_3) = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ } V_T &= V_0 \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T \\ &= 4,00,00,000 \left(1 - \frac{2.5}{100}\right)^3 \end{aligned}$$

$$= 4,00,00,000 \left(\frac{97.5}{100} \right)^3$$

$$= \text{रु. } 3,70,74,375$$

फेरि 3 वर्षमा उक्त कारखानाले कमाएको मुनाफा = रु. 75,00,000

कारखानाबाट प्राप्त कुल रकम = रु. 3,70,74,375 + रु. 75,00,000 = रु. 4,45,74,375

जम्मा लगानी = रु. 4,00,00,000

अतः 3 वर्षपछि कारखाना विक्री गर्दा हुने नाफा = रु. 4,45,74,375 – रु. 4,00,00,000

= रु. 45,74,375

उदाहरण 5

एउटा फाइनान्स कम्पनीको सेयरको मूल्यमा लगातार 2 वर्षसम्म वार्षिक 10% हासका दरले कमी आएपछि सो सेयर विक्री गर्दा रु. 25,920 प्राप्त भयो भने उक्त फाइनान्सको रु. 100 मूल्य पर्ने कति कित्ता सेयर विक्री भएको रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ फाइनान्स कम्पनीको अहिलेको सेयरको मूल्य (V_T) = रु. 25,920

हास दर (R) = 10%

समय (T) = 2 वर्ष

फाइनान्स कम्पनीको सुरुको सेयर मूल्य (V_0) = ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ } V_T = V_0 \left(1 - \frac{R}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } 25,920 = V_0 \left(1 - \frac{10}{100} \right)^2$$

$$\text{अथवा, } 25,920 = V_0 \left(\frac{90}{100} \right)^2$$

$$\text{अथवा, } 25,920 = V_0 \times \frac{81}{100}$$

$$\text{अथवा, } V_0 = \text{रु. } \frac{25920 \times 100}{81}$$

$$\text{अथवा, } V_0 = \text{रु. } 32,000$$

तसर्थ 2 वर्ष अगाडिको सेयरको मूल्य (V_0) = रु. 32,000

2 वर्षअगाडि 1 सेयरको मूल्य = रु. 100

$$\text{जम्मा सेयर सङ्ख्या} = \frac{32000}{100} = 320$$

अतः उक्त फाइनान्स कम्पनीले 2 वर्ष अगि रु. 100 पर्ने 320 कित्ता सेयर बेचेको रहेछ।

अभ्यास 3.2

1. (क) यदि कुनै सामानको सुरुको मूल्य रु. P र वार्षिक हासदर R% छ भने T वर्षपछिको मूल्य पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
(ख) T वर्षपछिको मूल्य $V_T = V_o \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$ मा R ले के जनाउँछ, लेख्नुहोस् ।
2. (क) रामले रु. 5,000 पर्ने एउटा घडी एक वर्षपछि 7% हास कट्टी गरी बेच्यो भने हास रकम कति होला ?
(ख) प्रतिवर्ष 5% हास कट्टी गरी एउटा मोटरसाइकल 1 वर्षपछि रु. 57,000 मा बेचियो भने उक्त मोटरसाइकल कतिमा किनिएको थियो ?
3. (क) रु. 16,800 पर्ने दराजको मूल्य वार्षिक 15% का दरले हास कट्टा गर्दा 2 वर्षपछि सो दराजको मूल्य कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) भारतको कुनै कम्पनीमा उत्पादित 125 सी.सी.को नयाँ मोटरसाइकलको नेपालमा हालको मूल्य रु. 2,50,000 छ । यदि उक्त मोटरसाइकलको मूल्य 4% प्रतिवर्षका दरले घट्दै जान्छ भने 3 वर्ष प्रयोग गरेपछि यसको मूल्य कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. (क) समिरले रु. 30,000 पर्ने एउटा मोबाइल किनेका छन् । उनलाई घरायसी समस्याले गर्दा 2 वर्ष प्रयोग गरी उक्त मोबाइल वार्षिक 30% का दरले हास कट्टी गरी बेच्नु पर्ने भयो भने हास कट्टी रकम पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) अनलाईन कक्षा सञ्चालनका लागि ल्यापटपबाट सजिलो हुने भएकाले रु. 96,000 मा एक गणित शिक्षकले नयाँ ल्यापटप किन्नुभयो । हरेक वर्ष यसको मूल्यमा 15% हास आउँछ । 3 वर्ष प्रयोग गरेपछि उहाँले यसलाई बेच्दा कति रकम हास भयो पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. (क) 3 वर्ष पहिले रु. 12,50,000 मा किनेको 4 रोपनी पहाडको जग्गा अहिले विक्री गर्दा प्रतिरोपनी रु. 1,60,000 मा मात्र बेचबिखन गर्न सकिन्छ । उक्त जग्गाको मूल्यमा वार्षिक कति प्रतिशतका दरले हास भयो पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) एक जना मानिसले रु. 5,000 तिरेर किनेको एउटा घडी 3 वर्ष प्रयोग गरेपछि विक्री गर्दा उनले रु. 625 मात्र पाए भने उक्त घडीको वार्षिक हास दर कति भयो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. (क) केही वर्ष पहिले रु. 4,00,000 मा किनेको छापाखानाको प्रत्येक वर्ष 30% ले मूल्यमा हास आई हाल यसको मूल्य रु. 1,96,000 मात्र छ । उक्त छापाखाना कति वर्ष पहिले किनिएको रहेछ ?
(ख) एउटा कारको मूल्य रु. 8,00,000 पर्छ । यदि यसको मूल्य प्रतिवर्ष 10% ले घट्दै जान्छ भने कति वर्षपछि यसको मूल्य रु. 5,83,200 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (क) वार्षिक 5% का दरले 2 वर्ष लगातार अमेरिकी डलरको मूल्यमा अवमूल्यनपछि, अहिले अमेरिकी डलर (\$)1 = रु. 125 भए 2 वर्ष अगाडि अमेरिकी डलर (\$)1 बराबर नेपाली रुपियाँ कति थियो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) वैदेशिक रोजगारीबाट फर्केका युवाको एक सानो समूहले 3 वर्ष अगाडि रु. 2,80,000 मा गाइपालन सुरु गरे । देशको अस्थिर राजनीतिक अवस्थाले गर्दा उक्त गाई फार्मको मूल्य 5% प्रति वर्ष मिश्रह्रास दरमा घट्दै गएमा अहिले सो फार्मको मूल्य कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. (क) एउटा फोटोकपी मेसिनको हालको मूल्य रु. 5,00,000 छ । यदि उक्त मेसिनको मूल्य पहिलो वर्ष 15% र त्यसै गरी दोस्रो र तेस्रो वर्षमा क्रमशः 10% र 5% ले ह्रास हुँदै जान्छ भने 3 वर्षपछि उक्त मेसिनको मूल्य कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) एउटा लेमिनेसन मेसिनको पहिलो वर्ष र दोस्रो वर्षमा क्रमशः 4% र 5% ले घट्दै गएपछि उक्त मेसिन रु. 24,168 मा बेचियो । 2 वर्ष अगाडि सो मेसिनको क्रय मूल्य कति थियो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. एक जना उद्योग व्यवसायीले रु. 48,00,000 लगानी गरी एउटा मालबाहक ट्रक किनेका थिए । उनले ट्रकबाट 2 वर्षमा रु. 6,80,000 कमाए । यसको मूल्यमा वार्षिक 10% का दरले ह्रास आएछ भने 2 वर्षपछि विक्री गर्दा के कति नाफा वा घाटा हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. एक जना बस व्यवसायीले रु.16,00,000 मा एउटा बस किने उनले 3 वर्षसम्म काठमाडौँ – बाग्लुङ रुटमा चलाउँदा रु. 5,10,000 मात्र नाफा कमाए । यसको मूल्यमा वार्षिक 5% का दरले मिश्रह्रास भएछ भने 3 वर्षपछि विक्री गर्दा कति नाफा वा नोक्सान भएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
11. नेपाल सेयर मार्केटमा सूचीकृत भई कारोबार भएको एउटा फाइनान्स कम्पनीको सेयरको मूल्य लगातार 2 वर्षसम्म 10% वार्षिक मिश्रह्रासका दरले घट्दै गएको छ । सो कम्पनीको सेयर किनेका तपाईंको छिमेकीले आफूसँग भएको सबै कित्ता सेयर रु. 28,350 मा विक्री गरे । 2 वर्षअघि उक्त फाइनान्सले रु. 100 का दरले कति कित्ता सेयर उक्त छिमेकीलाई बेचेको रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
12. एउटा जलविद्युत् कम्पनीको सेयर मूल्य वार्षिक 10% का दरले ह्रास भइरहेको छ । यदि शशिले आफूसँग भएको उक्त कम्पनीको सेयर बेच्दा यसको अहिलेको मूल्य रु. 7,10,775 छ भने
- (क) 2 वर्ष अगाडि उनले किनेको सेयरको मूल्य कति थियो ?
- (ख) आइपिओ खुलेको बेलामा रु. 100 को दरले किन्दा 2 वर्ष अघि कति कित्ता सेयर किनेका रहेछन् ।

13. निश्चित वार्षिक मिश्रहासको दरले कुनै सामानको मूल्य 2 वर्षपछि र 3 वर्षपछि क्रमशः रु. 10,240 र रु. 8,192 हुन्छ भने,

(क) मिश्रहास दर कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) उक्त सामानको सुरुको मूल्य कति रहेछ पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. निश्चित वार्षिक मिश्रहासको दरले कुनै सामानको मूल्य 2 वर्षपछि रु. 5,41,500 र 3 वर्षपछि रु. 5,14,425 हुन्छ भने,

(क) मिश्रहास दर कति हुन्छ ?

(ख) उक्त सामानको सुरुको मूल्य कति रहेछ पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

उपयुक्त समूह निर्माण गरी प्रत्येक समूहले पुराना सामान विक्री गर्ने कम्पनी वा पसल वा अन्य संस्थाहरूमा जानुहोस् । उक्त संस्थामा प्रयोग गरेका अथवा भएका विद्युतीय सामान जस्तै: सवारी साधन, फोटोकपी मेसिन, फर्निचर आदि सामानको क्रय मूल्य सोध्नुहोस् । उक्त सामानको प्रयोगपछि अहिलेको समयमा बेच्नुपर्दा उक्त सामानको मूल्य कति जति होला ? त्यो सामान खरिद गरेपछि के फाइदा वा कति आम्दानी भयो ? यी प्रश्नको उत्तरसहित उक्त सामग्रीको मूल्य कति प्रतिशतले हास आएको रहेछ पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त सामान विक्री गर्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान हुन्छ ? यस बारेमा एउटा प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 2. (क) रु 350 (ख) रु.60,000
3. (क) रु. 12,138 (ख) रु. 2,21,184 4. (क) रु. 15,300 (ख) रु. 37,044
5. (क) 20% (ख) 50% 6. (क) 2 वर्ष (ख) 3 वर्ष
7. (क) \$1 = रु. 138.50 (ख) रु. 2,40,065 8. (क) रु. 3,63,375 (ख) रु. 26,500
9. रु. 2,32,000 घाटा 10. रु. 2,81,800 नाफा 11. 350 कित्ता
12. (क) रु. 8,77,500 (ख) 8,775 कित्ता 13. (क) 20% (ख) रु. 16,000
14. (क) 5% (ख) रु. 6,00,000

मुद्रा र विनिमय दर (Currency and Exchange Rate)

4.0 पुनरवलोकन (Review)

उपयुक्त सङ्ख्याका समूहमा बसी तलका अवस्थाका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :

- तपाईंहरू आफ्नो विद्यालयबाट शैक्षिक भ्रमणका लागि नेपाल बाहिर जाँदै हुनुहुन्छ । के त्यहाँ नेपाली रुपियाँ खर्च गरेर केही सामान किन्न र खानेकुरा किनेर खान सक्नुहुन्छ ?
- सगुन एक प्रतिष्ठित व्यापारी हुन् । उनले विदेशबाट सामान आयात गर्छन् । के उनले सामानको रकम भुक्तानी गर्दा नेपाली रुपियाँमा गर्न सक्छन् ?
- विदेशमा काम गर्ने नेपालीले कमाएको पैसा नेपाल पठाउने गर्छन् । उनीहरूको परिवारले पठाएको उक्त रकम नेपाली रुपियाँमा पाउँछन् । के आधारमा उनीहरूले विदेशी पैसाको नेपाली रुपियाँ पाउँछन् ?

माथिका अवस्थामा जुन देशमा गइन्छ वा जुन देशसँग व्यापार गरिन्छ त्यही देशको मुद्रा प्रयोग गर्ने गरिन्छ । फरक फरक देशबाट पैसा नेपाल पठाउँदा परिवारले पाउने रकम नेपाली मुद्रा नै हुने गर्छ ।

4.1 मुद्रा र विनिमय दर (Currency and Exchange Rate)

क्रियाकलाप 1

उपयुक्त सङ्ख्यामा समूहमा बसी तल दिइएको नेपाल राष्ट्र बैङ्कले मिति 2079 भाद्र 5 गतेका लागि निर्धारण गरेको केही राष्ट्रहरूको मुद्राको विनिमय दर अध्ययन गर्नुहोस् र तल सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

नेपाल राष्ट्र बैङ्क

केन्द्रीय कार्यालय, थापाथली, काठमाडौं
भाद्र 5 गते 2079 (August 21, 2022)

| देश | मुद्रा | एकाइ | खरिद दर (रु.) | विक्री दर (रु.) | सङ्केत |
|----------------------------------|-----------------|------|---------------|-----------------|--------|
| भारत | भारतीय रुपियाँ | 100 | 160.00 | 160.15 | ₹ |
| अमेरिका | अमेरिकी डलर | 1 | 127.35 | 127.95 | \$ |
| युरोपियन युनियनमा भएका देशहरू | युरो | 1 | 128.13 | 128.73 | € |
| बेलायत | पाउन्ड स्टर्लिङ | 1 | 150.94 | 151.65 | £ |

| | | | | | |
|----------------------|--------------------------|-----|--------|--------|-----------|
| स्विजरल्यान्ड | स्विस फेडक | 1 | 133.13 | 133.76 | CHF |
| अस्ट्रेलिया | अस्ट्रेलियन डलर | 1 | 87.82 | 88.23 | AUD\$ |
| क्यानडा | क्यानेडियन डलर | 1 | 98.08 | 98.54 | CAD\$ |
| सिङ्गापुर | सिङ्गापुर डलर | 1 | 91.68 | 92.11 | SGD\$ |
| जापान | जापानी येन | 10 | 9.32 | 9.37 | ¥ |
| चीन | चिनियाँ युआन | 1 | 18.70 | 18.79 | ¥ |
| साउदी अरब | साउदी अरबियन रियाल | 1 | 33.91 | 34.07 | SAR ريبال |
| कतार | कतारी रियाल | 1 | 34.82 | 34.98 | QAR ريبال |
| थाइल्यान्ड | थाइ भाट | 1 | 3.57 | 3.59 | THB ฿ |
| संयुक्त अरब इमिरेट्स | संयुक्त अरब इमिरेट दिराम | 1 | 34.67 | 34.83 | د.ا |
| मलेसिया | मलेसियन रिङ्गेट | 1 | 28.45 | 28.58 | MR |
| दक्षिण कोरिया | दक्षिण कोरियन वन | 100 | 9.58 | 9.63 | ₩ |
| स्विडेन | स्विडिस क्रोनर | 1 | 12.07 | 12.12 | SEK kr |
| डेनमार्क | डेनिस क्रोनर | 1 | 17.23 | 17.31 | DKK kr |
| हङकङ | हङकङ डलर | 1 | 16.23 | 16.31 | HKD \$ |
| कुवेत | कुवेती दिनार | 1 | 414.23 | 416.18 | KD د.ك |
| बहराइन | बहराइन दिनार | 1 | 337.80 | 339.39 | BD د.ب |

- (क) हाम्रो देशमा मुद्राको विनिमय दर कसले निर्धारण गर्छ ?
- (ख) अमेरिकाको मुद्रालाई डलर भनिन्छ भने चिनको मुद्रालाई के भनिन्छ ?
- (ग) माथि दिइएको मुद्राको विनिमय दरअनुसार खरिद दरभन्दा विक्री दर किन बढी छ होला ?
- (घ) खरिद दर र विक्री दर भनेको के हो, छलफल गर्नुहोस् ।

कुनै आर्थिक कारोबार गर्नका लागि एक देशको मुद्राको मूल्य अर्को देशमा कति हुने भनी सरकारको आधिकारिक निकाय वा सरकारको केन्द्रीय बैङ्कले निश्चित दर निर्धारण गरेको हुन्छ । उक्त दरलाई नै विदेशी मुद्रा विनिमय दर भनिन्छ । हाम्रो देशको विनिमय दर भारतसँग स्थिर छ भने अरू देशसँग चलाइमान छ । हाम्रो देशमा मुद्राको विनिमय दर नेपाल राष्ट्र बैङ्कले निर्धारण गरेको हुन्छ । बैङ्क वा वित्तीय संस्थाले विदेशी मुद्रा खरिद गर्दा दिने विनिमय दरलाई खरिद दर भनिन्छ । त्यसैगरी बैङ्क वा वित्तीय संस्थाले विदेशी मुद्रा विक्री गर्दा दिने विनिमय दरलाई विक्री दर भनिन्छ ।

उदाहरण 1

माथि दिइएको विनिमय दरका आधारमा 500 पाउन्ड स्टर्लिङको खरिद दर र विक्री दरमा कति रुपियाँ फरक पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ दिइएको पाउन्ड स्टर्लिङ = £ 500

विनिमय दर तालिकाअनुसार 1 पाउन्ड स्टर्लिङको खरिद दर = रु. 150.94

अब 500 पाउन्ड स्टर्लिङको खरिद मूल्य = रु. $150.94 \times 500 =$ रु. 75,470

फेरि विक्री दरअनुसार, 1 पाउन्ड स्टर्लिङको विक्री दर = रु. 151.65

500 पाउन्ड स्टर्लिङको विक्री मूल्य = रु. $151.65 \times 500 =$ रु. 75,825

तसर्थ खरिद मूल्य र विक्री मूल्यको फरक = रु. $75,825 - 75,470 =$ रु. 355

उदाहरण 2

कुनै एक दिनको अमेरिकन डलर र नेपाली रुपियाँको विनिमय दर, \$1 = रु. 126.35 छ।

(क) रु. 85,500 मा कति अमेरिकन डलर विनिमय गर्न सकिन्छ ?

(ख) \$3,000 मा कति नेपाली रुपियाँ विनिमय गर्न सकिन्छ ?

समाधान

यहाँ (क) \$1 = रु. 126.35

अथवा, रु. 126.35 = \$1

अथवा, रु. 1 = \$ $\frac{1}{126.35}$

अथवा, रु. 85,500 = \$ $\frac{1}{126.35} \times 85,500 =$ \$676.69

(ख) फेरि \$1 = रु. 126.35

अथवा, \$3000 = रु. $126.35 \times 3,000 =$ रु. 3,79,050

उदाहरण 3

माथि दिइएको विनिमय दर तालिकाअनुसार तल दिइएका मुद्रा परिवर्तन गर्नुहोस् :

(क) 1 क्यानेडियन डलरलाई जापानी येनमा

(ख) 250 अस्ट्रेलियन डलरलाई स्विस फ्रेडकमा

समाधान

यहाँ (क) 1 क्यानेडियन डलर दिँदा = रु. 98.08 पाइन्छ ।

अथवा, रु. 98.08 = 1 क्यानेडियन डलर [∴ खरिद दरअनुसार]

अथवा, रु. 1 = $\frac{1}{98.08}$ क्यानेडियन डलर(i)

फेरि 10 जापानी येन लिन = रु. 9.37 तिर्नुपर्छ ।

अथवा, रु. 9.37 = 10 जापानी येन [∴ विक्री दरअनुसार]

अथवा, रु. 1 = $\frac{10}{9.37}$ जापानी येन(ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$\frac{1}{98.08} \text{ क्यानेडियन डलर} = \frac{10}{9.37} \text{ जापानी येन}$$

$$1 \text{ क्यानेडियन डलर} = \frac{10 \times 98.08}{9.37} \text{ जापानी येन} = 104.67 \text{ जापानी येन}$$

अतः 1 क्यानेडियन डलर = 104.67 जापानी येन हुन्छ ।

वैकल्पिक तरिका

मानौं क्यानेडियन \$1 = x जापानी येन

अब तल दिइएअनुसार लेख्ने,

क्यानेडियन \$1 = x जापानी येन

10 जापानी येन = नेपाली रु. 9.37

नेपाली रु. 98.08 = 1 क्यानेडियन डलर

हरेक लाइनको बायाँको मान बायाँका अन्य मानहरूसँग गुणन गर्ने । त्यसै गरी दायाँको मान दायाँका अन्य मानहरूसँग गुणन गर्ने ।

$$\text{अथवा, } 1 \times 10 \times 98.08 = x \times 9.37 \times 1$$

$$\text{अथवा, } 10 \times \frac{10 \times 98.08}{9.37} = x$$

$$\text{अथवा, } x = 104.67$$

अतः 1 क्यानेडियन डलर = 104.67 जापानी येन हुन्छ ।

1. पहिलो लाइनको बायाँ क्यानेडियन डलरबाट सुरु गरी दायाँपट्टि जापानी येन भएकाले दोस्रो लाइनको बायाँ जापानी येनबाट सुरु गर्ने ।
2. दोस्रो लाइनको दायाँ भागमा ने. रु. भएकाले तेस्रो लाइनको बायाँ ने. रु. लेखी दायाँ भागमा क्यानेडियन डलर लेख्नु पर्छ किनकि सुरु क्यानेडियन डलरबाट भएको छ ।

ए ! नेपालवाहेक अरू देशको मुद्रा नेपालमा सटही गर्दा सुरुमा नेपाली मुद्रामा सटही गरेपछि मात्र अर्को देशको मुद्रा पाइने रहेछ । हामीसँग भएको विदेशी मुद्रालाई बैङ्कले नेपाली मुद्रा दिँदा खरिद दरमा र हामीसँग भएको नेपाली मुद्राबाट पुनः विदेशी मुद्रा दिँदा विक्री दरमा सटही गर्ने पो रहेछ ।

(ख) 1 अस्ट्रेलियन डलर = रु. 87.82

अथवा, रु. 87.82 = 1 अस्ट्रेलियन डलर

अथवा, रु. 1 = $\frac{1}{87.82}$ अस्ट्रेलियन डलर.....(i)

फेरि 1 स्विस फ्रेड्क = रु. 133.76

अथवा, रु. 133.76 = 1 स्विस फ्रेड्क

अथवा, रु. 1 = $\frac{1}{133.76}$ स्विस फ्रेड्क(ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$\frac{1}{87.82}$ अस्ट्रेलियन डलर = $\frac{1}{133.76}$ स्विस फ्रेड्क

अथवा, 1 अस्ट्रेलियन डलर = $\frac{1 \times 87.82}{133.76}$ स्विस फ्रेड्क

अथवा, 250 अस्ट्रेलियन डलर = $\frac{87.82}{133.76} \times 250$ स्विस फ्रेड्क = 164.14 स्विस फ्रेड्क

अतः 250 अस्ट्रेलियन डलर = 164.14 स्विस फ्रेड्क

वैकल्पिक तरिका

मानौं, 250 अस्ट्रेलियन डलर = x स्विस फ्रेड्क

1 स्विस फ्रेड्क = रु. 133.76

रु. 87.82 = 1 अस्ट्रेलियन डलर

$250 \times 1 \times 87.82 = x \times 133.76 \times 1$

$$x = \frac{250 \times 87.82}{133.76}$$

$$= 164.14 \text{ स्विस फ्रेड्क}$$

अज्ञात चरहरूको मान पत्ता लगाउन ऐकिक नियम, अनुपात र समानुपातको वैकल्पिक तरिका Chain rule हो ।

मानौं, A, B र C फरक देशका मुद्राको एकाइ हुन् भने,

यदि $A = B$, $B = C$ र $C = A$ भए,

$$A \times B \times C = B \times C \times A \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 4

यदि अमेरिकी डलर (\$) 500 = पाउन्ड स्टर्लिङ (£)390 र नेपाली रु. 7,547= पाउन्ड स्टर्लिङ (£) 50 छ भने नेपाली रु. 10,308 को कति अमेरिकी डलर (\$) साट्न सकिन्छ होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं अमेरिकी \$ x = नेपाली रु. 10,308

अनि तल दिइएअनुसार लेख्ने,

$$\text{अथवा, } \$500 = £390$$

$$£ 50 = \text{रु. } 7,547$$

$$\text{रु. } 10,308 = \$x$$

चेन नियमको प्रयोग गरी,

$$\text{अथवा, } 500 \times 50 \times 10,308 = 390 \times 7547 \times x$$

$$\text{अथवा, } \frac{500 \times 50 \times 10308}{7547 \times x} = x$$

$$\text{अथवा, } x = 87.55$$

अतः रु.10,308 ले अमेरिकी डलर (\$) 87.55 साट्न सकिन्छ ।

उदाहरण 5

एक जना व्यापारीले पाउन्ड स्टर्लिङ (£) 1= रु. 150 को दरमा रु. 8,40,000 को पाउन्ड स्टर्लिङ साटे । पाँच दिनपछि नेपाली मुद्रा 5% ले अधिमूल्यन भयो र उक्त दिनमा उसँग भएको पाउन्ड स्टर्लिङ पुनः नेपाली मुद्रामा साट्दा उसलाई कति नाफा वा नोक्सान भयो होला ?

समाधान

यहाँ पाउन्ड स्टर्लिङ (£)1 = रु. 150

एक जना व्यापारीले रु. 8,40,000 को पाउन्ड स्टर्लिङ साटे ।

अधिमूल्यनको दर = 5%,

नाफा वा नोक्सान = ?

$$\text{अब रु. } 150 = £1$$

$$\text{रु. } 1 = £ \frac{1}{150}$$

$$\text{रु. } 8,40,000 = £ \frac{1}{150} \times 8,40,000 = £ 5,600$$

पाँच दिनपछि नेपाली मुद्रा 5% ले अधिमूल्यन भयो तसर्थ पाँच दिनपछिको विनिमय दर

$$\begin{aligned}\text{£}1 &= 150 - 150 \text{ को } 5\% = 150 - 150 \times \frac{5}{100} \\ &= \text{रु. } 150 - \text{रु. } 7.50 = \text{रु. } 142.5\end{aligned}$$

पुनः उसँग भएको पाउन्ड स्टर्लिङ नेपाली रुपियाँमा साटे

$$\text{त्यसैले } \text{£}5,600 = \text{रु. } 142.5 \times 5,600 = \text{रु. } 7,98,000$$

यहाँ रु. 7,98,000 < रु. 8,40,000 त्यसैले उसलाई नोक्सान भयो ।

$$\text{तसर्थ नोक्सान रकम} = \text{रु. } 8,40,000 - \text{रु. } 7,98,000 = \text{रु. } 42,000$$

उदाहरण 6

नर्वेमा व्यापार गर्ने नेपाली मूलका व्यापारीले नेपालमा आएका बेला 900 ओटा नेपाली पस्मिना सल रु. 4,000 को दरले काठमाडौँमा किनेछन् । उनले निर्यात कर 5% तिरेर नर्वे लगी 20% नाफा गरी बेच्दा सबै नेपाली पस्मिना सल कति युरोमा बेच्नु पर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् । (€1 = रु. 130)

समाधान

$$\text{यहाँ 1 ओटा नेपाली पस्मिना सलको मूल्य} = \text{रु. } 4,000$$

$$900 \text{ ओटा नेपाली पस्मिना सलको मूल्य} = \text{रु. } 4,000 \times 900 = \text{रु. } 36,00,000$$

5% निर्यात करसहितको 900 ओटा नेपाली पस्मिना सलको क्रय मूल्य

$$= \text{रु. } 36,00,000 + \text{रु. } 36,00,000 \text{ को } 5\%$$

$$= \text{रु. } 36,00,000 + \text{रु. } 36,00,000 \times \frac{5}{100}$$

$$= \text{रु. } 37,80,000$$

हामीलाई थाहा छ €1 = रु. 130

$$\text{अर्थात्, रु. } 130 = \text{€}1$$

$$\text{अथवा, रु. } 1 = \frac{\text{€}1}{130}$$

$$\text{अथवा, रु. } 37,80,000 = \frac{\text{€}1}{130} \times 37,80,000$$

$$= \text{€}29076.92$$

$$\therefore \text{जम्मा क्रय मूल्य (युरोमा)} = \text{€}29076.92$$

20% नाफा गरी बेच्नु पर्दा,

$$\begin{aligned}\text{फेरि 900 ओटा सलको विक्रय मूल्य} &= \text{€}29076.92 + \text{€}29076.92 \times \frac{20}{100} \\ &= \text{€}29076.92 + 5,815.38\end{aligned}$$

$$\text{अतः सबै सलको विक्रय मूल्य} = \text{€}34892.30$$

वैकल्पिक तरिका

5% निर्यात करसहितको 900 ओटा नेपाली पस्मिना सलको क्रय मूल्य = रु. 37,80,000

20% नाफा गरी बेच्नु पर्दा,

900 ओटा सलको विक्री मूल्य = रु. 3780000 + 3780000 को 20%

$$= 3780000 + 756000$$

$$= 4536000$$

अब रु. 130 = € 1 हुन्छ ।

$$\text{रु. 1} = \frac{\text{€1}}{130}$$

$$\text{रु. 4536000} = \frac{\text{€1}}{130} \times 4536000$$

$$= \text{€ 34892.30}$$

अतः सबै सलको विक्रय मूल्य = €34892.30

अभ्यास 4

- (क) मुद्रा विनिमय भन्नाले के बुझिन्छ ?

(ख) यदि नेपाली विद्यार्थी अमेरिका पढ्न जाँदा उसले नेपाली रुपियाँलाई अमेरिकी डलरमा साट्टा बैङ्कले खरिद दर वा विक्री दर कुन प्रयोग गर्छ, लेख्नुहोस् ।

(ग) खरिद दर र विक्री दरलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।
- माथि दिइएको विदेशी मुद्रा विनिमयको खरिद दर प्रयोग गरी विभिन्न देशका मुद्रालाई नेपाली रुपियाँमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

| | |
|-------------------------------|-------------------------|
| (क) भारतीय रुपियाँ 1425 | (ख) अमेरिकी डलर 2000 |
| (ग) पाउन्ड स्टर्लिङ 4672 | (घ) अस्ट्रेलियन डलर 672 |
| (ङ) साउदी अरबियन रियाल 1851 | (च) कतारी रियाल 2225 |
| (छ) दक्षिण कोरियाली वन 58,230 | (ज) हङकङ डलर 4512 |
| (झ) मलेसियन रिङ्गेट 6725 | (ञ) चिनियाँ युआन 3450 |
- विदेशी मुद्रा विनिमयको विक्री दर प्रयोग गरी रु. 2,00,000 लाई निम्न मुद्रामा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

| | |
|---------------------|------------------------------|
| (क) अस्ट्रेलियन डलर | (ख) अमेरिकी डलर |
| (ग) युरो | (घ) संयुक्त अरब इमिरेट दिराम |

4. कुनै एक दिनको नेपाल राष्ट्र बैङ्कको मुद्रा विनिमय दरअनुसार अमेरिकी डलर 1 को खरिद दर र विक्री दर क्रमशः नेपाली रु. 127.50 र रु. 128 छन् भने,
- (क) नेपाली रु. 81,280 सँग कति अमेरिकी डलर साट्न सकिन्छ ?
- (ख) तपाईंले अमेरिकी डलर 600 सँग कति नेपाली रुपियाँ साट्न सक्नुहुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. 23 अगस्ट 2022 को नेपाल राष्ट्र बैङ्कको मुद्रा विनिमय दरअनुसार चाइनिज युआन 1 को खरिद दर र विक्री दर क्रमशः नेपाली रु. 18.64 र रु. 18.73 थियो भने,
- (क) नेपाली रु. 37,460 सँग कति चाइनिज युआन साट्न सकिन्छ ?
- (ख) तपाईंले चाइनिज युआन 5000 सँग कति नेपाली रुपियाँ साट्न सक्नुहुन्छ ?
6. माथि तालिकामा दिइएको मुद्राको विनिमय दर प्रयोग गरी तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :
- (क) 1 युरोको कति संयुक्त अरब इमिरेट दिराम हुन्छ ?
- (ख) 1 कतारी रियालको कति मलेसियन रिङ्गेट हुन्छ ?
- (ग) कति क्यानेडियन डलरको 200 अमेरिकन डलर हुन्छ ?
- (घ) 200 पाउन्ड स्टर्लिंगको कति थाइ भाट हुन्छ ?
7. नेपालबाट उच्च शिक्षा प्राप्तिका लागि सोबिता अस्ट्रेलिया गएकी थिइन् । आफ्नो अध्ययन पूरा गरी उनी अहिले त्यहाँ माध्यमिक शिक्षकका रूपमा काम गर्छिन् । उनले प्रतिघण्टा अस्ट्रेलियन डलर 37 कमाउँछिन् । उनी आइतबारबाहेक हप्ताको हरेक दिन 5 घण्टाको दरले पढाउँछिन् । विनिमय दर अस्ट्रेलियन डलर 1 = रु. 90 भए,
- (क) उनको एक हप्ताको तलब नेपाली रुपियाँमा कति हुन्छ ?
- (ख) उनको एक महिनाको तलब नेपाली रुपियाँमा कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. (क) एक जना व्यापारीले अमेरिकन डलर 1 = नेपाली रु. 124 को दरमा, नेपाली मुद्रा रु. 12,40,000 को अमेरिकन डलर साटेछन् । एक हप्तापछि, नेपाली मुद्रा 10% ले अवमूल्यन भयो । त्यही अवमूल्यन भएको समयमा उसले पुनः उक्त डलर नेपाली मुद्रामा साट्दा कति नाफा वा नोक्सान भयो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) एक जना व्यापारी दसैँको वेलामा थाइल्यान्डबाट सामान किन्छन् । त्यसका लागि उनले थाइ भाट 1 = नेपाली रु. 3.60 को दरमा नेपाली मुद्रा रु. 7,20,000 को थाइ भाट साटे । एक दिनपछि, नेपाली मुद्रा 5% ले अधिमूल्यन भयो । देशको विषम परिस्थितिले गर्दा उनले सामान थाइल्यान्डबाट नकिन्ने विचार गरे । त्यसैले अधिमूल्यन भएकै समयमा उक्त थाइ भाट पुनः नेपाली मुद्रामा साट्दा उनलाई कति नाफा वा नोक्सान भयो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. (क) एक जना नेपाली संयुक्त अरब इमिरेट घुम्न गएका थिए । त्यस समयमा उनीहरूले 75" (इन्च) को ब्रान्डेड कम्पनीको टेलिभिजन 10,000 दिराममा किनेछन् । त्यस दिनको विनिमय दरअनुसार संयुक्त अरब इमिरेट दिराम 1 = नेपाली रु. 34.50 थियो । 20%

भन्सार शुल्क र 13% भ्याट तिरेर नेपाल ल्याएछन् । उनीहरूका आफन्तले यसलाई किन्ने चाहना गरे । नाफा नहुने गरी बेच्दा सो टेलिभिजनलाई कति नेपाली रुपियाँमा बेच्नु पर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) कुनै सामानलाई भारतीय रुपियाँ 21,600 मा बेच्दा 20% नाफा हुन्छ । सोही सामानलाई 25% नाफा गर्न कति नेपाली रुपियाँमा बेच्न सकिन्छ ?

10. (क) एक जना नेपाली अस्ट्रेलियामा व्यापार गर्छन् । घरायसी कामको सिलसिलामा उनी नेपाल आएका थिए । अब उता फर्किदा नेपालबाट 500 ओटा पस्मिनाको सल लानेबिचार गरे । प्रत्येकको रु. 3,500 को दरले पस्मिनाका सल किने । उनले निर्यात कर 5% तिरी अस्ट्रेलिया पुऱ्याए । त्यहाँको विमानस्थलबाट उनी बस्ने ठाउँमा पुऱ्याउन अस्ट्रेलियन डलर 30 हुवानी खर्च तिरे । एउटा पस्मिना सललाई अस्ट्रेलियन डलर 80 को दरले बेच्दा उनलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो, पत्ता लगाउनुहोस् । (अस्ट्रेलियन डलर 1 = नेपाली रु. 88.50)

(ख) नेपाल वायुसेवा निगमबाट काठमाडौँदेखि बैङ्कको हवाइ टिकट रु. 28,000 पर्छ । फेरि थायल्यान्डबाट टिकट बुकिङ गराउँदा 8600 थाइ भाट पर्छ भने कुन ठाउँबाट बुकिङ गराउँदा कति प्रतिशतले सस्तो पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । (थाइ भाट 1 = नेपाली रु. 3.50)

11. (क) यदि 176 अमेरिकी डलर = 100 पाउन्ड स्टर्लिङ र 1 पाउन्ड स्टर्लिङ = नेपाली रु. 151 भए 132 अमेरिकी डलरसँग कति नेपाली रुपियाँ साट्न सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि ₹ 100 (IC) = नेपाली रु. 160 र 1 अमेरिकी डलर = नेपाली रु. 120 भए ₹ 7500 (IC) बराबर कति अमेरिकी डलर हुन्छ ?

(ग) यदि चिनियाँ युआन 1 = रु. 18.70 र साउदी अरब रियाल 1 = रु. 33.91 भए चिनियाँ युआन 5612 लाई साउदी अरब रियालमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

खुला प्रश्न

(क) मुद्रा विनिमय गर्दा किन खरिद दर र बिक्री दर फरक फरक हुन्छ ?

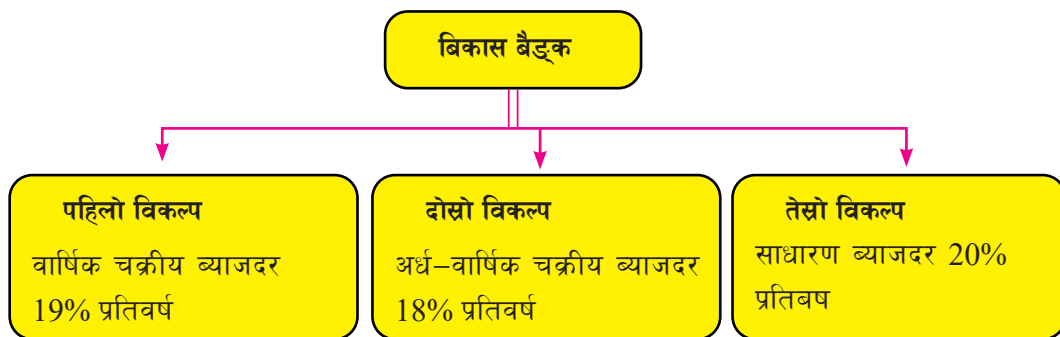
परियोजना कार्य

उपयुक्त समूह निर्माण गरी प्रत्येक समूहले पत्रपत्रिका वा गुगलबाट खोज गरी आजको दिनको विदेशी मुद्रा विनिमय दर पत्ता लगाउनुहोस् । दुई दिन अगाडि र आजको दिनमा कुनै मुद्रा विनिमय दरमा कतिको फरक पाउनुहुन्छ वा एउटै पाउनुहुन्छ ? साथै उक्त दिनमा अन्तर्राष्ट्रिय बजारमा सुन प्रति के.जी. वा प्रति तोला वा प्रति ग्राम कति छ ? अमेरिकामा कति छ ? बेलायतमा कति छ ? अस्ट्रेलियामा कति छ ? संयुक्त अरब इमिरेटमा कति छ ? उक्त दिनमा कुन देशको कुन सहरमा किन्दा कतिले सस्तो पर्छ ? यसबारेमा एउटा प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

2. (क) रु. 2280 (ख) रु. 254700 (ग) रु. 705191.68
 (घ) रु. 59015.04 (ड) रु. 62767.41 (च) रु. 77474.5
 (छ) रु. 5578.43 (ज) रु. 73229.76
 (झ) रु. 191326.25 (ञ) रु. 64515
3. (क) अस्ट्रेलियन \$2266.8 (ख) अमेरिकन \$1563.11
 (ग) पाउन्ड स्टर्लिङ €1553.63 (घ) दिराम 5742.17
4. (क) (\$)635 (ख) रु. 76,500
5. (क) चिनियाँ युआन 2000 (ख) रु. 93,200
6. (क) दिराम 3.68 (ख) मलेसियन रिङ्गेट 1.22
 (ग) क्यानेडियन डलर 260.91 (घ) थाइ भाट 8408.91
7. (क) 99,900 (ख) शिक्षकलाई देखाउने
8. (क) नाफा रु.1,24,000 (ख) नोक्सान रु. 36,000
9. (क) रु. 4,67,820 (ख) ने.रु.36,000
10. (क) नाफा 92.37% (ख) काठमाडौँबाट गर्दा 6.97% सस्तो पर्छ
11. (क) रु.11,325 (ख) डलर 100
 (ग) सा.अ. रियाल 3094.79

मिश्रित अभ्यास

1. एउटा परिवारले कक्षा 11 पढ्न सुरु गरेको 17 वर्षको छोरा वा छोरीको पढाइमा खर्च गर्ने उद्देश्यका साथ बच्चाकै नाममा कुनै बैङ्कमा रु. 4,00,000 जम्मा गरिदिन खोजिरहनुभएको छ । उनी 19 वर्षको हुँदा 12 कक्षा उत्तीर्ण भएपछि सबै रकम (सावाँ र ब्याज) भिक्ने सर्तमा उक्त बैङ्कमा पैसा जम्मा गर्नुभयो भने,
- (क) अर्धवार्षिक चक्रीय ब्याजअनुसार 2 वर्षको लागी जम्मा गरेको रुपियाँमा कति पटक ब्याजको गणना हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
- (ख) तपाइँले आफ्नो बाबुआमालाई तल दिइएका मध्ये कुन विकल्पअनुसार पैसा जम्मा गर्न सल्लाह दिनुहुन्छ र किन ? गणना गरी कारण दिनुहोस् ।



2. वार्षिक चक्रीय ब्याज दरमा कुनै रकमको मिश्रधन 2 वर्ष र 3 वर्षमा क्रमशः रु 12,000 र रु. 13200 पुग्दछ ।
 - (क) वार्षिक चक्रीय ब्याज पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 - (ख) चक्रीय ब्याजको दर कति हुनुपर्छ ?
 - (ग) मूलधन कति हुनु पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. एक जना व्यक्तिले वि.स. 2075 वैशाख 25 मा एउटा जग्गा रु. 80, 00,000 मा किने र त्यही दिन देखी नै जग थाप्न सुरु गरी रु. 2,70,00,000 मा घर निर्माण गरे । यदि जग्गाको मूल्य प्रतिवर्ष 20% का दरले बढ्दै जान्छ भने घरको मूल्य 20% ले प्रतिवर्ष घट्दै जान्छ ।
 - (क) T वर्षपछिको मूल्य $(P_T) = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$ मा R ले के जनाउँछ ।
 - (ख) 2 वर्षपछि सो जग्गाको मूल्य कति हुन्छ ?
 - (ग) 2 वर्षपछि सो घरको मूल्य कति हुन्छ ?
 - (घ) के 2 वर्षपछि जग्गा र घरको मूल्य बराबर हुन्छ त ? हुँदैन भने कति वर्षपछि जग्गा र घरको मूल्य बराबर हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. रामले अमेरिकन डलर (\$)1 = ने. रु. 110 का दरले केही नेपाली रुपियाँको अमेरिकन डलर खरिद गरेछन् । पाँच दिनपछि अमेरिकन डलरका तुलनामा नेपाली रुपियाँ 10% ले अवमूल्यन भयो र उक्त डलर फेरि नेपाली मुद्रामा साट्टा उनलाई रु. 33,000 नाफा भएछ ।
 - (क) मुद्रा विनिमय दर भन्नाले के बुझिन्छ, लेख्नुहोस् ।
 - (ख) नेपाली रुपियाँ 10% ले अवमूल्यन भएपछि अमेरिकन डलर (\$)1 बराबर कति नेपाली रुपियाँ हुन्छ ?
 - (ग) रामले सुरुमा कति नेपाली मुद्राको अमेरिकन डलर खरिद गरेका रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (घ) नेपाली रुपियाँ 10% अवमूल्यन हुनुको सट्टा 10% ले नै अधिमूल्यन भएको भए उसलाई कति नाफा वा नोक्सान हुन्थ्यो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. नेपाल बैङ्क लिमिटेडको सञ्चालक समितिको नियमित बैठकबाट वार्षिक नीतिमा केही परिवर्तन गर्ने निर्णय गरेको छ । जसअनुसार निर्णयको एउटा बुँदामा मुद्दती खातामा तल दिइएको दरअनुसार अर्धवार्षिक ब्याज दिने निर्णय कायम गरिएको छ ।

| जम्मा गर्ने समय | ब्याजको दर | कम्तीमा आवश्यक रकम |
|-------------------------|------------|--------------------|
| 6 महिनासम्म | 6.75% | Rs. 50,000 |
| 6 महिना देखि 1 वर्षसम्म | 7.25% | Rs. 50,000 |
| 1 वर्षदेखि छ वर्षसम्म | 7.5% | Rs. 75,000 |

सुजित ठाकुरले माथि दिइएको जानकारी लिइसकेपछि 2 वर्षमा 5% प्रतिवर्ष साधारण ब्याजदरले तिर्ने गरी सहकारीबाट रु. 2,00,000 सापटी लिएछन् र तुरुन्तै उक्त मूलधन उति नै समयका लागि नेपाल बैङ्कको मुद्दती खातामा लगेर जम्मा गरेछन् ।

- (क) सुजित ठाकुरले मुद्दती खातामा जम्मा गर्दा माथिको कुन ब्याजदरअनुसार जम्मा गर्नुपर्छ ?
 (ख) सुजित ठाकुरले 2 वर्षमा प्राप्त गर्ने जम्मा मिश्रधन कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) सहकारीलाई 2 वर्षपछि तिर्नुपर्ने जम्मा रकम कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) सुजित ठाकुरले 2 वर्षमा जम्मा कति रुपियाँ नाफा गरे होलान् ।

6. अनिस संयुक्त अरब इमिरेटमा 5 वर्ष काम गरी नेपाल फर्किएका छन् । उनले आफ्नो साथमा संयुक्त अरब इमिरेट दरिाम 60,000 लिएर आएका छन् । संयुक्त अरब इमिरेट दरिाम 1 बराबर नेपाली रु. 34.83 को दरमा उनले सबै दरिाम साटेछन् । सोही दिन नेपाल बैङ्क लिमिटेडको मुद्दती खातामा तल दिइएको दरअनुसार अर्धवार्षिक चक्रीयब्याज पाउने गरी 1 वर्षका लागि जम्मा गरेछन् ।

| जम्मा गर्ने समय | ब्याजको दर | कम्तीमा आवश्यक रकम |
|-------------------------|------------|--------------------|
| 6 महिनासम्म | 9% | Rs. 50,000 |
| 6 महिना देखि 1 वर्षसम्म | 10% | Rs. 50,000 |
| 1 वर्षदेखि 5 वर्षसम्म | 12% | Rs. 75,000 |

- (क) हाम्रो देशमा मुद्राको विनिमय दर कसले निर्धारण गर्छ ?
 (ख) अनिसले संयुक्त अरब इमिरेट दरिाम 60,000 सटही गर्दा कति नेपाली रुपियाँ पाए ।
 (ग) अनिसले कुन विकल्पअनुसार बैङ्कमा नगद जम्मा गरे होलान्, कारणसहित लेख्नुहोस् ।
 (घ) 1 वर्षपछि अनिसले बैङ्कबाट प्राप्त गर्ने जम्मा रकम कति होला ?

7. ई.सं. 2020 को अन्त्यमा काठमाडौँमा 4 आनाको एउटा घडेरीको मूल्य रु. 60,00,000 राखिएको थियो । ई.सं. 2021 को सुरुमा जग्गा किन्नेको अत्यधिक चापले गर्दा जग्गाको भाउ 10% ले बढेको थियो । तर ई.सं. 2022 को अन्त्यमा देशमा आर्थिक मन्दीका कारणले जग्गाको भाउ 4% ले घटाइयो भने,

- (क) चलन चल्तीको सङ्केतअनुसार $P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T - P$ ले के जनाउँछ ।

- (ख) ई.सं. 2022 को अन्त्यमा सो घडेरीको मूल्य कति भए होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) ई.सं. 2022 मा 4% ले घट्नुको साटो 5% ले घटेको भए जग्गा बेच्ने मानिसलाई कति घाटा हुन्थ्यो होला, गणना गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. कुलबहादुर वैदेशिक रोजगारीमा जाने निर्णय गरी एउटा सहकारी संस्थाबाट 2 वर्षका लागि 15% प्रतिवर्ष वार्षिक चक्रीय ब्याजदरमा रु. 2,50,000 ऋण लिए । 1 वर्षपछि उनले आफ्नो कमाइबाट बचेको मलेसियन रिङ्गेट 7,000 ऋण तिर्नका लागि आफ्नो घरमा पठाइदिए । मलेसियन रिङ्गेट 1 = नेपाली रुपियाँ 28.58 को दरमा उनको श्रीमतीले सबै मलेसियन रिङ्गेट साटेर उक्त सहकारी संस्थाबाट आफ्नो श्रीमान् बिदेश जाँदा लागेको ऋण घटाइन् । बाँकी सावाँ र ब्याज सोही ब्याजदरअनुसार अर्को 1 वर्षपछि बुझाउँछिन् भने,

- (क) वार्षिक चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) 1 वर्षपछि तिर्नुपर्ने जम्मा रकम कति भएको रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) मलेसियन रिङ्गेट 7,000 बराबर कति नेपाली रुपियाँ हुन्छ ?
 (घ) अन्तिममा सबै ऋण चुक्ता गर्न उनले कति रकम बुझाउनु पर्छ ?

9. एक जना व्यक्तिले वार्षिक 10% चक्रीय ब्याजदरमा रु. 1,50,000 दुई वर्षका लागि ऋण लिए । ब्याज र ऋण कही कम गर्न उनले एक वर्षको अन्त्यमा रु. 85,000 तिरेछन् ।

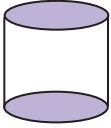
- (क) अब ऋण चुक्ता गर्न उनले दोस्रो वर्षका अन्त्यमा कति रुपियाँ तिर्नु पर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) दुई वर्षमा उनले तिरेको जम्मा ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) यदि उनले लिएको ऋण रकम दोस्रो वर्षका अन्त्यमा मात्र तिरेको भए कति ब्याज बढी वा कम तिर्नुपर्थ्यो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

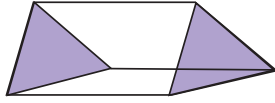
- (क) 4 पटक (ख) पहिलो विकल्पअनुसार
- (क) $P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right]$ (ख) 10% (ग) 9917.35
- (क) वृद्धि दर (ख) रु. 1,15,20,000 (ग) रु. 1,72,80,000 (घ) हुँदैन, 3 वर्ष
- (ख) रु. 121 (ग) रु. 3,30,000 (घ) रु. 33,000 नोक्सान
- (क) 7.5 % (ख) रु. 2,31,730.08 (ग) रु. 2,20,000 (घ) रु. 11,730.083
- (क) नेपाल राष्ट्र बैङ्क (ख) 20,89,800 (ग) 10 % (घ) रु. 23,04,004.5
- (क) वृद्धि (ख) रु. 63,36,000 (ग) रु. 66,000 (घाटा)
- (ख) रु. 2,87,500 (ग) रु. 2,00,060 (घ) रु. 1,00,556
- (क) रु. 88,000 (ख) रु. 23,000 (ग) रु. 8,500 बढी

5.0 पुनरवलोकन (Review)

उपयुक्त सङ्ख्याका समूहमा बसी तल दिइएका जस्तै एक एकओटा ठोस वस्तु लिनुहोस् । उक्त ठोस वस्तुहरूको अवलोकन गरी तलका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :



(अ)



(आ)



(इ)



(ई)

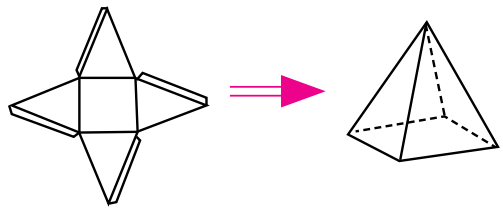
- (क) चित्र (अ) मा बेलनाको आधारको अर्धव्यास 7 cm र उचाइ 10 cm भए वक्र सतह र पूरा सतहको क्षेत्रफल कति कति हुन्छ ?
- (ख) चित्र (आ) मा प्रिज्मको आधारको क्षेत्रफल 24 cm^2 र लम्बाइ 8 cm भए उक्त प्रिज्मको आयतन कति होला ?
- (ग) चित्र (इ) मा गोलाको आयतन 616 cm^3 भए उक्त गोलाको अर्धव्यास कति होला ?
- (घ) चित्र (ई) मा गोलाको अर्धव्यास बराबर भए गोलाको सतहको क्षेत्रफल र अर्धगोलाको पूरा सतहको क्षेत्रफलको अनुपात कति हुन्छ ?

5.1.1 पिरामिडको परिचय (Introduction of Pyramid)

क्रियाकलाप 1

तल चित्रमा वर्ग आधार भएको पिरामिडको जाली दिइएको छ । कागजबाट पिरामिड कसरी बनाउन सकिनेला ?

जोडीमा एक एकओटा आयतकार कागज लिनुहोस् । उक्त कागजमा दिइएको चित्रमा जस्तै गरी वर्ग आधार भएको पिरामिडको जाली बनाउनु होस् र कैंचीको सहायताबाट काटेर निकाल्नुहोस् । गमको प्रयोग गरी छड्के सतहहरूलाई एउटा साभ्ना शीर्षबिन्दुमा जोडेर नमुना वर्ग आधार भएको पिरामिड बनाउनुहोस् ।

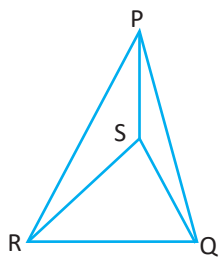


यसरी तयार गरिएका नमूना सामग्री अवलोकन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर भन्नुहोस् :

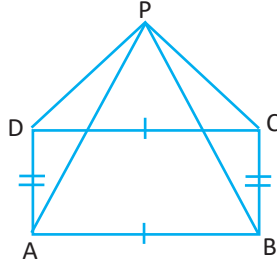
- (क) कतिओटा सतहहरू रहेछन् ?
- (ख) कुन कुन आकारका सतहहरू रहेछन् ?
- (ग) शीर्षबिन्दुहरू कतिओटा रहेछन् ?
- (घ) किनाराहरू कतिओटा छन् ?

क्रियाकलाप 2

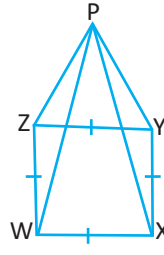
उपयुक्त सङ्ख्यामा समूहमा बसी तल दिइएका जस्तै एक एकओटा कागजबाट वा सिसाबाट वा काठबाट बनेका ठोस वस्तुहरूको नमूना लिनुहोस् । उक्त वस्तुहरूको अवलोकन गरी तलका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



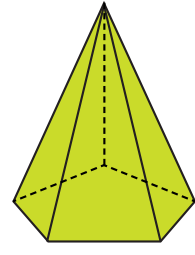
(अ)



(आ)



(इ)



(ई)

- (क) आधारहरू कुन कुन आकारका छन् ?
- (ख) आधारबाहेक अन्य सतहहरू पनि छन् ? तिनीहरू कुन कुन आकारका छन् ?
- (ग) कतिओटा शीर्षबिन्दुहरू छन् ?
- (घ) कुन कुन सतहहरू अनुरूप छन् ?
- (ङ) हरेक ठोस नमूनाहरूको किनारा कति कति ओटा छन् ?

दिइएका ठोस आकृतिहरू पिरामिडका हुन् । सबै पिरामिडमा आधारको सतह बहुभुज छन् । पिरामिडमा आधारबाहेक त्रिभुजाकार छड्के सतहहरू (Lateral Surface) हुन्छन् । समकोणी नियमित बहुभुजाकार आधार भएका पिरामिडका सतहहरू आपसमा अनुरूप हुन्छन् । छड्के सतहको एउटा साभ्ना शीर्षबिन्दु हुन्छ । साथै ठाडो उचाइ आधारको सतहसँग लम्ब पनि हुन्छ ।

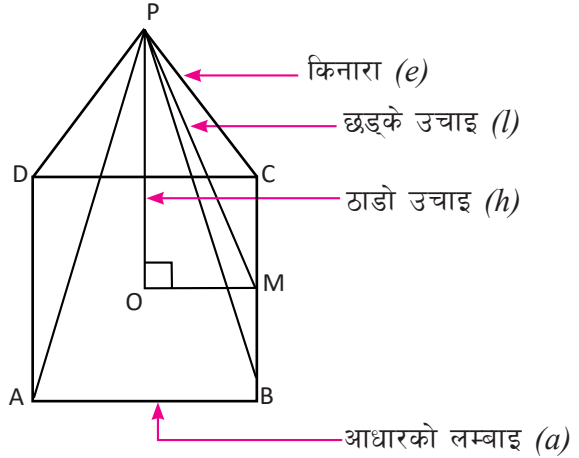
आधार बहुभुज भएको र छड्के सतहहरूको एउटा साभ्ना शीर्षबिन्दु भएको त्रिआयामिक (three dimensional) ठोस वस्तुलाई पिरामिड (pyramid) भनिन्छ । आधारको बहुभुजको प्रकारअनुसार पिरामिडको नामाकरण गरिन्छ, जस्तै: त्रिभुज आधार भएको पिरामिड, वर्ग आधार भएको पिरामिड ।

5.1.2 परामिडका भागहरू (Parts of Pyramid)

क्रियाकलाप 3

चित्रमा वर्ग आधार भएको पिरामिडको चित्र दिइएको छ। दिइएको चित्रको अवलोकन गरी निम्नलिखित प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

- पिरामिडमा कुन कुन भागहरू हुन्छन् ?
- पिरामिडमा ठाडो उचाइ भन्नाले के बुझिन्छ ?
- छड्के उचाइ के लाई भनिन्छ ?
- पिरामिडमा के लाई किनारा भनिन्छ ?
- किनारा, छड्के उचाइ, ठाडो उचाइ र आधारको भुजाको लम्बाइबिचको कस्तो सम्बन्ध हुन्छ ?



यहाँ किनारा ' e ', छड्के उचाइ ' l ', ठाडो उचाइ ' h ' र आधारको भुजाको लम्बाइ ' a ' छ।

अब चित्रबाट,

समकोण $\triangle POM$ मा

$$(PM)^2 = (PO)^2 + (OM)^2 \quad [\because \text{पाइथागोरस साध्यअनुसार}]$$

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad [\because OM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a]$$

त्यसै गरी समकोण $\triangle PMC$ मा

$$(PC)^2 = (PM)^2 + (MC)^2 \quad [\because \text{पाइथागोरस साध्यअनुसार}]$$

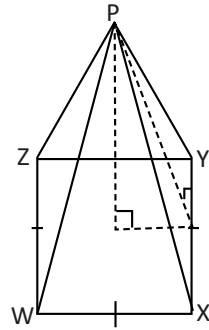
$$e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad [MC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a]$$

5.1.3 वर्गाधार परामिडको सतहको क्षेत्रफल (Surface Area of Based Pyramid)

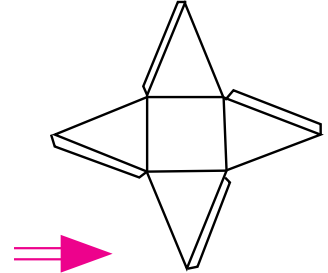
क्रियाकलाप 4

चित्रमा वर्ग आधार भएको पिरामिड र त्यसलाई खोल्दा बनेको जाली दिइएको छ, जसको छड्के उचाइ (l) र आधार भुजाको लम्बाइ (a) छ । दिइएको चित्रहरूको अवलोकन गरी निम्नलिखित प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

- पिरामिडमा कतिओटा त्रिभुजाकार सतहहरू छन् ?
- के सबै त्रिभुजाकार सतहहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ?
- पिरामिडमा के कस्ता सतहहरू हुन्छन् र तिनीहरूको क्षेत्रफल कति कति हुन्छन् ?
- चित्रमा कतिओटा किनारा छन् ?



पिरामिड



पिरामिडको जाली

यहाँ दिइएको पिरामिडको आधार वर्ग भएको हुँदा,

आधारको क्षेत्रफल = वर्गको क्षेत्रफल

$$= (\text{भुजाको लम्बाइ})^2 = a^2$$

पिरामिडमा त्रिभुजाकार छड्के सतह हुन्छन् ।

$$\begin{aligned} \text{तसर्थ एउटा छड्के सतहको क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{उचाइ} \\ &= \frac{1}{2} \times a \times l \quad [\because \text{पिरामिडको छड्के उचाइ} \\ &\quad \text{त्रिभुजाका लागि ठाडो उचाइ हुन्छ}] \end{aligned}$$

पिरामिडमा 4 ओटा त्रिभुजाकार छड्के सतहहरू हुन्छन् र ती सबै त्रिभुजाका क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् ।

$$\begin{aligned} \text{तसर्थ पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल} &= 4 \left(\frac{1}{2} \times a \times l \right) \\ &= 2al \end{aligned}$$

वर्ग आधार भएको पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) = $2al$

$$\begin{aligned} \text{पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA)} &= \text{आधारको क्षेत्रफल} + \text{छड्के सतहको क्षेत्रफल} \\ &= a^2 + 2al \end{aligned}$$

उदाहरण 1

वर्ग आधार भएको एउटा पिरामिडको आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 8 cm र छड्के उचाइ (l) = 3 cm छ भने उक्त पिरामिडको छड्के सतह र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ आधारको भुजाको लम्बाइ (a) = 8 cm

छड्के उचाइ (l) = 3 cm

हामीलाई थाहा छ आधारको क्षेत्रफल = $a^2 = (8 \text{ cm})^2 = 64 \text{ cm}^2$

छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) = $2al = 2 \times 8 \times 3 = 48 \text{ cm}^2$

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = आधारको क्षेत्रफल + छड्के सतहको क्षेत्रफल
= $64 \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2 = 112 \text{ cm}^2$

तसर्थ उक्त पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल 112 cm^2 रहेछ ।

उदाहरण 2

वर्ग आधार भएको एउटा पिरामिडको आधारको भुजाको लम्बाइ 10 cm र किनाराको लम्बाइ 13 cm छ । उक्त पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ वर्ग आधार भएको पिरामिडमा,

आधारको भुजाको लम्बाइ (a) = 10 cm

किनाराको लम्बाइ (e) = 13 cm

पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

हामीलाई थाहा छ $e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\text{अथवा, } (13)^2 = l^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

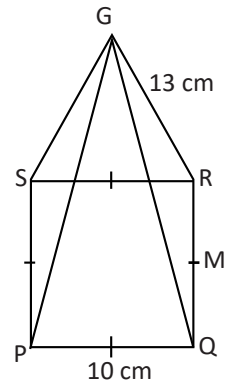
$$\text{अथवा, } 169 = l^2 + 25$$

$$\text{अथवा, } 169 - 25 = l^2$$

$$\text{अथवा, } 144 = l^2$$

$$\therefore l = 12 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{छड्के उचाइ } (l) = 12 \text{ cm}$$



हामीलाई थाहा छ आधारको क्षेत्रफल (A) = $a^2 = (10)^2 = 100 \text{ cm}^2$

छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) = $2al = 2 \times 10 \times 12 = 240 \text{ cm}^2$

अब पूरा सतहको क्षेत्रफल (LSA) = आधारको क्षेत्रफल (A) + छड्के सतहको क्षेत्रफल
 $= 100 + 240 = 340 \text{ cm}^2$

अतः उक्त पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल 340 cm^2 रहेछ ।

उदाहरण 3

वर्ग आधार भएको एउटा पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल 144 cm^2 र छड्के उचाइ 5 cm छ भने उक्त पिरामिडको ठाडो उचाइ र किनाराको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ वर्ग आधार भएको पिरामिडमा,

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = 144 cm^2

छड्के उचाइ (l) = 5 cm

ठाडो उचाइ (h) = ?

किनाराको लम्बाइ (e) = ?

हामीलाई थाहा छ,

पूरा सतहको क्षेत्रफल = $a^2 + 2al$

$$\text{अथवा, } 144 = a^2 + 2a \times 5$$

$$\text{अथवा, } 144 = a^2 + 10a$$

$$\text{अथवा, } a^2 + 10a - 144 = 0$$

$$\text{अथवा, } a^2 + (18 - 8)a - 144 = 0$$

$$\text{अथवा, } a^2 + 18a - 8a - 144 = 0$$

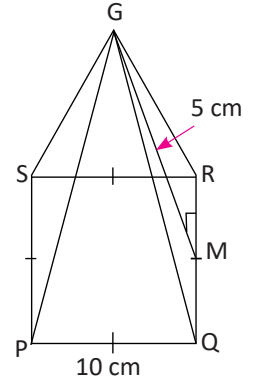
$$\text{अथवा, } a(a + 18) - 8(a + 18) = 0$$

$$\text{अथवा, } (a + 18)(a - 8) = 0$$

या त, $a + 18 = 0 \therefore a = -18$

अथवा, $a - 8 = 0 \therefore a = 8$

अतः आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 8 cm



[\therefore लम्बाइ कहिल्यै ऋणात्मक हुँदैन, त्यसैले a को मान -18 हुन सक्दैन ।]

$$\text{फेरि } l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } 5^2 = h^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } 25 = h^2 + 16$$

$$\text{अथवा, } 25 - 16 = h^2$$

$$\text{अथवा, } 9 = h^2$$

$$\text{अथवा, } h = 3 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{ ठाडो उचाइ (h) = 3 cm}$$

$$\text{त्यस्तै, } e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } e^2 = 5^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } e^2 = 25 + 16$$

$$\text{अथवा, } e^2 = 41$$

$$\therefore e = \sqrt{41} \text{ cm}$$

अतः उक्त पिरामिडको ठाडो उचाइ (h) = 3 cm र किनाराको लम्बाइ (e) = $\sqrt{41}$ cm रहेछ ।

उदाहरण 4

दिइएको चित्र वर्ग आधार भएको एउटा पिरामिड हो । उक्त पिरामिडको आधारको लम्बाइ 12 cm र छड्के सतहको क्षेत्रफल 240 cm^2 छ । उक्त पिरामिडको छड्के उचाइ र ठाडो उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ आधारको लम्बाइ (a) = 12 cm

छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) = 240 cm^2

ठाडो उचाइ (h) = ?

छड्के उचाइ (l) = ?

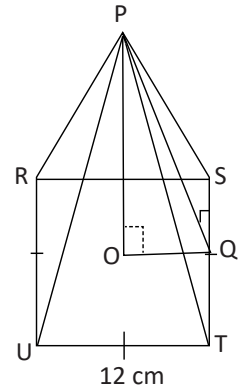
हामीलाई थाहा छ,

छड्के सतहको क्षेत्रफल = $2al$

$$\text{अथवा, } 240 = 2 \times 12 \times l$$

$$\text{अथवा, } \frac{240}{2 \times 12} = l$$

$$\therefore l = 10 \text{ cm}$$



$$\text{अब } l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } (10)^2 = h^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } 100 = h^2 + 36$$

$$\text{अथवा, } 100 - 36 = h^2$$

$$\text{अथवा, } 64 = h^2$$

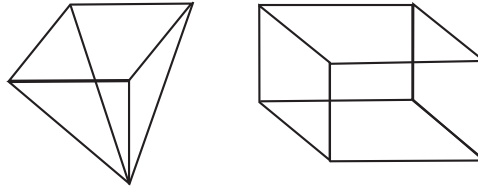
$$\therefore h = 8 \text{ cm}$$

तसर्थ दिइएको पिरामिडको छड्के उचाइ (l) = 10 cm र ठाडो उचाइ (h) = 8 cm रहेछ ।

5.1.4 पिरामिडको आयतन (Volume of Pyramid)

क्रियाकलाप 5

कार्ड पेपरबाट समान उचाइ र आधारको क्षेत्रफल बराबर भएको एउटा वर्ग आधार भएको पिरामिड र घन बनाउनुहोस् (पिठो वा बालुवा भरेर खन्याउन मिल्ने) । उक्त पिरामिडमा पिठो वा बालुवा भरेर घनमा खन्याउने हो भने कति पटकमा उक्त घन भरिन्छ, होला, अनुमान गर्नुहोस् । अनुमान मिले नमिलेको परीक्षण गरी निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



यहाँ पिरामिडमा पिठो वा बालुवा भरेर तीन पटक खन्याउदा घन भरियो । यसबाट उक्त घनको आयतन वर्ग आधार भएको पिरामिडको तीन गुणा हुन्छ भन्न सकिन्छ ।

तसर्थ $3 \times$ वर्ग आधार भएको पिरामिडको आयतन = घनको आयतन

$$\begin{aligned} \text{अर्थात् वर्ग आधार भएको पिरामिडको आयतन} &= \frac{1}{3} \text{ घनको आयतन} \\ &= \frac{1}{3} \text{ आधारको क्षेत्रफल} \times \text{उचाइ} \end{aligned}$$

वर्ग आधार पिरामिडको आधारको भुजाको लम्बाइ ' a ' र उचाइ ' h ' भए,

$$\begin{aligned} \text{उक्त पिरामिडको आयतन} &= \frac{1}{3} \text{ आधारको क्षेत्रफल} \times \text{उचाइ} \\ &= \frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3} \times a^2 \times h \end{aligned}$$

उदाहरण 5

चित्रमा दिइएको वर्ग आधार भएको पिरामिडको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

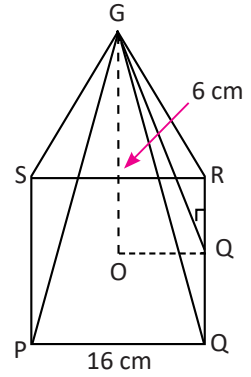
आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 16 cm

ठाडो उचाइ (h) = 6 cm

पिरामिडको आयतन (V) = ?

हामीलाई थाहा छ आधारको क्षेत्रफल (A) = $a^2 = (16)^2 = 256 \text{ cm}^2$

अब पिरामिडको आयतन (V) = $\frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3} \times 256 \times 6 = 512 \text{ cm}^3$



उदाहरण 6

वर्ग आधार भएको एउटा पिरामिडको आयतन 384 cm^3 र आधार भुजाको लम्बाइ 12 cm छ । सो पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ वर्ग आधार भएको पिरामिडमा,

पिरामिडको आयतन (V) = 384 cm^3

आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 12 cm

छड्के सतहको क्षेत्रफल = ?

हामीलाई थाहा छ पिरामिडको आयतन (V) = $\frac{1}{3} \times a^2 \times h$

$$\text{अथवा, } 384 = \frac{1}{3} \times (12)^2 \times h$$

$$\text{अथवा, } 384 = \frac{1}{3} \times 144 \times h$$

$$\text{अथवा, कक } \frac{384}{144} \times 3 = h$$

$$\therefore h = 8 \text{ cm}$$

$$\text{फेरि } l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } l^2 = 8^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } l^2 = 64 + 36$$

$$\text{अथवा, } l^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$\therefore l = 10 \text{ cm}$$

फेरि छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) = $2al = 2 \times 12 \times 10 = 240 \text{ cm}^2$

तसर्थ उक्त पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) = 240 cm^2 रहेछ ।

उदाहरण 7

एउटा वर्ग आधार भएको पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल 96 cm^2 र आधार भुजाको लम्बाइ 6 cm छ ।
उक्त पिरामिडको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

वर्ग आधार भएको पिरामिडमा,

$$\text{पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA)} = 96 \text{ cm}^2$$

$$\text{आधार भुजाको लम्बाइ (a)} = 6 \text{ cm}$$

$$\text{पिरामिडको आयतन (V)} = ?$$

सूत्रानुसार,

$$\text{पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA)} = a^2 + 2al$$

$$\text{अथवा, } 96 = 6^2 + 2 \times 6 \times l$$

$$\text{अथवा, } 96 - 36 = 12 \times l$$

$$\text{अथवा, } 60 = 12 \times l$$

$$\text{अथवा, } l = \frac{60}{12}$$

$$\therefore l = 5 \text{ cm}$$

$$\text{त्यस्तै } l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } 5^2 = h^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } 25 = h^2 + 9$$

$$\text{अथवा, } 25 - 9 = h^2$$

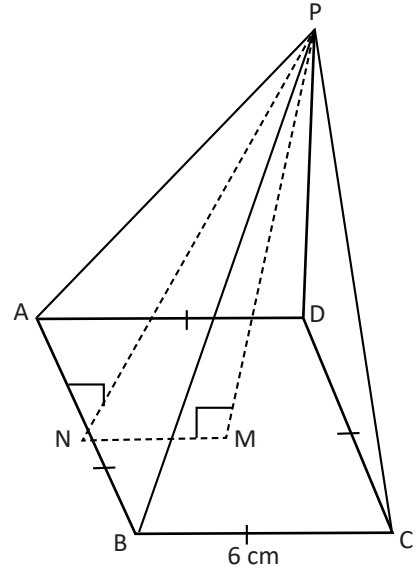
$$\text{अथवा, } h^2 = 16$$

$$\therefore h = 4 \text{ cm}$$

$$\text{अब पिरामिडको आयतन (V)} = \frac{1}{3} \text{ आधारको क्षेत्रफल} \times \text{उचाइ}$$

$$= \frac{1}{3} \times 6^2 \times 4 = 48 \text{ cm}^3$$

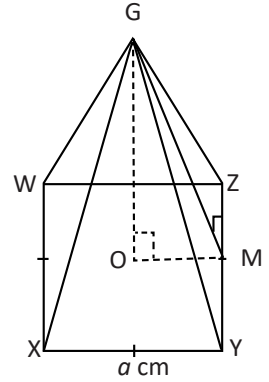
अतः उक्त पिरामिडको आयतन (V) = 48 cm^3 रहेछ ।



अभ्यास 5.1

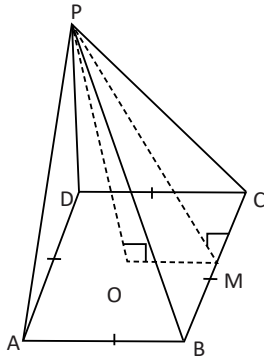
1. दिइएको वर्ग आधार भएको पिरामिडको चित्र अध्ययन गरी तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

- (क) GO र GM ले पिरामिडमा के जनाउँछ ?
 (ख) यदि $XY = a$ cm छ भने OM को लम्बाइ कति हुन्छ ?
 लेख्नुहोस् ।
 (ग) यदि पिरामिडको ठाडो उचाइ = h , छड्के उचाइ = l र आधारको भुजा = a भए यिनीहरूको सम्बन्धलाई गणितीय रूपमा लेख्नुहोस् ।
 (घ) दिइएको पिरामिडमा GZ, GY, GX र GW लाई के भनिन्छ ? के यिनीहरू एकआपसमा बराबर हुन्छन् ?

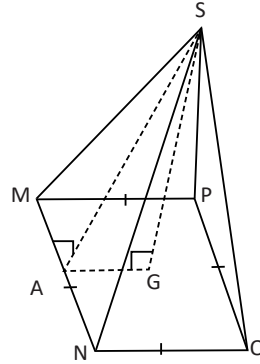


2. (क) आधार भुजा ' m ' cm र छड्के उचाइ ' k ' cm भएको वर्ग आधार भएको पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
 (ख) आधार भुजा ' p ' cm र छड्के उचाइ ' q ' cm भएको वर्ग आधार भएको पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?
 (ग) वर्ग आधार भएको पिरामिडको आधार भुजाको लम्बाइ ' r ' cm र ठाडो उचाइ ' h ' cm छ भने उक्त पिरामिडको आयतन r र h को रूपमा लेख्नुहोस् ।
 (घ) एउटा वर्ग आधार भएको पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल ' z ' sq. unit र पूरा सतहको क्षेत्रफल ' y ' sq. unit छन् । सो पिरामिडको त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. (क) एउटा वर्ग आधार भएको पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल 64 cm² र उचाइ 15 cm भए त्यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) एउटा वर्ग आधार भएको पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल 285 cm² र त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल 192 cm² छन् । उक्त पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) तल वर्ग आधार भएका पिरामिडको चित्र दिइएको छ । तलका प्रश्नहरूको हल गर्नुहोस् ।

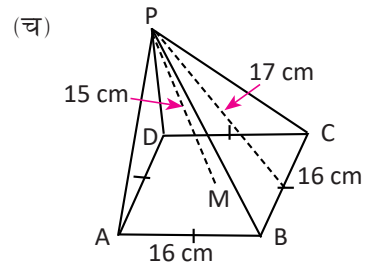
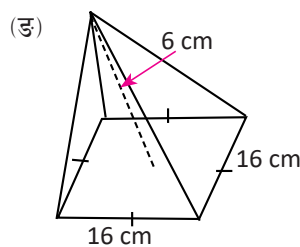
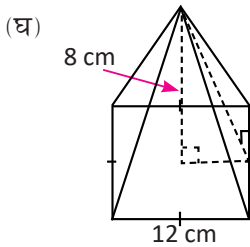
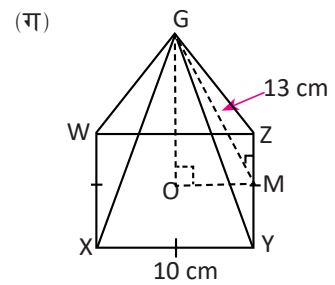
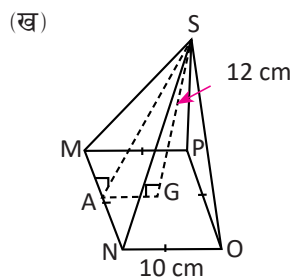
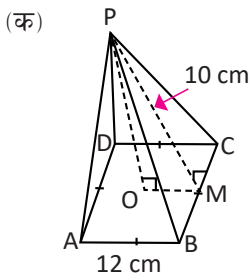
(अ) यदि $PO = 8$ cm र $OM = 12$ cm भए, छड्के उचाइ र किनारको लम्बाइ कति कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



(आ) यदि $SA = 13$ cm र $NO = 10$ cm भए, ठाडो उचाइ र किनारको लम्बाइ कति कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



4. दिइएको नापअनुसार पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



- सोफियासँग भएको एउटा भाँडाको आधार वर्गाकार पिरामिड आकारमा छ । यसमा उनले आफूले पिउने पानी भर्नुपर्ने छ । जसको उचाइ 25 cm र आधारको लम्बाइ 30 cm छ भने उक्त भाँडामा कति लिटर पानी अटाउँछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- पूरा सतहको क्षेत्रफल 800 cm² भएको एउटा वर्ग आधार भएको पिरामिडको आधारको भुजा 16 cm छ । उक्त पिरामिडको त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- वर्ग आधार भएको पिरामिड आकारमा रहेको एउटा एक्युरियमको पूरा सतहको क्षेत्रफल 400 sq. inch र छड्के उचाइ 15 inch छ भने उक्त एक्युरियमको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. इजिप्टमा घुम्न गएको पर्यटकहरूको एउटा समूह गाइडको सहायताबाट पिरामिड भएको ठाउँमा पुग्यो । त्यसपछि, वर्ग आधार भएको पिरामिड देखाउँदै गाइडले भन्यो कि; यसको आधारको सतहको क्षेत्रफल 3600 m^2 र यसको उचाइ 50 m छ । यो सुनेपछि, पर्यटकको समूहमा भएका एक जना गणित विषयका विज्ञले उक्त पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनु भएछ भने त्यो कति थियो होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. पर्यटकको समूह राख्नका लागि एउटा होटलले वर्ग आधार भएको पिरामिड आकारको टेन्ट निर्माण गर्नु पर्ने छ । जसको आधारका हरेक भुजा 32 m र उचाइ 50 m छन् ।

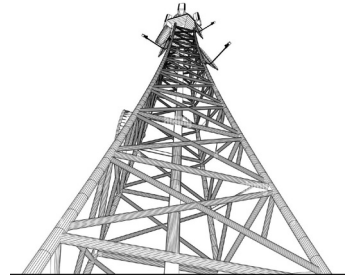
(क) यो टेन्ट बनाउन कति वर्गमिटर कपडा आवश्यक होला ?

(ख) एक वर्गमिटर कपडाको रु. 500 का दरले उक्त टेन्ट बनाउन जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

10. सँगै देखाइएको चित्र आशारामको जग्गामा नेपाल दूरसञ्चार संस्थानले निर्माण गरेको टेलिफोनको टावर हो । वर्गाकार आधार भएको उक्त टावरको छड्के उचाइ 50 ft र ठाडो उचाइ 40 ft छ ।

(क) उक्त टावरले ओगटेको जग्गाको क्षेत्रफल कति होला ?

(ख) यदि प्रतिवर्ष 1 sq.ft को भाडा रु. 50 भए 20 वर्षमा नेपाल दूरसञ्चार संस्थानले आशारामलाई भाडाबापत कति रकम बुझाउनु पर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।



11. देखाइएको पिरामिड आकारमा बनेको यो चकलेटको आधार वर्गाकार छ । जसको पूरा सतहको क्षेत्रफल 1920 cm^2 र आधारको लम्बाइ 30 cm छ । यसको ठाडो उचाइ कति हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।



खुला प्रश्न

१. एउटा घरको चारकुने कोठाको चित्र बनाई सोका भागहरू नापसहित देखाउनुहोस् । ती भागहरूको भित्तामा रङ लगाउन र भुईँमा कार्पेट विच्छयाउन कति खर्च लाग्छ ? लगाउने सामानको दर, मूल्य आफ्नो ठाउँमा कति छ उल्लेख गरी हिसाब गरेर देखाउनुहोस् । यदि तपाईंले पत्ता लगाएको खर्च घटाउनु परेमा के के गर्न सक्नुहुन्छ ? आफ्नो उत्तर तर्किक रूपमा उल्लेख गर्नुहोस् ।

२. कुनै धातुको आयतन निश्चित हुन्छ तर सो धातुबाट बनेको सामानको क्षेत्रफल फरक फरक हुन सक्छ भन्ने कुरामा तपाईं सहमत हुनुहुन्छ ? जतिसक्दो धेरै र फरक फरक उदाहरणबाट आफ्नो उत्तर उदाहरणसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।

३. खाली ठाउँ भरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

एउटा बेलनाको आधारको अर्धव्यास, बेलनाको उचाइ

सो बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । यदि सो बेलनाको वक्र सतहमा कागज टाँस्नु छ भने कति खर्च लाग्छ ? कागज टाँस्दा लाग्ने खर्च के के हुन्छ ? प्रत्येकको दर उल्लेख गरी आफ्नो उत्तर दिनुहोस् ।

परियोजना कार्य

चार्ट पेपरबाट वर्ग आधार भएका फरक फरक नापका वर्ग आधार भएका पिरामिड निर्माण गर्नुहोस् । तपाईंले निर्माण गरेका पिरामिडका विभिन्न भागको नाप लिई उक्त पिरामिडको,

- (क) आधारको क्षेत्रफल
- (ख) त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल
- (ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल
- (घ) आयतन पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस्
2. (क) $(m^2 + 2mk) \text{ cm}^2$ (ख) $2pq \text{ cm}^2$
(ग) $\frac{1}{3} r^2 h \text{ cm}^3$ (घ) $(y - z) \text{ sq. units}$
3. (क) 320 cm^3 (ख) 93 cm^2
(ग) (अ) $4\sqrt{13} \text{ cm}$ र $4\sqrt{22} \text{ cm}$ (आ) $12 \text{ cm}, \sqrt{194} \text{ cm}$
4. (क) 384 cm^2 र 384 cm^3 (ख) 360 cm^2 र 400 cm^3
(ग) 360 cm^2 र 400 cm^3 (घ) 384 cm^2 र 384 cm^3
(ङ) 576 cm^2 र 512 cm^3 (च) 800 cm^2 र 1280 cm^3
5. 7.5 l 6. 544 cm^2 र 1280 cm^3
7. 471.40 cu.inch 8. 10597.14 m^2
9. 3359.84 m^2 र रु. 1679923.81
10. (क) 3600 sq.ft (ख) रु. $36,00,000$ 11. 8 cm

5.2.1 सोलीको परिचय (Introduction of cone)

क्रियाकलाप 6

चित्रमा आइसक्रिमको सोली र जन्म दिनमा प्रयोग गरिने टोपी दिइएको छ ।

के यिनीहरूका आकार समान छन् ? यी कस्ता आकारका ठोस वस्तुहरू हुन् ?

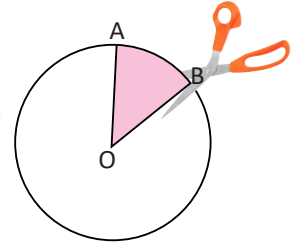
जन्मदिनमा प्रयोग गरिने टोपीलाई चित्रमा देखाएको जस्तै गरी कैँचीले काट्नुहोस् र त्यसलाई फिजाउनुहोस्, के बन्थो ?



सोलीको वक्र सतहको भागलाई काटेर फिजाउँदा वृत्तको क्षेत्रक (sector) बन्छ ।

क्रियाकलाप 7

- (क) एउटा आयताकार कागजमा एउटा वृत्त खिच्नुहोस् ।
 (ख) चित्रमा देखाइएको जस्तै गरी वृत्तको केन्द्रमा $\angle AOB$ खिचेर क्षेत्रक AOB काट्नुहोस् ।
 (ग) अब उक्त क्षेत्रकलाई मोडेर AO र BO लाई जोड्नुहोस् । केको नमुना बन्थो होला ? लेख्नुहोस् ।



चाप AB को नाप बराबरको परिधि हुने वृत्ताकार आधार भएको सोली बन्थो ।

क्रियाकलाप 8

चित्रमा एउटा सोली देखाइएको छ । जसमा आधारको वृत्तको अर्धव्यास $OB = r$ cm छ । शीर्षबिन्दु A देखि वृत्तको केन्द्रमा जोडिएको रेखा AO लाई सोलीको उचाइ (h) भनिन्छ, र त्यस्तै रेखा AC र AB लाई सोलीको छड्के उचाइ (l) भनिन्छ ।

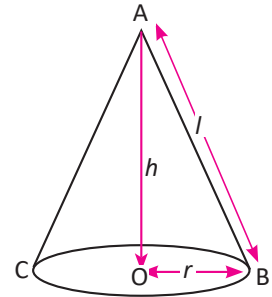
अब सोलीको उचाइ, आधारको अर्धव्यास र छड्के उचाइबिच कस्तो सम्बन्ध हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ समकोण $\triangle AOB$ मा

$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 \quad [\because \text{पाइथागोरस साध्यअनुसार}]$$

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$\therefore l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

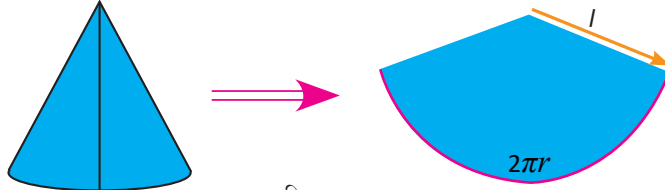


सोलीको छड्के उचाइ सोलीको उचाइको वर्ग र आधारको अर्धव्यासको वर्गको योगफलको वर्गमूलसँग बराबर हुन्छ, अर्थात् $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

सोलीको सतहको क्षेत्रफल (Surface Area of Cone)

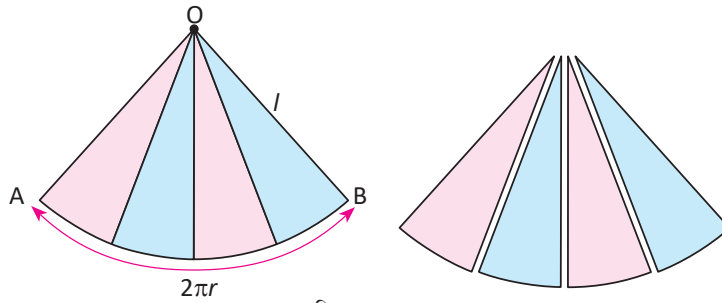
क्रियाकलाप 9

कागजबाट बनेको एउटा सोली लिनुहोस् र कैंचीको सहायताले चित्र (क) मा देखाइए जस्तै गरी काटेर पूर्ण रूपमा खोल्नुहोस् । यसरी सोलीको वक्र सतहको भागलाई काटेर फिँजाउँदा चित्रमा देखाएको जस्तै क्षेत्रक बन्ने छ । यसरी बनेको क्षेत्रकको लम्बाइ सोलीको आधारको परिधि $2\pi r$ हुन्छ ।



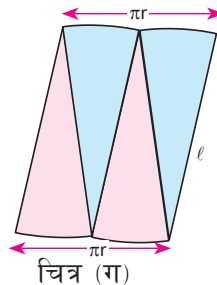
चित्र (क)

अब चित्र (ख) मा देखाइए जस्तै गरी क्षेत्रकलाई चारओटा सानो बराबर क्षेत्रकहरूमा काट्नुहोस् र दुईओटामा रातो रङ भर्नुहोस् ।



चित्र (ख)

अनि चित्र (ग) मा देखाइए जस्तै गरी साना क्षेत्रकहरूलाई विपरीत दिशामा मिलाएर राख्नुहोस् । एउटा समानान्तर चतुर्भुज बनेको देख्न सकिन्छ ।



चित्र (ग)

यहाँ,

यदि सोलीको आधारको अर्धव्यास ' r ' छड्के उचाइ ' l ' र ठाडो उचाइ ' h '
सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल

$$= \text{आधार} \times \text{उचाइ}$$

$$= \pi r \times l$$

सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = सोलीको आधारको क्षेत्रफल + वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)

$$= \pi r^2 + \pi r l$$

$$= \pi r(r + l)$$

आधारको अर्धव्यास 'r' छड्के उचाइ 'l' र ठाडो उचाइ 'h' भएको सोलीको,

$$\text{वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)} = \pi r \times l = \pi r l$$

$$\text{पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA)} = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

$$\left[\pi = \frac{22}{7} \right]$$

उदाहरण 1

दिइएको सोलीको आधारको क्षेत्रफल र वक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् : $\pi = \frac{22}{7}$

समाधान

यहाँ सोलीको ठाडो उचाइ (h) = 12 cm

सोलीको छड्के उचाइ (l) = 13 cm

सोलीको आधारको क्षेत्रफल = ?

सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल = ?

आधारको अर्धव्यास = r cm छ ।

चित्रमा,

समकोण ΔPOQ मा,

$$PQ^2 = PO^2 + OQ^2 \quad [\because h^2 = p^2 + b^2]$$

$$\text{अथवा, } 13^2 = 12^2 + r^2$$

$$\text{अथवा, } 169 - 144 = r^2$$

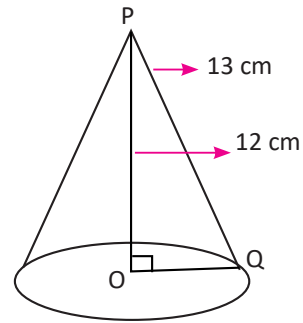
$$\text{अथवा, } r^2 = 25$$

$$\therefore r = 5 \text{ cm}$$

अब हामीलाई थाहा छ,

$$\text{आधारको क्षेत्रफल} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (5)^2 = 78.57 \text{ cm}^2$$

$$\text{सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल} = \pi r l = \frac{22}{7} \times 5 \times 13 = 204.28 \text{ cm}^2$$



उदाहरण 2

सोलीको आधारको व्यास 12 cm र यसको ठाडो उचाइ 8 cm पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

$$\pi = \frac{22}{7}$$

यहाँ सोलीको आधारको व्यास (d) = 12 cm

सोलीको आधारको अर्धव्यास (r) = $\frac{d}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm

सोलीको ठाडो उचाइ (h) = 8 cm

सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

$$\text{चित्रबाट } l^2 = h^2 + r^2$$

$$\text{अथवा, } l^2 = 8^2 + 6^2$$

$$\text{अथवा, } l^2 = 64 + 36$$

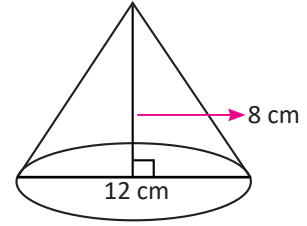
$$\text{अथवा, } l^2 = 100 \quad \therefore l = 10 \text{ cm}$$

अब सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल = $\pi r(r + l)$

$$= \left(\frac{22}{7}\right) \times 6 \times (6 + 10)$$

$$= 301.71 \text{ cm}^2$$

अत उक्त सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल 301.71 cm² रहेछ ।



उदाहरण 3

सोलीको आधारको अर्धव्यास र छड्के उचाइको योगफल 64 cm छ । यसको पूरा सतहको क्षेत्रफल

2816 cm² भए वक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् : $\pi = \frac{22}{7}$

समाधान

यहाँ पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = 2816 cm²

प्रश्नानुसार,

आधारको अर्धव्यास (r) + छड्के उचाइ (l) = 64 cm

$$\therefore r + l = 64$$

सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = ?

हामीलाई थाहा छ, सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल = $\pi r(r + l)$

$$\text{अथवा, } 2816 = \frac{22}{7} \times r \times 64$$

$$\text{अथवा, } 2816 \times 7 = r \times 22 \times 64$$

$$\text{अथवा, } r = \frac{2816 \times 7}{22 \times 64}$$

$$\therefore r = 14 \text{ cm}$$

r को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$14 + l = 64$$

$$\text{अथवा, } l = 64 - 14 = 50 \text{ cm}$$

$$\text{अब सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल} = \pi r l = \frac{22}{7} \times 14 \times 50 = 2200 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 4

सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल र वक्र सतहको क्षेत्रफल क्रमशः 1320 cm^2 र 704 cm^2 भए उक्त

सोलीका आधारको परिधिको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् : $\pi = \frac{22}{7}$

समाधान

यहाँ पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = 1320 cm^2

वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = 704 cm^2

आधारको परिधिको लम्बाइ (C) = ?

हामीलाई थाहा छ,

सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल = आधारको क्षेत्रफल + वक्र सतहको क्षेत्रफल

$$\text{अथवा, } 1320 = \pi r^2 + 704$$

$$\text{अथवा, } 1320 - 704 = \frac{22}{7} r^2$$

$$\text{अथवा, } \frac{616}{22} \times 7 = r^2$$

$$\text{अथवा, } r^2 = 196$$

$$\therefore r = 14 \text{ cm}$$

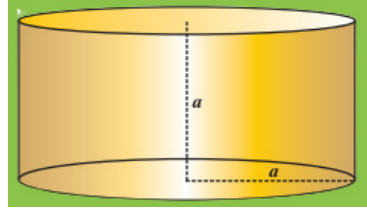
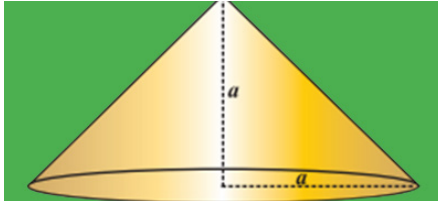
$$\text{अब परिधिको लम्बाइ (C)} = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = 88 \text{ cm}$$

तसर्थ उक्त सोलीको परिधिको लम्बाइ (C) = 88 cm रहेछ ।

5.2.2 सोलीको आयतन (Volume of Cone)

क्रियाकलाप 10

उपयुक्त समूहमा विभाजन भई वस्तुहोस् । हरेक समूहले चार्टपेपर प्रयोग गरी चित्रमा देखाए जस्तै: आधारको अर्धव्यास र उचाइ बराबर (मानौं a) भएको एउटा बेलना बनाउनुहोस् । साथै आधारको अर्धव्यास र ठाडो उचाइ बेलनाको अर्धव्यास र उचाइसँग बराबर (मानौं a) भएको एउटा सोली बनाउनुहोस् ।



यसरी बनाएको सोलीमा बालुवा वा धुलो माटो भर्नुहोस् । सो बालुवा वा धुलो माटोलाई सिलिन्डरमा खन्याउनुहोस् ।

(क) कति पटक खन्याउँदा सो बेलना बालुवा वा धुलो माटाले भरिन्छ ?

(ख) के यो तीन पटकमा भरिन्छ ?

पक्कै पनि बालुवा वा धुलो माटाले सोली भदैं खन्याउँदा तीन पटकमा सो सिलिन्डर भरिन्छ । त्यसैले

सोलीको आयतन (V) = $\frac{1}{3}$ बेलनाको आयतन

सोलीको आयतन (V) = $\frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ [बेलनाको आयतन = $\pi r^2 h$ हुन्छ ।

उदाहरण 5

दिइएको सोलीको आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् : $\pi = \frac{22}{7}$

समाधान

यहाँ सोलीको ठाडो उचाइ (h) = 24 cm

सोलीको छड्के उचाइ (l) = 26 cm

सोलीको आयतन (V) = ?

चित्रमा,

MAN एउटा समकोण त्रिभुज हो, त्यसैले पाइथागोरस साध्यअनुसार

$$AN = \sqrt{MN^2 - MA^2}$$

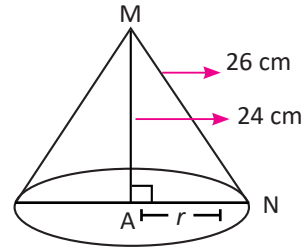
$$\text{अथवा, } r = \sqrt{26^2 - 24^2}$$

$$\text{अथवा, } r = \sqrt{676 - 576}$$

$$\therefore r = 10 \text{ cm}$$

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{सोलीको आयतन (V)} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (10)^2 \times 24 = 2514.28 \text{ cm}^3$$



उदाहरण 6

सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल 1158.3 cm^2 र छड्के उचाइ 19.5 cm भए उक्त सोलीको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् : $\pi = \frac{22}{7}$

समाधान

यहाँ वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA) = 1158.3 cm^2

छड्के उचाइ (l) = 19.5 cm

सोलीको आयतन (V) = ?

हामीलाई थाहा छ,

सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल = $\pi r l$

$$\text{अथवा, } 1158.3 \text{ cm}^2 = \frac{22}{7} \times r \times 19.5 \text{ cm}$$

$$\text{अथवा, } \frac{1158.3}{22 \times 19.5} \times 7 \text{ cm} = r$$

$$\text{अथवा, } r = 18.9 \text{ cm}$$

$$\text{अब, उचाइ (h)} = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(19.5)^2 - (18.9)^2} = 4.8 \text{ cm}$$

फेरि हामीलाई थाहा छ,

$$\text{सोलीको आयतन (V)} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (18.9)^2 \times 4.8 = 1796.25 \text{ cm}^3$$

अतः उक्त सोलीको आयतन (V) = 1796.25 cm^3 रहेछ ।

उदाहरण 7

आयतन $100\pi \text{ cm}^3$ भएको एउटा सोलीको आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात $5:12$ छ । उक्त सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् : $\pi = \frac{22}{7}$

समाधान

यहाँ आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात $5:12$ छ ।

मानौं, अर्धव्यास (r) = $5x$ र उचाइ (h) = $12x$

$$\text{आयतन (V)} = 100\pi \text{ cm}^3$$

वक्र सतहको क्षेत्रफल = ?

पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{सोलीको आयतन (V)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (5x)^2 \times 12x$$

$$\text{अथवा, } 100\pi = \frac{1}{3} \times \pi \times (5x)^2 \times 12x$$

$$\text{अथवा, } 300 = 300x^3$$

$$\therefore x = 1 \text{ cm}$$

त्यसैले अर्धव्यास (r) = $5 \times 1 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ र उचाइ (h) = $12 \times 1 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} \text{छड्के उचाइ (l)} &= \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} \\ &= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)} &= \pi r l = \frac{22}{7} \times 5 \times 13 \\ &= 204.28 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA)} &= \pi r(r + l) = \frac{22}{7} \times 5(5 + 13) \\ &= 282.85 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अभ्यास 5.2

1. दिइएको चित्रमा आधारको सतह कुन आकारमा छ ? चित्रमा दिइएको जानकारीको आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) l , h र r ले के जनाउछन्, लेख्नुहोस् ।

(ख) l , h र r को सम्बन्धलाई गणितीय रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ग) यदि $l = 13 \text{ cm}$ र $r = 5 \text{ cm}$ भए h को मान कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. (क) आधारको अर्धव्यास ' r 'cm र छड्के उचाइ ' l 'cm भएको सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

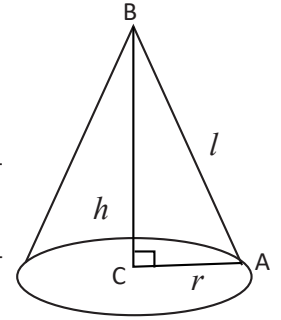
(ख) आधारको अर्धव्यास ' x 'cm र छड्के उचाइ ' y 'cm भएको सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? ' x ' र ' y ' को रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ग) आधारको व्यास ' p 'cm र ठाडो उचाइ ' q 'cm भएको सोलीको आयतन कति हुन्छ ?

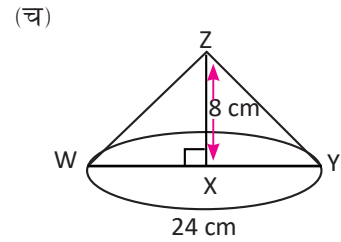
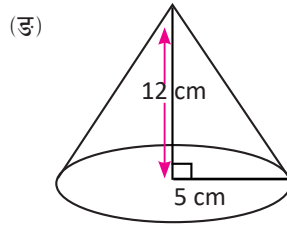
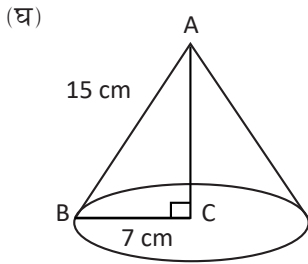
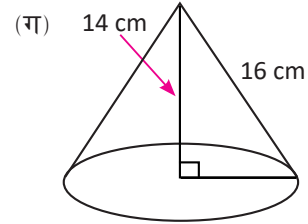
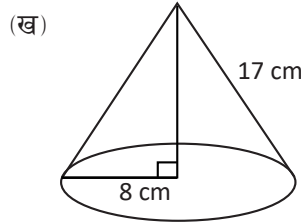
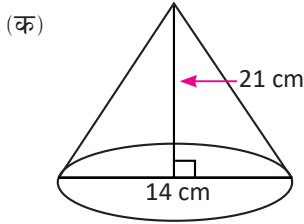
3. (क) एउटा सोलीको आधारको क्षेत्रफल 81 cm^2 र उचाइ 15 cm भए त्यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल 250 cm^2 र आधारको सतहको क्षेत्रफल 118 cm^2 छन् । उक्त सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) एउटा सोलीको छड्के उचाइ 5 cm र आधारको अर्धव्यास 4 cm भए यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



4. दिइएको जानकारीका आधारमा तल दिइएका सोलीहरूको वक्र सतहको क्षेत्रफल, पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :



- एउटा समकोणी सोलीको आयतन $100\pi \text{ cm}^3$ र उचाइ 12 cm भए उक्त सोलीको छड्के उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा सोली आकारको टेन्टको आयतन 1232 cm^3 र उक्त टेन्टको आधारको क्षेत्रफल 154 cm^2 भए टेन्टको आधारको अर्धव्यास र टेन्टको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- छड्के उचाइ 7 m भएको सोली आकारको टेन्ट बनाउन 77 m^2 प्लास्टिक चाहिन्छ भने सो टेन्टको आधारको क्षेत्रफल र परिमिति कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- व्यास 8 cm र ठाडो उचाइ 21 cm भएको सोलीको आयतन, छड्के सतहको क्षेत्रफल र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा ठोस सोलीको ठाडो उचाइ व्यासको तीनगुणा छ । उक्त सोलीको आयतन $54\pi \text{ cm}^3$ भए पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- दस कक्षामा अध्ययनरत एक जना विद्यार्थीले परियोजना कार्यअन्तर्गत काठबाट बनाएको सोलीको आधारको क्षेत्रफल 154 cm^2 छ । उक्त सोलीको उचाइ 14 cm छ । प्रति वर्ग मिटर रु. 1.50 को दरले आधार बाहेकका सतहमा रङ लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ ?
- पानीले भरिएको एउटा सोली आकारको भाँडाको उचाइ 21 cm र आधारको व्यास 14 cm छ । बराबर नापका दुईओटा अरू ठोस सोलीहरू डुबाउँदा उक्त भाँडाबाट एक तिहाइ पानी बाहिर पोखिन्छ भने ती डुबाइएका प्रत्येक सोलीको आयतन कति कति होला ?

12. उचाइ बराबर भएका र अर्धव्यासहरू क्रमशः 3 cm, 4 cm र 5 cm भएका धातुबाट बनेका तीनओटा ठोस सोलीलाई पगालेर एउटै ठुलो ठोस सोली बनाइएको छ । ठुलो सोलीको उचाइ साना सोलीको उचाइसँग बराबर छ भने उक्त सोलीको व्यास कति हुन्छ ?
13. काठको प्रयोग गरी सोली आकारको एउटा खेलौना बनाइएको छ जसको आधारको व्यासको लम्बाइ 10 cm छ । उक्त खेलौनाको सबै सतहरूमा रङ लगाउन प्रतिवर्ग से.मि. रु. 4 का दरले जम्मा रु. 880 लाग्छ । सो खेलौनाको आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

विभिन्न नापका कागजको प्रयोग गरी फरक फरक नाप भएका सोलीहरू निर्माण गर्नुहोस् । तपाईंले निर्माण गर्नुभएको सोलीका विभिन्न भागहरूका नाप निकाली आधारको क्षेत्रफल, वक्र सतहको क्षेत्रफल, पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

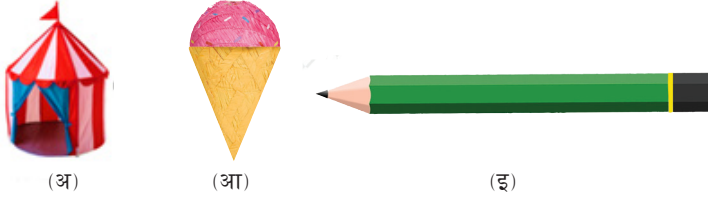
उत्तर

1. (ख) $l^2 = h^2 + r^2$ (ग) $h = 12 \text{ cm}$
2. (क) $\pi r l \text{ cm}^2$ (ख) $\pi x(x + y) \text{ cm}^2$ (ग) $\frac{1}{12} \pi p^2 q \text{ cm}^3$
3. (क) 405 cm^3 (ख) 132 cm^2 (ग) $16\pi \text{ cm}^3$
4. (क) $486.99 \text{ cm}^2, 640.99 \text{ cm}^2, 1078 \text{ cm}^3$
 (ख) $136\pi \text{ cm}^2, 200\pi \text{ cm}^2, 280\pi \text{ cm}^3$
 (ग) $123.94\pi \text{ cm}^2, 183.94\pi \text{ cm}^2, 280\pi \text{ cm}^3$
 (घ) $330 \text{ cm}^2, 484\pi \text{ cm}^2, 681.01 \text{ cm}^3$
 (ङ) $65\pi \text{ cm}^2, 90\pi \text{ cm}^2, 100\pi \text{ cm}^3$
 (च) $156\pi \text{ cm}^2, 300\pi \text{ cm}^2, 240\pi \text{ cm}^3$
5. 13 cm 6. 7 cm, 24 cm 7. $38.5 \text{ cm}^2, 22 \text{ cm}$
8. $352 \text{ cm}^3, 268.54 \text{ cm}^2, 318.80 \text{ cm}^2$ 9. 200.34 cm^2 10. रु. 516.53
11. 179.67 cm^3 12. $10\sqrt{2} \text{ cm}$ 13. 195.99 cm^3

5.3.1 संयुक्त ठोस वस्तु (Combined Solid Object)

क्रियाकलाप 11

तल दिइएका चित्रको अवलोकन गरी निम्नलिखित प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :



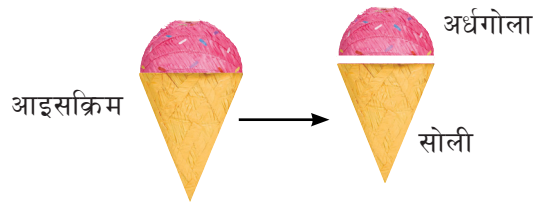
(क) माथि दिइएका चित्रहरू के कस्ता आकार मिलेर बनेका छन् ?

(ख) यी कस्ता ठोस वस्तुहरू हुन् ?

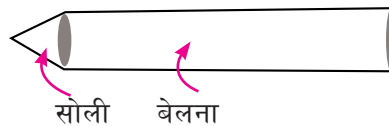
यहाँ (अ) टेन्टमा सोली र बेलना,



(आ) आइसक्रिममा सोली र अर्धगोला



(इ) सिसाकलममा सोली र बेलना छ ।



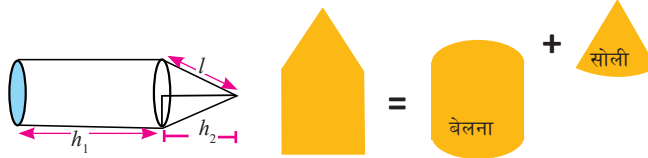
दुई वा दुईभन्दा बढी त्रिआयामिक वस्तुहरू मिलेर संयुक्त ठोस वस्तुहरू बन्दछन् ।

5.3.2 संयुक्त ठोस वस्तुहरूको क्षेत्रफल र आयतन

क्रियाकलाप 12

संयुक्त ठोस वस्तुहरूको क्षेत्रफल र आयतन निकाल्ने सूत्रहरूसम्बन्धी समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

1. बेलना र सोली (Cylinder and Cone)



चित्रमा सोली र बेलना मिलेर बनेका ठोस वस्तुको चित्र दिइएको छ । यदि आधारको अर्धव्यास ' r ', बेलनाको उचाइ ' h_1 ', सोलीको उचाइ ' h_2 ', र सोलीको छड्के उचाइ ' l ' भए,

उक्त वस्तुको आधारको क्षेत्रफल = वृत्तको क्षेत्रफल = πr^2

बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल = $2\pi r h_1$

सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल = $\pi r l$

(क) पूरा सतहको क्षेत्रफल = आधारको क्षेत्रफल + बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल + सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 + 2\pi r h_1 + \pi r l$$

(ख) आयतन (V) = बेलनाको आयतन + सोलीको आयतन

$$= \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2$$

$$= \pi r^2 \left(h_1 + \frac{1}{3} h_2 \right)$$

2. सोली र अर्धगोला (Cone and Hemisphere)

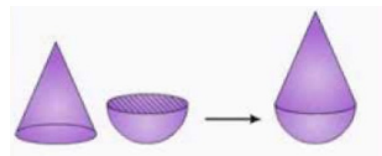
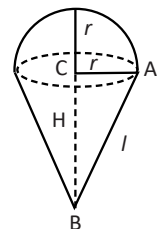
चित्रमा सोली र अर्धगोला मिली बनेको संयुक्त ठोस वस्तु देखाइएको छ जहाँ सोली भागको ठाडो उचाइ ' h ' छड्के उचाइ ' l ' र अर्धव्यास ' r ' छन् ।

(क) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल + अर्धगोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल

$$= \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r (l + 2r)$$

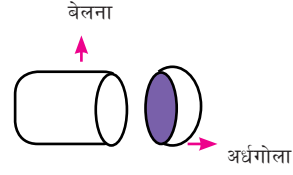
(ख) आयतन (V) = सोलीको आयतन + अर्धगोलाको आयतन

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 (h + 2r)$$



3. बेलना र अर्धगोला (Cylinder and Hemisphere)

चित्रमा बेलना र अर्धगोला मिलेर बनेको ठोस वस्तु दिइएको छ । जसमा आधारको अर्धव्यास ' r ', बेलनाको उचाइ ' h ' छ ।



(क) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = आधारको क्षेत्रफल + बेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल + अर्धगोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल

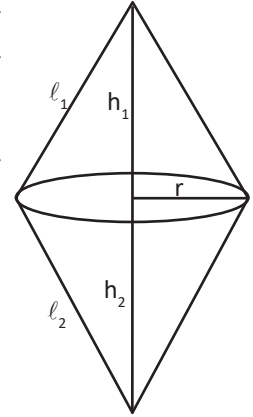
$$= \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r h + 3\pi r^2$$

(ख) जम्मा आयतन (V) = बेलनाको आयतन + अर्धगोलाको आयतन

$$= \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi r^2 \left(h + \frac{2}{3} r \right)$$

4. सोली र सोली (Cone and Cone)

चित्रमा दुईओटा सोली मिलेर बनेको संयुक्त ठोस वस्तु दिइएको छ । जसमा आधारको अर्धव्यास ' r ' तथा h_1 र l_1 माथि तिरको सोलीको क्रमशः ठाडो उचाइ र छड्के उचाइ हुन् । त्यसै गरी, h_2 र l_2 तल तिरको सोलीको क्रमशः ठाडो उचाइ र छड्के उचाइ हुन् ।



(क) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = माथि तिरको सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल + तलतिरको सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल

$$= \pi r l_1 + \pi r l_2 = \pi r (l_1 + l_2)$$

(ख) आयतन (V) = माथिल्लो सोलीको आयतन + तल्लो सोलीको आयतन

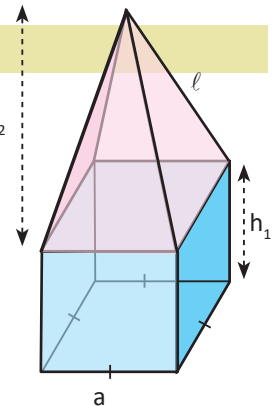
$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2)$$

5. प्रिज्म र पिरामिड (Prism and Pyramid)

चित्रमा प्रिज्म र पिरामिडबाट बनेको संयुक्त ठोस वस्तु दिइएको छ । h_2 जसमा प्रिज्मको आधार वर्गाकार छ । वर्गाकार आधार भएको प्रिज्मको आधारको लम्बाइ ' a ', उचाइ ' h_1 ' पिरामिडको उचाइ ' h_2 ' र छड्के उचाइ ' l ' छन् ।

आधारको क्षेत्रफल (A) = वर्गको क्षेत्रफल = a^2



(क) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = आधारको क्षेत्रफल + प्रिज्मको समतल सतहको क्षेत्रफल + पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल

$$= a^2 + p \times h_1 + 2al \text{ (जहाँ 'p' = प्रिज्मको आधारका परिमिति)}$$

(ख) जम्मा आयतन (V) = प्रिज्मको आयतन + पिरामिडको आयतन

$$= A \times h_1 + \frac{1}{3} Ah_2 = a^2 h_1 + \frac{1}{3} a^2 h_2 = a^2 (h_1 + \frac{1}{3} h_2)$$

विचारणीय प्रश्न: के सबै प्रकारका संयुक्त ठोस वस्तुहरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल र वक्र सतहको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ?



उदाहरण 1

चित्रमा एउटा सिसाकलम दिइएको छ। उक्त सिसाकलमको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

$$\pi = \frac{22}{7}$$

समाधान

यहाँ आधारको अर्धव्यास (r) = 7 cm

बेलनाको उचाइ (h_1) = 39 cm

सोलीको उचाइ (h_2) = 24 cm

पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

आयतन = ?

हामीलाई थाहा छ, $l^2 = h^2 + r^2 = (24)^2 + (7)^2 = 576 + 49 = 625$

तसर्थ सोली भागको छड्के उचाइ (l) = 25 cm

फेरि हामीलाई थाहा छ,

$$\text{पूरा सतहको क्षेत्रफल} = \pi r^2 + 2\pi r h_1 + \pi r l$$

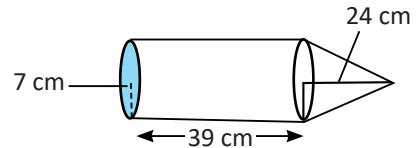
$$= \pi r (r + 2h_1 + l)$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 (7 + 2 \times 39 + 25) = 22 \times 110 = 2420 \text{ cm}^2$$

आयतन (V) = बेलनाको आयतन + सोलीको आयतन

$$= \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2$$

$$= \pi r^2 (h_1 + \frac{1}{3} h_2) = \frac{22}{7} \times (7)^2 (39 + \frac{1}{3} \times 24) = 7238 \text{ cm}^3$$

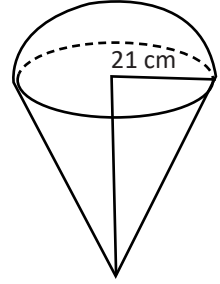


उदाहरण 2

दिइएको चित्र एउटा आइसक्रिमको हो। जसको वृत्ताकार आधारको अर्धव्यास 21 cm र जम्मा आइसक्रिमको आयतन 32340 cm^3 छ भने, $\pi = \frac{22}{7}$

(क) सोली भागको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्।

(ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस्।



समाधान

यहाँ आधारको अर्धव्यास (r) = 21 cm

आइसक्रिमसहित सोलीको आयतन (V) = 32340 cm^3

(क) हामीलाई थाहा छ,

आइसक्रिमसहित सोलीको आयतन (V) = $\frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$

अथवा, $32340 = \frac{1}{3} \pi r^2 (h + 2r)$

अथवा, $32340 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^2 (h + 2 \times 21)$

अथवा, $\frac{32340 \times 21}{22 \times 441} = (h + 42)$

अथवा, $70 - 42 = h$

$\therefore h = 28 \text{ cm}$

\therefore सोली भागको उचाइ (h) = 28 cm

(ख) फेरि,

छड्के उचाइ (l) = $\sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(28)^2 + (21)^2} = \sqrt{1225} = 35 \text{ cm}$

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = $\pi r l + 2\pi r^2$
= $\pi r (l + 2r)$
= $\frac{22}{7} \times 21 (35 + 2 \times 21)$
= $66 (35 + 42) = 66 \times 77 = 5082 \text{ cm}^2$

उदाहरण 3

चित्रमा दिइएको ठोस वस्तु दुईओटा सोली मिली बनेको छ । दिइएको नापका आधारमा उक्त ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् : $\pi = \frac{22}{7}$

समाधान

यहाँ दुवै सोली भागको आधारको वृत्तको व्यास (d) = 6 cm

ठोस वस्तुको जम्मा उचाइ = 20 cm

मानौं, बायाँ भागको सोलीको उचाइ = h_1 cm र

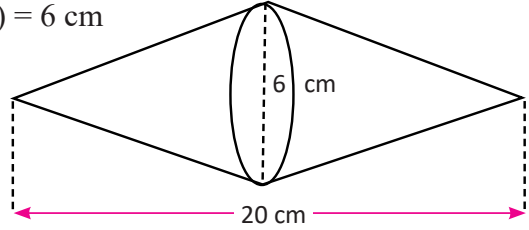
दायाँ भागको सोलीको उचाइ = h_2 cm

$$\therefore h_1 + h_2 = 20 \text{ cm}$$

(क) आधारको वृत्तको अर्धव्यास (r) = $\frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$

सोलीको आयतन (V_1) = $\frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (3)^2 (20) = 188.57 \text{ cm}^3$$



उदाहरण 4

दिइएको चित्र एउटा स्तुपाको हो । जसको तल्लो भाग आधार वर्ग भएको प्रिज्म र माथिल्लो भाग वर्ग आधार भएको पिरामिडबाट बनेको छ । दिइएको नापअनुसार उक्त स्तुपाको,

(क) आयतन पत्ता लगाउनुहोस्

(ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ स्तुपाको जम्मा उचाइ = 5.5 m

प्रिज्मको उचाइ (h_1) = 5 m

पिरामिडको उचाइ (h_2) = 5.5 - 5 = 0.5 m

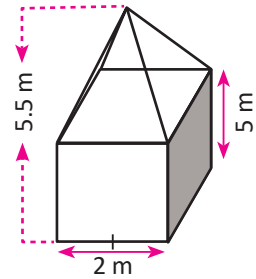
स्तुपाको आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 2 m

(क) आधारको क्षेत्रफल (A_1) = $a^2 = 2^2 = 4 \text{ m}^2$

स्तुपाको प्रिज्म भागको आयतन (V_1) = $A_1 \times h_1 = 4 \times 5 = 20 \text{ m}^3$

स्तुपाको पिरामिड भागको आयतन (V_2) = $\frac{1}{3} A_1 \times h_2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 0.5 = \frac{2}{3} \text{ m}^3$

ठोस वस्तु (स्तुपा) को आयतन (V) = $V_1 + V_2 = 20 + \frac{2}{3} = 20.67 \text{ m}^3$



(ख) आधारको परिमिति (P) = $4a = 4 \times 2 = 8 \text{ m}$

पिरामिड भागको छड्के उचाइ (l) = $\sqrt{(h_2)^2 + (\frac{a}{2})^2}$
 $= \sqrt{(0.5)^2 + (\frac{2}{2})^2} = \sqrt{0.25 + 1} = \sqrt{1.25} \text{ m}$

स्तुपाको प्रिज्म भागको छड्के सतहको क्षेत्रफल (A₂) = $P \times h_1 = 8 \times 5 = 40 \text{ m}^2$

स्तुपाको पिरामिड भागको छड्के सतहको क्षेत्रफल (A₃) = $2al = 2 \times 2 \times \sqrt{1.25} = 4.47 \text{ m}^2$

ठोस वस्तु (स्तुपा) को पूरा सतहको क्षेत्रफल (A) = $A_1 + A_2 + A_3$
 $= 4 + 40 + 4.47$
 $= 48.47 \text{ m}^2$

अतः उक्त स्तुपाको पूरा सतहको क्षेत्रफल = 48.47 m^2 रहेछ ।

उदाहरण 5

दिइएको चित्र दुईओटा वर्ग आधार भएको पिरामिड मिलेर बनेको छ । दुवै पिरामिडको उचाइ बराबर छ । यदि उक्त पिरामिडको आधार भुजाको लम्बाइ 6 cm र दुवैको जम्मा आयतन 96 cm^3 भए प्रत्येक पिरामिडको उचाइ कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ एउटा पिरामिडको आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 6 cm

दुवै पिरामिडको जम्मा आयतन (V) = 96 cm^3

मानौं एउटा पिरामिड को उचाइ = h

पिरामिडको जम्मा आयतन (V₂) = $\frac{1}{3}a^2h + \frac{1}{3}a^2h$ (दुवैको उचाइ बराबर छ ।)

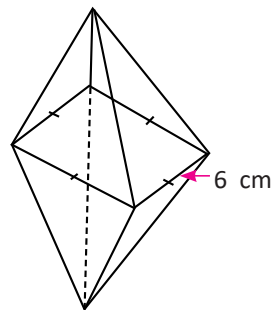
अथवा, $96 = \frac{2}{3}a^2h$

अथवा, $\frac{96 \times 3}{2} = (6)^2 \times h$

अथवा, $\frac{96 \times 3}{2 \times 36} = h$



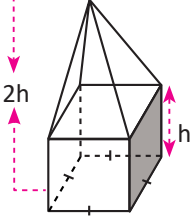
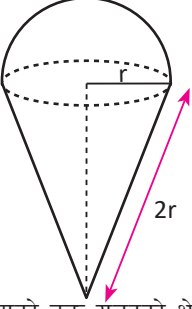
$\therefore h = 4 \text{ cm}$

अतः प्रत्येक पिरामिड को उचाइ (h) = 4 cm रहेछ ।

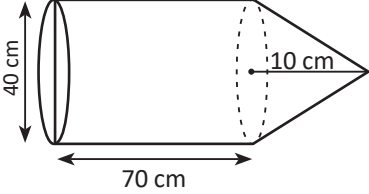
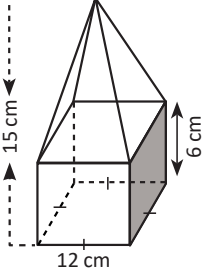
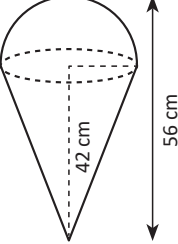
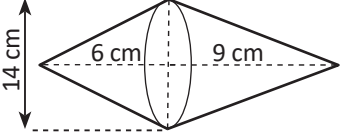


अभ्यास 5.3

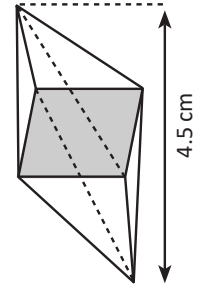
1. संयुक्त ठोस वस्तुहरूसम्बन्धी दिइएको जानकारीलाई प्रयोग गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् :

| | |
|---|---|
| <p>(क) ठोस वस्तुको जम्मा आयतन $(V) = 1050 \text{ cm}^3$ बेलना भागको आयतन $(V_1) = 748 \text{ cm}^3$</p>  <p>सोली भागको आयतन $(V_2) = ?$</p> | <p>(ख) सोली भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल $= 252 \text{ cm}^2$ बेलना भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल $= 272 \text{ cm}^2$ आधार भाग (वृत्त) को क्षेत्रफल $= 154 \text{ cm}^2$</p>  <p>पूरा सतहको क्षेत्रफल $= ?$</p> |
| <p>(ग) आधारको क्षेत्रफल $= 36 \text{ cm}^2$ प्रिज्म भागको आयतन $(V_1) = 144 \text{ cm}^3$</p>  <p>पिरामिड भागको आयतन $= ?$</p> | <p>(घ) सोली भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल $= 308 \text{ cm}^2$</p>  <p>अर्ध गोलाकार भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल $= ?$</p> |

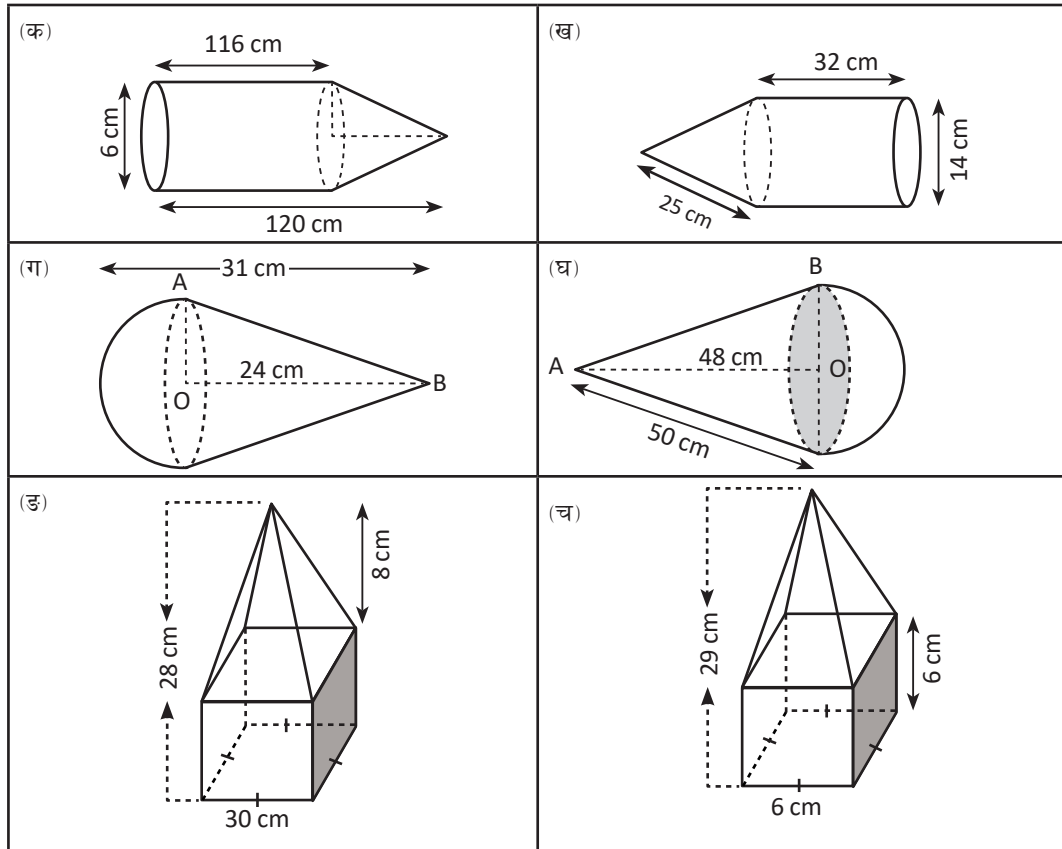
2. निम्नानुसार नापका संयुक्त ठोस वस्तुहरूको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् :

| | |
|--|---|
| <p>(क)</p>  | <p>(ख)</p>  |
| <p>(ग)</p>  | <p>(घ)</p>  |

3. चित्रमा देखाइएको क्रिस्टलको छाया पारिएको वर्गाकार भागका भुजाहरूको लम्बाइ 2.5 cm र पूरा वस्तुको उचाइ 4.5 cm छ । यदि तल र माथिका पिरामिडको उचाइ बराबर भए यसको आयतन र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



4. दिइएका संयुक्त ठोस वस्तुहरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



5. 14 cm अर्धव्यास भएको सोली र अर्धगोला मिलेर एउटा खेलौना तयार गरिएको छ । उक्त खेलौनाको पूरा उचाइ 49 cm भए सो खेलौनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

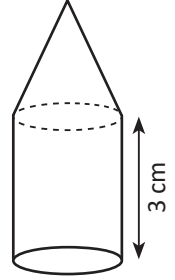
6. वर्ग आधार भएको एउटा षड्मुखकाकार ठोस वस्तुमाथि 12 cm ठाडो उचाइ भएको एउटा पिरामिड राखिएको छ । यदि उक्त षड्मुखकाकार ठोस वस्तुको आधारको क्षेत्रफल 100 cm^2 तथा उचाइ 10 cm भए उक्त संयुक्त ठोस वस्तुको,

(क) पूरा आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

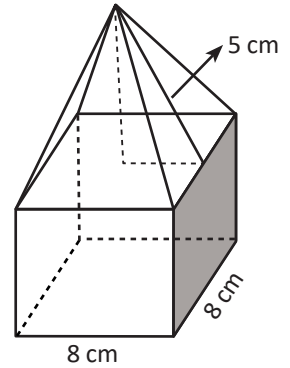
(ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा घनाकार ठोस वस्तुमाथि 8 cm ठाडो उचाइ भएको एउटा पिरामिड राखिएको छ । यदि घनको भुजाको नाप 12 cm छ भने, उक्त संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. (क) दिइएको ठोस वस्तु सोली र बेलना मिली बनेको छ । बेलनाको आधारको क्षेत्रफल 100 cm^2 छ जहाँ उचाइ 3 cm छ । यदि दिइएको पूरा ठोसको आयतन 600 cm^3 भए ठोस वस्तुको पूरा उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



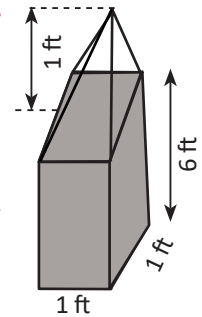
- (ख) सँगै दिइएको ठोस वस्तुको माथिल्लो भाग पिरामिड हो यसको छड्के उचाइ 5 cm छ । तल्लो भाग वर्ग आधार भएको एउटा प्रिज्म हो । जसमा भुजाको लम्बाइ 8 cm छ । यदि ठोसको आयतन 448 cm^3 भए प्रिज्म भागको उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



9. सँगैको चित्रमा कुनै पार्कमा बनाइएको एउटा स्तम्भ र स्तम्भ माथि वर्ग आधारको पिरामिड राखिएको छ । 6 ft अग्लो स्तम्भमाथि आधारको लम्बाइ 1 ft भएको पिरामिड छ ।

(क) पिरामिड भागको छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) उक्त संयुक्त स्तम्भमा रड लगाउन मिल्ने भागको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



10. रामका बुवाले छोराको छैटौँ जन्मोत्सवमा रड नलगाएको काठको भुरुड उपहार दिनुभएको छ । रामले यसलाई रड लगाउने मन गर्छन् । भुरुड सोली र सोलीको माथि अर्धगोला मिली बनेको छ । उक्त भुरुडको पूरा उचाइ 5 cm र अर्धगोलाको आधारको व्यास 3.5 cm छ भने रड लगाउने भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

आवश्यकताअनुसार समूहको निर्माण गर्नुहोस् । प्रत्येक समूहले कागज, काठ, माटो बाँस, तार, सिन्का आदि स्थानीय सामग्री प्रयोग गरी विभिन्न साइजका संयुक्त ठोस वस्तुहरू निर्माण गर्नुहोस् । निर्माण गरेका प्रत्येक ठोस वस्तुका नाप लिइ क्षेत्रफल र आयतन गणना गर्नुहोस् । ठोस वस्तुलाई जोड्नुभन्दा अगि ती ठोस वस्तुहरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल र ठोस वस्तुलाई जोडिसकेपछि संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफलमा फरक पछि कि पढैन ? फरक पछि भने कसरी पछि ? अनि त्यसै गरी ठोस वस्तुलाई जोड्नुभन्दा अगि ती ठोस वस्तुको आयतन र ठोस वस्तुलाई जोडिसकेपछि संयुक्त ठोस वस्तुको आयतनमा फरक पछि कि पढैन ? फरक पछि भने कसरी पछि र फरक पढैन भने किन र कसरी पढैन ? माथि उठान गरिएका र अन्य जानकारीलाई समेत समावेश गरी एउटा प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

- (क) 302 cm^3 (ख) 678 cm^2 (ग) 48 cm^3 (घ) 308 cm^2
- (क) 92190.47 cm^3 (ख) 1296 cm^3 (ग) 14373.33 cm^3 (घ) 770 cm^3
- $9.375 \text{ cm}^3, 25.74 \text{ cm}^2$
- (क) 2262.85 cm^2 (ख) 2112 cm^2 (ग) 858 cm^2
(घ) 3432 cm^2 (ङ) 4320 cm^2 (च) 458.34 cm^2 5. 2890.63 cm^2
- (क) 1400 cm^3 (ख) 760 cm^2 7. 2112 cm^3
- (क) 12 cm (ख) 6 cm
- (क) $\sqrt{5} \text{ cm}^2$ (ख) 26.23 cm^2 10. 39.55 cm^2

5.3.2 लागत अनुमान (Cost Estimation)

क्रियाकलाप 1

3/3 जनाको समूहमा बस्नुहोस् । रूलर वा मिटर टेपको प्रयोग गरी तपाईंको कक्षाकोठाको लम्बाइ, चौडाइ, उचाइ नाप्नुहोस् । कक्षाकोठामा भएका ढोका र भ्यालको लम्बाइ, चौडाइ पनि नाप्नुहोस् । ढोका र भ्यालबाहेक उक्त कक्षाकोठामा रङ लगाउनुपर्ने छ । अब तल दिइएको अवस्था प्रयोग गरी कक्षाकोठा रङ लगाउदा लाग्ने खर्च पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) एक लिटरले $6m^2$ रङ लगाउन सकिने

(ख) प्रति लिटर रङको मुल्य रु. 200

क्रियाकलाप 2

लम्बाइ 14 ft चौडाइ 12 ft र उचाइ 10 ft भएको कोठामा एउटा ढोका छ, जसको चौडाइ 3 ft र उचाइ 6.6 ft छ । कोठाको एकातिरको भित्तामा एउटा भ्याल छ जसको साइज 6 ft \times 4 ft छ । तल टेबलमा दिइएअनुसार कोठामा रङ लगाउँदा कुन अवस्थामा कम खर्च लाग्छ ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

| काम गर्ने मानिसले सामान आफैँ किनेर नल्याउने सर्तमा | काम गर्ने मानिसले सामान आफैँ किनेर ल्याउने सर्तमा |
|--|--|
| पहिलो अवस्था | दोस्रो अवस्था |
| भित्ता र सिलिङमा पुटिङ लगाउन = रु. 7 प्रति ft^2 | भित्ता र सिलिङमा पुटिङ लगाउन = रु. 14 प्रति ft^2 |
| भित्ता र सिलिङमा रङ लगाउन = रु. 5 प्रति ft^2 | भित्ता र सिलिङमा रङ लगाउन = रु. 30 प्रति ft^2 |
| ढोका र भ्यालमा रङ लगाउन (इनामेल पेन्ट) = रु. 12 प्रति ft^2 | ढोका र भ्यालमा रङ लगाउन (इनामेल पेन्ट) = रु. 24 प्रति ft^2 |
| कोठामा रङ लगाउन 7.2 लिटर जति रङ आवश्यक पर्ने प्रति लिटर रङको मुल्य रु. 420 | |

पहिलो अवस्थाअनुसार,

माथि दिइएको कोठामा प्रयोग भएको एउटा ढोकाको क्षेत्रफल (A_1) = $3 \times 6.6 = 19.8 ft^2$

एउटा भ्यालको क्षेत्रफल (A_2) = $6 \times 4 = 24 ft^2$

चार भित्ता र सिलिङको क्षेत्रफल (ढोका र भ्यालबाहेक) (A_3) = $2h(l + b) + l \times b - (A_1 + A_2)$
 $= 2 \times 10 (14 + 12) + 14 \times 12 - (19.8 + 24)$
 $= (688 - 43.8) ft^2$
 $= 644.2 ft^2$

भित्ता र सिलिङमा पुटिङ गर्न लाग्ने खर्च (T_1) = $7 \times 644.2 =$ रु. 4509.4

ढोका र भ्यालमा रङ लगाउन लाग्ने खर्च (T_2) = $12 \times (19.8 + 24) =$ रु. 525.6

चार भित्ता र सिलिडमा रड लगाउन लाग्ने खर्च $(T_3) = 5 \times 644.2 = \text{रु. } 3221$

अब उक्त कोठामा रड लगाउन आवश्यक पर्ने रड (पेन्टस) को जम्मा मूल्य $(T_4) = \text{रु. } 7.2 \times 420 = \text{रु. } 3024$

जम्मा रड लगाउने खर्च $(T) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$
 $= 4509.4 + 525.6 + 3221 + 3024$
 $= \text{रु. } 11280$

दोस्रो अवस्थाअनुसार,

भित्ता र सिलिडमा पुटिङ गर्न लाग्ने खर्च $(T_1) = 14 \times 644.2 = \text{रु. } 9,018.8$

ढोका र भ्यालमा रड लगाउन लाग्ने खर्च $(T_2) = 24 (19.8 + 24) = \text{रु. } 1,051.2$

चार भित्ता र सिलिडमा रड लगाउन लाग्ने खर्च $(T_3) = 30 \times 644.2 = \text{रु. } 19,326$

जम्मा खर्च $(T) = T_1 + T_2 + T_3 = 9018.8 + 1051.2 + 19,326 = \text{रु. } 29,396$

अतः पहिलो अवस्थाअनुसार रड लगाउँदा कम खर्च लाग्दो रहेछ ।

उदाहरण 1

वर्गाकार आधार भएको ट्याङ्कीको भित्री लम्बाइ 3 m र उचाइ 4m छ भने सो ट्याङ्कीमा कति लिटर पानी अटाउँछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ वर्गाकार आधार भएको ट्याङ्कीको,

भित्री लम्बाइ $(l) = 3 \text{ m}$

भित्री चौडाइ $(b) = 3 \text{ m}$

ट्याङ्कीको आधारको क्षेत्रफल $(A) = l^2 = (3)^2 = 9 \text{ m}^2$

उक्त ट्याङ्कीको आयतन $(V) = A \times h = 9 \times 4 = 36 \text{ m}^3$

ट्याङ्कीको आयतन $(V) =$ पानीको आयतन हुन्छ ।

अतः ट्याङ्कीमा अट्ने पानीको आयतन $(V) = 36 \text{ m}^3$

फेरि हामीलाई थाहा छ,

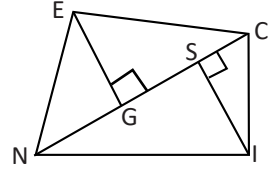
1 घन मिटर पानी = 1000 l

$\therefore 36 \text{ m}^3 = 36 \times 1000 \text{ l} = 36,000 \text{ l}$

अतः ट्याङ्कीमा 36,000 l पानी अटाउँछ ।

उदाहरण 2

दिइएको चित्र NICE चतुर्भुज आकारको चउरको हो । जसमा कुना N देखि C सम्मको लम्बाइ 40 m छ । कुनाहरू E र I बाट NC मा खिचिएका लम्बहरू $EG = 10\text{ m}$ र $IS = 15\text{ m}$ छन् ।



- (क) चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
(ख) उक्त चउरको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) 1 जना पुरुष कामदारलाई उक्त खेल्ने चउर सम्प्याउन दुई दिन लाग्छ र उनको ज्याला दिनको रु. 1500 छ । त्यस्तै एक महिला कामदारले प्रति वर्ग मिटर रु. 70 का दरले उक्त खेल्ने मैदानमा दुबो रोपिछन् भने दुबो रोप्ने कामको लागि जम्मा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ चतुर्भुज NICE मा,

$$\text{लम्ब } (EG) = p_1 = 10\text{ m}$$

$$\text{लम्ब } (IS) = p_2 = 15\text{ m}$$

(क) चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र $(A) = \frac{1}{2} \times d (p_1 + p_2)$

(ख) मैदानको क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times 40 (10 + 15) = 20 \times 25 = 500\text{ m}^2$

दुबो रोप्ने महिला कामदारलाई तिर्नु पर्ने खर्च $= 70 \times 500 = \text{रु. } 35,000$

मैदान सम्प्याउन पुरुष कामदारलाई तिर्नु पर्ने खर्च $= 1500 \times 2 = \text{रु. } 3,000$

अतः दुबो लगाउन लाग्ने जम्मा खर्च $= 35,000 + 3,000 = \text{रु. } 38,000$

उदाहरण 3

एउटा आयताकार कोठाको लम्बाइ 14 ft चौडाइ, 12 ft र उचाइ 10 ft छ । उक्त कोठामा 3 ft किनारा भएका दुईओटा वर्गाकार झ्याल छन् र दुईओटा 6 ft × 2 ft का ढोका छन् भने,

- (क) चारभित्ता र सिलिडको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
(ख) उक्त कोठामा रु. 300 प्रति वर्गमिटरको दरले कार्पेट बिछ्याउँदा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) ढोका र भ्यालबाहेक चार भित्ता र सिलिडमा रु. 30 प्रति वर्ग फिटको दरले रङ लगाउन कति खर्च लाग्छ ?
(घ) बजारमा भएको महङ्गीले गर्दा रङ लगाउन प्रति वर्गमिटरमा पहिलेको भन्दा एक तिहाइले बढ्दा जम्मा खर्च कतिले वृद्धि हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ आयतकार कोठाको,

$$\text{लम्बाइ (l)} = 14 \text{ ft}$$

$$\text{चौडाइ (b)} = 12 \text{ ft}$$

$$\text{उचाइ (h)} = 10 \text{ ft}$$

वर्गाकार भ्यालको किनाराको लम्बाइ = 3 ft, दुईओटा ढोका $6 \text{ ft} \times 2 \text{ ft}$ का छन् ।

$$\text{(क) चार भित्ता र सिलिडको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र (A)} = 2h(l + b) + lb$$

$$\text{(ख) कोठाको भुईँको क्षेत्रफल} = l \times b = 14 \times 12 = 168 \text{ ft}^2$$

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{कार्पेटको क्षेत्रफल} = \text{कोठाको भुईँको क्षेत्रफल} = 168 \text{ ft}^2$$

$$\text{कार्पेट प्रति वर्गमिटरको दर (R)} = \text{रु. } 300$$

$$\text{जम्मा कार्पेट विछ्याउँन लाग्ने खर्च (T)} = 300 \times 168 = \text{रु. } 50,400$$

$$\text{(ग) दुईओटा ढोकाको क्षेत्रफल (A}_1\text{)} = 2(6 \times 2) = 24 \text{ ft}^2$$

$$\text{दुईओटा भ्यालको क्षेत्रफल (A}_2\text{)} = 2 \times (3)^2 = 18 \text{ ft}^2$$

$$\text{अब भ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ता र सिलिडको क्षेत्रफल (A)} = 2h(l + b) + lb - A_1 - A_2$$

$$= 2 \times 10(14 + 12) + 14 \times 12 - 24 - 18$$

$$= 20 \times 26 + 168 - 42$$

$$= 520 + 128$$

$$= 646 \text{ ft}^2$$

चार भित्तामा प्रति वर्गमिटरको रु. 30 को दरले रङ लगाउँदा,

$$\text{जम्मा खर्च} = 30 \times 646 = \text{रु. } 19,380$$

$$\text{(घ) प्रति वर्ग मिटरमा एक तिहाइले बढ्दा नयाँ दर} = 30 + \frac{1}{3} \times 30 = \text{रु. } 40$$

$$\text{प्रति वर्ग मिटरमा एकतिहाइले बढ्दा, जम्मा खर्च} = 40 \times 646 = \text{रु. } 25,840$$

$$\text{खर्चमा भएको वृद्धि} = 25840 - 19380 = \text{रु. } 6,460$$

अतः : खर्चमा रु. 6,460 ले वृद्धि हुन्छ ।

उदाहरण 4

एउटा रङ्गशालाको गेटमा 10 ft अग्ला दुईओटा पिलर छन् । उक्त पिलर माथि उही आधारका एक एकओटा 2 ft उचाइ भएका पिरामिड राखिएका छन् । प्रत्येक पिलरको आधार 4 ft × 4 ft छ भने,

- प्रश्नअनुसारका दुईओटा चित्र बनाउनुहोस् ।
- पिरामिडको छड्के उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- दुईओटा पिरामिडसहितका पिलरमा रङ लगाउन मिल्ने पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? के पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउन आधारको क्षेत्रफल जोड्नु पर्छ वा पर्दैन ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।
- उक्त पिरामिडसहितको पिलरमा प्रति वर्ग फिट रु. 95 का दरले रङ लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ ?

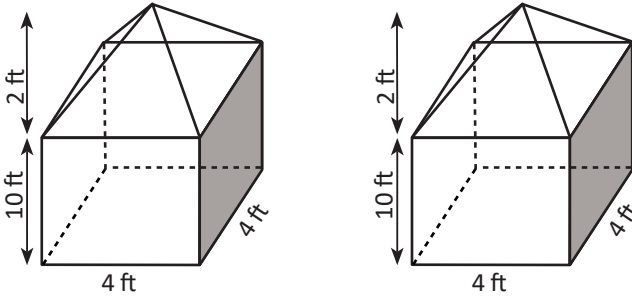
समाधान

यहाँ पिलरको उचाइ (h_1) = 10 ft

पिरामिड को उचाइ (h_2) = 2 ft

पिलरको आधार वर्ग भएकाले, आधारको लम्बाइ (a) = 4 ft

(क)



(ख) हामीलाई थाहा छ

पिरामिडका छड्के उचाइ (l) = $\sqrt{(h_2)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2.83$ ft

(ग) फेरि प्रिज्मको समतल सतहको क्षेत्रफल (A_1) = आधारको परिधि (P) × उचाइ (h_1)

$$= 4a \times 10 \text{ ft}$$

$$= 4 \times 4 \times 10 = 160 \text{ ft}^2$$

पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल (A_2) = $2al = 2 \times 4 \times 2.83 = 22.64 \text{ ft}^2$

त्यसैले पिरामिडसहितको एउटा पिलरको पूरा सतहको क्षेत्रफल = $A_1 + A_2$

$$= (160 + 22.64) = 182.64 \text{ ft}^2$$

पिरामिडसहितका दुईओटा पिलरको पूरा सतहको क्षेत्रफल = $2 \times 182.64 = 365.28 \text{ ft}^2$

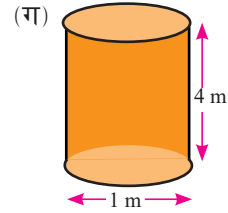
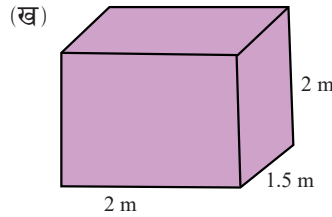
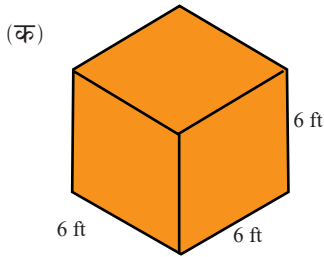
प्रश्नअनुसार पिलरको आधार जमिनमुनि भएकाले यहाँ रड लगाईदैन त्यसैले आधारको क्षेत्रफल पूरा सतहको क्षेत्रफलमा जोडिदैन ।

(घ) रड लगाउने दर (R) = रु. 95 प्रति ft^2

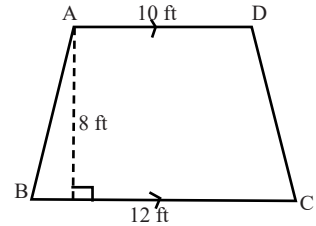
रड लगाउने जम्मा खर्च (T) = $R \times A = 95 \times 365.28 = \text{रु. } 34,701.6$

अभ्यास 5.4

1. तल दिइएका बिको बन्द गरेर राखिएका ट्याङ्कीमा बढीमा कति लिटर पानी अटाउन सक्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । ($1 \text{ ft}^3 = 28.317 \text{ l}$)

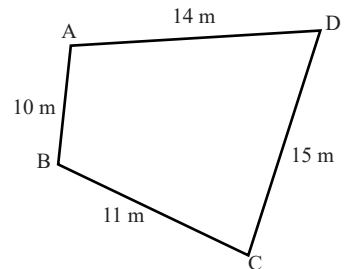


2. एउटा घरको बाहिर गाडी पार्किङ गर्ने ठाउँ दिइएको जस्तो ज्यामितीय आकारको छ । उक्त पार्किङमा एउटा ईँटाले 0.222 ft^2 क्षेत्रफल ढाक्न सकिन्छ । प्रतिईँटा रु. 16 पर्ने ईँटा बिछ्याउने निर्णय गरिएको छ भने,



- (क) उक्त पार्किङ स्थलको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) सबै भाग ढाकिने गरी ईँटा बिछ्याउँदा कम्तीमा कतिओटा ईँटा आवश्यक पर्छ ?
 (ग) प्रतिदिन रु. 1200 प्रतिकामदारको ज्यालासहित 2 जना कामदारले 3 दिनमा ईँटा बिछ्याउन सक्छन् भने ईँटासहितको जम्मा खर्च कति लाग्छ ?

3. दिइएको चित्रले बन्दै गरेको एउटा मन्दिरको दायोँतिर रहेको बगैँचाको भागलाई जनाउँछ । मन्दिर व्यवस्थापन समितिले सुरक्षाको हिसाबले यसमा 5 फन्को काँडेतिार लगाउने निर्णय गर्‍यो । एक मिटर काँडेतिारको रु. 80 पर्छ । प्रतिदिन एक जनाको रु. 1500 का दरले, 3 जना कामदारलाई सो काम सिध्याउन 2 दिन लाग्छ भने,



- (क) उक्त बगैँचाको परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) 5 फन्को लगाउन कति काँडेतिार चाहिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त कम्पाउन्डमा ज्यालासहित 5 फन्को काँडेतार लगाउन जम्मा खर्च कति लाग्छ, गणना गर्नुहोस् ।

4. लम्बाइ 9 ft भएको एउटा घनाकार कोठा छ। उक्त कोठामा 2 ft किनारा भएका दुईओटा वर्गाकार झ्याल र दुईओटा 5 ft × 3 ft भएका ढोका छन् भने,

(क) भुइँको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) भ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) प्रति वर्ग फिटको रु. 350 का दरले चारओटै भित्तामा भ्याल र ढोकासहित रङ लगाउन जम्मा कति रकम आवश्यक पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ प्रत्येकमा 1 ft ले बढी भएको अर्को कोठामा रु. 340 का दरले चारओटै भित्तामा भ्याल र ढोकासहित रङ लगाउदा प्रश्न नं. (ग) मा लाग्ने खर्चभन्दा कतिले बढी वा घटी लाग्छ, गणना गर्नुहोस् ।

5. एउटा इनारमा 3.5 ft व्यास तथा 1 ft उचाइ भएका 60 ओटा सिमेन्टबाट बनेका चक्का राखिएका छन्। यदि सो इनार बनाउन प्रतिचक्काको मूल्य रु. 1200 पर्छ। 2 जना कामदारले प्रतिदिन रु. 1500 का दरले जम्मा 12 दिनमा सो इनार तयार बनाउन सक्छन् भने, (1 cubic foot = 28.317 liters)

(क) चक्काको मात्र तिर्नु पर्ने रकम कति हुन्छ ?

(ख) इनार बनाउन जम्मा खर्च कति लाग्छ ?

(ग) उक्त इनारमा अधिकतम कति लिटर पानी अटाउँछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि उक्त इनारको 35 चक्कासम्म पानी छ भने इनारमा कति लिटर पानी रहेछ ? इनार भर्नका लागि कति लिटर पानी चाहिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा घरको गेटका चारओटै सतह देखिने 10 ft अग्ला दुईओटा पिलरहरू माथि उही आधारका एक एकओटा 1 ft उचाइ भएका पिरामिड राखिएका छन्। प्रत्येक पिलरका आधारहरू वर्गाकार छन् र जसको लम्बाइ 5 ft छ।

(क) प्रश्नअनुसार दिइएको जानकारीलाई चित्र बनाई देखाउनुहोस् ।

(ख) पिरामिडको छड्के उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त पिरामिडसहितको पिलरहरूमा प्रति वर्गफिट रु. 94 का दरले रङ लगाउँदा जम्मा खर्च कति लाग्छ ?

7. एउटा घरको कम्पाउन्डको गेटका दुईओटा पिलरहरू र पिलरमाथि उही आधारका एक एकओटा पिरामिड राखिएका छन्। 6 ft अग्लो पिलरमाथि 1 ft उचाइ भएका पिरामिड छन्। प्रत्येक पिलरका आधार वर्गाकार छन् र आधारको लम्बाइ 1 ft छ।

(क) प्रश्नअनुसार दिइएको जानकारीलाई चित्र बनाई देखाउनुहोस् ।

(ख) वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ग) पिरामिड भागको छड्के उचाइ कति हुन्छ ?

(घ) उक्त पिरामिडसहितको पिलरहरूमा टायल लगाउँदा जम्मा खर्च रु. 2729 लाग्छ भने, प्रति वर्गफिटमा कतिका दरले टायल लगाउन सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा नर्सरीमा आकाशे पानी जम्मा गर्न 2.80 m भित्रि व्यास र 3 m उचाइ भएको बेलनाकार ट्याङ्की निर्माण गरिएको छ । यदि उक्त ट्याङ्कीको माथिल्लो भाग 0.72 m ठाडो उचाइ भएको सोली आकारमा छ भने,

(क) बेलनाको आयतन पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) सो ट्याङ्कीमा बढीमा कति लिटर पानी अटाउन सकिएला ?

(ग) खडेरी परेको समयमा प्रति लिटर रु.1.85 का दरले सो ट्याङ्की भर्न कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. बराबर साइजका 8 ओटा त्रिभुजाकार कपडाका टुक्राहरू मिलेर एउटा सोली आकारको टेन्ट निर्माण गरिएको छ । एउटा त्रिभुजाकार टुक्राका तीनओटा भुजाहरूको लम्बाइ क्रमशः 5 m, 6 m र 6 m छ ।

(क) एक टुक्रा कपडाको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) टेन्ट बनाउन चाहिने आवश्यक कपडाको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) प्रतिवर्ग मिटर कपडाको मूल्य रु. 600 भए उक्त टेन्ट बनाउन जम्मा खर्च कति लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

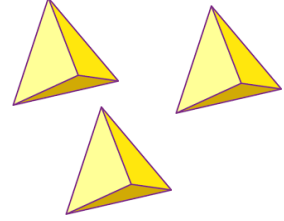
1. आफ्नो नजिकको निर्माण सामग्री बिक्री गर्ने पसलमा जानुहोस् । कुन कुन ज्यामितीय आकारमा ट्याङ्कीहरू बनेका छन् ? कुनमा कति लिटर पानी अटाउँछ ? कुनको मूल्य कति पर्छ ? धेरै पानी अटाउने ट्याङ्कीको मूल्य र थोरै पानी अटाउने ट्याङ्कीको मूल्यको अनुपात कस्तो पाउनुभयो ? फलामबाट बनेको ट्याङ्की र प्लास्टिकबाट बनेको ट्याङ्कीको मूल्यमा कतिले फरक पर्दो रहेछ ? माथि उठान गरिएका र अन्य जानकारीलाई समेत समावेश गरी एउटा प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
2. तपाईंको घरमा 30,000 लिटर पानी अट्ने जमिनमुनि एउटा षड्मुखीकार ट्याङ्की बनाउनुपर्ने छ । त्यसका लागि जमीनमा खाल्डो खन्नुपर्ने हुन्छ । लम्बाइ, चौडाइ र उचाइको खाल्डो कति खन्नु पर्ला जसले गर्दा कम्तीमा 30,000 लिटर पानी अटाउन सकियोस् ?

उत्तर

1. (क) 6116.47 l (ख) 6,000 l (ग) 3142.85 l
2. (क) 88ft² (ख) 397 (कम्तीमा) (ग) रु. 13,552
3. (क) 50 m (ख) 250 m (ग) रु. 29,000
4. (क) 81 ft² (ख) 286 ft² (ग) रु. 1,13,400 (घ) रु. 22,600
5. (क) रु. 72,000 (ख) रु. 1,08,000 (ग) 16,35,06 l (घ) 6813.78 l
6. (ख) $\frac{\sqrt{29}}{2}$ ft (ग) रु. 42662.05
7. (ख) 2al (ग) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ft. (घ) रु. 52
8. (क) $\pi r^2 h$ (ख) 19958.4 l (ग) रु. 36923.04
9. (क) $\frac{5\sqrt{119}}{4}$ m² (ख) $10\sqrt{119}$ m² (ग) रु. 65,452.27

1. कक्षा 10 मा अध्ययनरत एक जना विद्यार्थीले आफ्नो परियोजना कार्यअन्तर्गत कार्डबोर्ड पेपरको प्रयोग गरी वर्गाधार भएको 3 ओटा पिरामिड बनाइ आफ्नो गणित विषय शिक्षकलाई बुझाएका छन्। ती प्रत्येक पिरामिडको आधारको लम्बाइ र छड्के उचाइ क्रमशः 12 cm र 10 cm छ भने,

- (क) पिरामिडको आयतन पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) पिरामिडको ठाडो उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) दिइएका पिरामिडले जम्मा कति ठाउँ ओगटेका छन् ?
 (घ) दिइएका प्रत्येक पिरामिडको आधारबाहेकको क्षेत्रफलमा रु. 80 को दरले रड लगाउन कति खर्च लाग्छ ?



2. वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको आधार भुजाको लम्बाइ 16 cm र पिरामिडको आयतन 1280 cm³ छ भने,

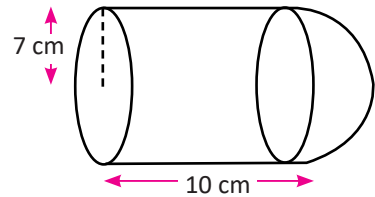
- (क) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) आधारको परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) पिरामिडको छड्के उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल र त्रिभुजाकार सतहहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । दुई क्षेत्रफलमध्ये कुन क्षेत्रफल कतिले बढी हुन्छ ? गणना गरी तुलना गर्नुहोस् ।

3. वर्गाकार आधार भएको एउटा पिरामिडको त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल 540 cm² छ । यदि उक्त पिरामिडको छड्के उचाइ 15 cm छ ।

- (क) पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) पिरामिडको आधारको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) पिरामिडको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. सँगै दिइएको चित्र बेलना र अर्धगोला मिली बनेको एउटा खेलौना हो । उक्त खेलौनाको,

- (क) आधारको व्यास कति हुन्छ ?
 (ख) आधारको परिधिको लम्बाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) खेलौनाको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



5. एउटा ठोस वस्तुको माथिल्लो भागमा 5 cm छड्के उचाइ भएको पिरामिड र तल्लो भागमा वर्गाकार आधार भएको प्रिज्म छ, जसको आधार भुजा 8 cm छ। उक्त सङ्युक्त ठोस वस्तुको आयतन 1024 cm³ छ।
- (क) प्रश्नअनुसारको चित्र बनाउनुहोस्।
 (ख) पिरामिड भागको ठाडो उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ग) उक्त ठोस वस्तुमा पिरामिड भागको ठाडो उचाइ, प्रिज्म भागको उचाइभन्दा कतिले बढी वा घटी वा बराबर छ, गणना गरी लेख्नुहोस्।
 (घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल कति होला ?
6. एउटा टेन्टको तल्लो भाग बेलना र माथिल्लो भाग अर्धगोला मिली बनेको छ। जसमा बेलना र अर्धगोलाको अर्धव्यास उही छ। यदि टेन्टको पूरा उचाइ 6.5 m र बेलना भागको उचाइ मात्र 3 m छ भने,
- (क) प्रश्नअनुसारको चित्र बनाउनुहोस्।
 (ख) बेलनाको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ग) टेन्टको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस्।
 (घ) प्रति वर्ग मिटर कपडाको मूल्य रु. 500 पर्छ भने टेन्ट बनाउन जम्मा कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।
7. एउटा संयुक्त ठोस वस्तु अर्धगोला र सोली मिलेर बनेको छ जसको आधारको अर्धव्यास 7 cm छ। प्रति वर्ग सेन्टिमिटर रु. 6 को दरले उक्त ठोस वस्तुमा रङ लगाउनलाई रु. 5148 लाग्छ भने,
- (क) संयुक्त ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ख) सोलीको छड्के उचाइ कति हुन्छ ?
 (ग) सोलीको ठाडो उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्।
 (घ) उक्त ठोस वस्तुको पूरा उचाइ कति हुन्छ ?
8. समान आधार भएको एउटा बेलना र एउटा सोली संयुक्त रूपमा मिलेर बनेको खेलौना छ जसको व्यास 10 cm छ। उक्त खेलौनाको बेलनाकार भागको लम्बाइ 14 cm र सोलीको उचाइ 12 cm छ। यदि व्यास र सोलीको उचाइको नापलाई साटासाट गरी अर्को एउटा खेलौना बनाइयो भने प्रति वर्ग मिटर एउटै दरमा कुन चाँहि खेलौनामा बढी खर्च लाग्ला, पत्ता लगाउनुहोस्।
- (क) सोलीको छड्के उचाइ कति हुन्छ ?
 (ख) प्रति वर्गमिटर एउटै दरमा कुनचाँहि खेलौनामा बढी खर्च लाग्ला, पत्ता लगाउनुहोस्।
9. वर्ग आधार भएको एउटा षड्मुखाकार ठोस वस्तुमाथि 12 cm ठाडो उचाइ भएको एउटा पिरामिड राखिएको छ। यदि उक्त षड्मुखाकार ठोस वस्तुको आधारको क्षेत्रफल 100 cm² तथा उचाइ 9 cm भए संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा आयतन पत्ता लगाउनुहोस्।
- (क) षड्मुखाकार ठोस वस्तुको आधारको लम्बाइ कति हुन्छ ?
 (ख) संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा आयतन पत्ता लगाउनुहोस्।

10. अर्धव्यास 14 cm र उचाइ 40 cm भएको एउटा बेलनाकार टिनको बट्टा सिमेन्टले भरिएको छ । पखालमा सिमेन्टको काम गर्नुपर्ने भएकाले काम गर्ने कामदारले सो सिमेन्टलाई भुईँमा खन्याउँदा 30 cm अग्लो सोली आकारको थुप्रो बनेछ भने,
- (क) सिमन्टको थुप्रोको आधारको अर्धव्यास कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) सिमन्टको थुप्रोको सतहको क्षेत्रफल (आधारबाहेकको) पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) यदि 1 cm³ बराबर 2.5 gm हुन्छ भने सिमेन्टको तौल कति हुन्छ ?
11. एउटा रङ्गशालाको गेटका चारओटै सतह देखिने 8 फिट अग्ला दुईओटा पिलरहरूमाथि उही आधारका एक एकओटा 4 फिट उचाइ भएका पिरामिड राखिएका छन् । प्रत्येक पिलरको आधार 6 फिट × 6 फिट छ भने,
- (क) प्रश्नअनुसारको दुईओटा चित्र बनाउनुहोस् ।
 (ख) पिरामिडको छड्के सतह पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ग) पिरामिडको छड्के उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) पिरामिडसहितको प्रत्येक पिलरमा रङ लगाउन मिल्ने सतहको क्षेत्रफल हिसाब गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ङ) उक्त पिरामिडसहितको प्रत्येक पिलरमा प्रति वर्ग फिट रु. 110 का दरले रङ लगाउँदा कति खर्च लाग्छ ?
12. एउटा घरको गेटमा उत्रै र उस्तै आकारका दुईओटा पिलर छन् । आयताकार आकारमा भएका पिलरहरूको लम्बाइ 1 फिट, चौडाइ 1 फिट र उचाइ 6 फिट छ । पिलरको आधारसँग बराबर आधार भएको 1 फिट उचाइ भएका पिरामिड दुवै पिलरको माथिपट्टि राखिएको छ ।
- (क) प्रिज्मको छड्के सतह पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) पिलरको आधारको परिमिति कति हुन्छ ?
 (ग) पिरामिडको छड्के उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) पिरामिडसहितको पिलरमा रङ लगाउन मिल्ने सतहको क्षेत्रफल हिसाब गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ङ) उक्त पिरामिडसहितको पिलरमा प्रति वर्ग फिट रु. 52 का दरले रङ लगाउँदा कति खर्च लाग्छ ?
13. एउटा सिमेन्टको चक्काको व्यास 3.5 फिट र उचाइ 1 फिट छ । इनार बनाउँदा प्रति चक्का बराबरको लागत मूल्य रु. 1200 पर्छ । यदि 32 चक्काको एउटा इनार तयार गर्नुपर्ने छ ।
- (क) उक्त इनारको लागत खर्च कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) पानीको आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) उक्त इनारको 18 ओटा चक्कासम्म पानी छ भने इनारको खाली ठाउँको आयतन कति हुन्छ ?

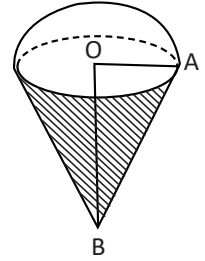
14. बराबर वर्ग आधार भएका दुईओटा पिरामिड मिलेर एउटा संयुक्त ठोस वस्तु बनेको छ । जसको आधारको लम्बाइ 12 cm र उक्त ठोस वस्तुको जम्मा उचाइ 20 cm छ ।

- (क) पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा आयतन कति हुन्छ ?

15. नन्दकिशोर विदेशबाट फर्केर आफ्नै गाउँमा कृषिफार्म खोली विकासे जातका गाई र बाख्रा पालेका छन् । गाई बाख्रालाई पानी खुवाउनका लागि बेलना र सोली आकारको संयुक्त रूपमा मिलेर बनेको ट्याङ्की निर्माण गरेका छन् । उक्त ट्याङ्कीको बेलना भागको भित्री व्यास 1.4m र उचाइ 2.1m छ । सो ट्याङ्कीको माथिल्लो भाग सोली आकारमा छ, जसको ठाडो उचाइ 0.36 m छ भने,

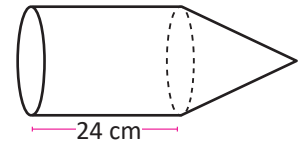
- (क) सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) ट्याङ्कीको आधारको परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउँछ ? लिटरमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

16. दिइएको चित्र संयुक्त ठोस वस्तुको हो । उक्त वस्तुको सोली भागको छड्के उचाइ र अर्धव्यासको अनुपात 5:3 छ । सो ठोस वस्तुको पूरा आयतन $240\pi \text{ cm}^3$ छ ।



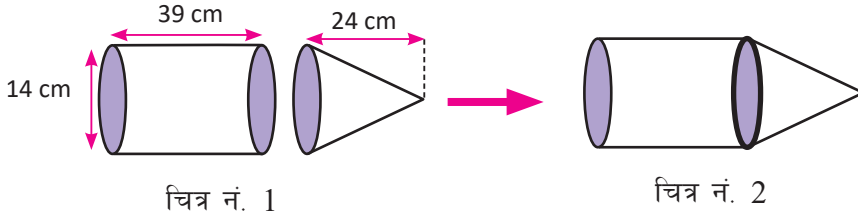
- (क) दिइएको संयुक्त ठोस वस्तु कुन दुईओटा ठोस वस्तुहरू मिली बनेको छ ?
 (ख) सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ग) दिइएका ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) दिइएका ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल के वक्र सतहको क्षेत्रफल हुन्छ ? कारणसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।

17. दिइएको चित्र संयुक्त ठोस वस्तुको हो । उक्त वस्तुको सोली भागको छड्के उचाइ र ठाडो उचाइको अनुपात 13:12 छ । सो ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल $840\pi \text{ cm}^2$ र बेलना भागको उचाइ 24 cm छ ।



- (क) दिइएको संयुक्त ठोस वस्तु कुन दुईओटा ठोस वस्तुहरू मिली बनेको छ ?
 (ख) सोलीको आधारको परिमिति पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ग) दिइएका ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) दिइएका ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल के वक्रसतहको क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ ? हुँदैन भने गणना गरी तुलना गर्नुहोस् ।

18. चित्र नं. (1) मा बराबर आधार भएका बेलना र सोली देखाइएको छ । चित्र नं. (2) मा सोही बेलना र सोली जोडेर एउटा संयुक्त ठोस वस्तु बनाइएको छ ।



- (क) सोलीको आयतन पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
- (ख) चित्र नं.1 मा देखाइएको दुवै ठोस वस्तुहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाई तिनीहरूको क्षेत्रफलको योगफल कति हुन्छ ?
- (ग) चित्र नं. 1 मा देखाइएका ठोस वस्तुको क्षेत्रफलको योगफल र चित्र नं. 2 को संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ? हुँदैन भने कतिको फरक हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) चित्र नं. 1 मा देखाइएको ठोस वस्तुको आयतनको योगफल र चित्र नं. 2 को संयुक्त ठोस वस्तुको आयतन बराबर हुन्छ वा हुँदैन ? कारणसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।
- (ङ) चित्र नं. 1 का दुवै ठोस वस्तुहरूका सतहमा रु. 150 प्रति वर्गमिटरको दरले रङ लगाउँदा लाग्ने जम्मा खर्च र उही दरमा चित्र नं. 2 मा भएको संयुक्त ठोस वस्तुको सतहमा रङ लगाउँदा लाग्ने खर्चमा तुलना गर्नुहोस् ।
19. समान आधार भएको एउटा बेलना र एउटा सोली संयुक्त रूपमा मिलेर बनेको खेलौना छ जसको व्यास 10 cm छ । उक्त खेलौनाको बेलनाकार भागको लम्बाइ 14 cm र सोलीको उचाइ 12 cm छ ।
- (क) सोलीको आयतन पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
- (ख) खेलौनामा सोली भागको छड्के लम्बाइ कति होला ?
- (ग) यदि व्यास र सोलीको उचाइको नापलाई साटासाट गरी अर्को उस्तै खेलौना बनाइयो भने प्रति वर्ग सेन्टिमिटर एउटै दरमा रङ लगाउँदा कुन चाहिँ खेलौनामा बढी खर्च लाग्ला ?
20. एउटा ठोस वस्तु समान अर्धव्यास भएका एउटा बेलना र एउटा सोली मिली बनेको छ । बेलनाको उचाइ र सोलीको छड्के उचाइ क्रमशः 28 से.मि. र 17 से.मि. छन् । यदि सो वस्तुको पूरा सतहमा प्रति 100 वर्ग से.मि. को रु. 140 को दरले रङ लगाउँदा जम्मा रु. 2851.20 खर्च लाग्यो ।
- (क) प्रश्नअनुसारको संयुक्त ठोस वस्तुको चित्र बनाउनुहोस् ।
- (ख) बेलनाको आधार कुन आकारको हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
- (ग) सो सोलीको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

21. एउटा पानी ट्याङ्की बेलनाकार र अर्धगोलाकार भाग मिली बनेको छ। सो ट्याङ्कीको पूरा उचाइ 20 m छ र आधारको क्षेत्रफल 154 m^2 छ। उक्त ट्याङ्कीमा प्रतिलिटर 45 पैसाका दरले पानी भरिन्छ भने,

- (क) 1 m^3 बराबर कति लिटर हुन्छ ?
 (ख) आधारको अर्धव्यास कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।
 (ग) बेलनाकार भागको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्।
 (घ) पानी भर्न जम्मा कति खर्च लाग्ला, पत्ता लगाउनुहोस्।

उत्तर

- (क) $\frac{1}{3} a^2 h$ (ख) 8 cm (ग) 432 cm^2 (घ) Rs 57,600
- (क) $a^2 + 2al$ (ख) 64 cm (ग) 17 cm
(घ) $800 \text{ cm}^2, 544 \text{ cm}^2, 256 \text{ cm}^2$ ले बढी
- (क) $a^2 + 2al$ (ख) 18 cm (ग) 1296 cm^3
- (क) 14 cm (ख) 44 cm (ग) 902 cm^2 (घ) 2258.66 cm^3
- (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् (ख) 3 cm (ग) 12 cm ले कमी छ (घ) 624 cm^2
- (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् (ख) 3.5 m (ग) 143 m^2 (घ) Rs. 71,500
- (क) 858 cm^2 (ख) 25 cm (ग) 24 cm (घ) 31 cm
- (क) 13 cm (ख) साटासाट गरेर पछि बनेको खेलौनामा क्षेत्रफल धेरै हुन्छ त्यसैले बढी खर्च लाग्छ
- (क) 10 cm (ख) 1300 cm^3
- (क) 28 cm (ख) 3611.21 cm^2 (ग) 61,600 gm
- (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् (ख) $2al$ (ग) 5 cm (घ) 252 cm^2 (ङ) Rs. 27,720
- (क) ph (ख) 4 ft. (ग) $\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ft}$ (घ) $(24 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$ (ङ) Rs. 1364.27
- (क) Rs. 38,400 (ख) 308 cm^3 (ग) 134.75 cm^3
- (क) $2al$ (ख) 960 cm^2
- (क) $\pi r(r + l)$ (ख) 4.4 m (ग) 3418.8 l
- (क) सोली र अर्धगोला (ख) πrl (ग) 414.86 cm^2
(घ) हुन्छ, दुवै सतहको क्षेत्रफल एउटै आउने भएकाले
- (क) बेलना र सोली (ख) $2\pi r$ (ग) 10057.14 cm^3
(घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल 314.28 cm^2 ले बढी हुन्छ।
- (क) $\frac{1}{3} a^2 h$ (ख) 2728 cm^2 (ग) 308 cm^2
(घ) दुवैको आयतन 7238 cm^2 (बराबर) (ङ) पहिलोमा रु. 46200 ले बढी
- (क) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ (ख) 13 cm (ग) दोस्रोमा धेरै लाग्छ।
- (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् (ख) वृत्त (ग) 15 cm
- (क) $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$ (ख) $r = 7 \text{ m}$ (ग) 13 m (घ) रु. 12,24,300

6.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएका अनुक्रमको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (क) 2, 4, 6, 8, ... | (ख) 1, 3, 5, 7, ... |
| (ग) 1, 4, 16, 64, ... | (घ) 24, 12, 6, 3, ... |
| (ङ) 5, 8, 11, 14, ... | (च) 2, 6, 18, 54, ... |

प्रश्नहरू

- (अ) माथि दिइएका अनुक्रम अङ्कगणितीय वा ज्यामितीय अनुक्रम के हुन् छुट्याउनुहोस् ।
 (आ) दिइएका अनुक्रमका समान अन्तर वा समान अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (इ) दिइएका अनुक्रमका साधारण पद पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ई) दिइएका अनुक्रमको छैटौँ र आठौँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (उ) दिइएका अनुक्रमलाई श्रेणीमा लेख्नुहोस् ।

6.1 अङ्कगणितीय अनुक्रमको मध्यमान (Means of Arithmetic Sequence)

क्रियाकलाप 1

तलको संवाद अध्ययन गर्नुहोस् :

रीता : राजु, 3, m , 7, ... अङ्कगणितीय अनुक्रम हो भने m को मान कसरी पत्ता लगाउने होला ?

राजु : अङ्कगणितीय अनुक्रमको पछिल्लो पद र अगिल्लो पदको अन्तर बराबर हुन्छ ।

त्यसैले $m - 3 = 7 - m$ गरेर m को मान पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

$$m - 3 = 7 - m$$

अथवा, $m + m = 7 + 3$

अथवा, $m = \frac{7+3}{2} = 5$

रीता : ए, पहिलो पद र तेस्रो पदको औसत नै दोस्रो पद हुने रहेछ है ।

अनिल : यसलाई यसरी पनि गर्न सकिन्छ ।

पहिलो पद $(a) = 3$

दोस्रो पद $(t_2) = a + d$, $d =$ समान अन्तर

तेस्रो पद $(t_3) = a + 2d$

अथवा, $7 = 3 + 2d$

अथवा, $2d = 7 - 3$

अथवा, $2d = 4$

$\therefore d = 2$

अब d को मान $(t_2) = a + d$ को मान राख्दा,

$m = 3 + 2 = 5$

रश्मि : यदि एकभन्दा बढी पद पत्ता लगाउन सोधेको भए कसरी गर्ने होला ?

जस्तै: 3, x , y , z , 19 ... मा x , y , z को मान कति कति होला ?

अनिल : यसलाई पनि अगि गरे जस्तै गरी गर्न सकिन्छ ।

3, x , y , z , 19 ... मा

पहिलो पद $(a) = 3$

पाचौँ पद $(t_5) = 19$

समान अन्तर $(d) = ?$

हामीलाई थाहा छ

$$t_5 = a + (5-1)d$$

अथवा, $19 = 3 + 4d$

अथवा, $4d = 19 - 3$

अथवा, $4d = 16$

$\therefore d = 4$

दोस्रो पद $(t_2) = x = a + d = 3 + 4 = 7$

तेस्रो पद $(t_3) = y = a + 2d = 3 + 2 \times 4 = 11$

चौथो पद $(t_4) = z = a + 3d = 3 + 3 \times 4 = 15$

रीता : ए, 3 र 19 का बिचमा तीनओटा पद पत्ता लगाउँदा 19 पाँचौँ पद हुने रहेछ ।

अनिल : हो, तपाईंले ठिक भन्नुभयो ।

जम्मा पद = मध्यमाको सङ्ख्या + 2

$$n = m + 2$$

(सबै जनाले गणित शिक्षकसँग भेटी उनीहरूबिचको छलफल सुनाए ।)

शिक्षक : तपाईंहरू सबै सही हुनुहुन्छ ।

समानान्तरिय अनुक्रमका पहिलो पद र अन्तिम पदबिचको पद वा पदहरूलाई समानान्तरिय मध्यमा (Arithmetic Mean) भनिन्छ ।

(क) यदि दुईओटा पदबिचमा एउटा मात्र समानान्तरिय मध्यमा पत्ता लगाउनु पर्ने भएमा पहिलो पद र अन्तिम पदको अड्कगणितीय मध्यक निकाल्नु पर्ने रहेछ ।

(ख) यदि दुईओटा पदबिचमा एकभन्दा बढी समानान्तरिय मध्यमा पत्ता लगाउनु पर्ने भएमा अन्तिम पदबाट समान अन्तर (d) पत्ता लगाई सबै मध्यमा निकाल्न सकिँदो रहेछ ।

उदाहरण 1

दुई सङ्ख्या 7 र 17 बिचको एउटा समानान्तरिय मध्यमा निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ दुईओटा पदका बिचमा एउटा मध्यमा भएकाले 7, m , 17

पहिलो पद (a) = 7

तेस्रो पद (t_3) = 17

मध्यमान (m) = ?

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ मध्यमान (m)} &= \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{7+17}{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

वैकल्पिक तरिका

तेस्रो पद (t_3) = $a + 2d$

अथवा, $17 = 7 + 2d$

अथवा, $2d = 17 - 7 = 10$

अथवा, $d = 5$

अब d को मान (t_2) = $a + d$ मा राख्दा

$$m = 7 + 5 = 12$$

उदाहरण 2

दुईओटा पद 3 र 23 का बिचमा पर्ने 3 ओटा समानान्तरिय मध्यमा निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ 3 ओटा समानान्तरिय मध्यमासहितको अनुक्रम 3, m_1 , m_2 , m_3 , 23 हुन्छ ।

पहिलो पद (a) = 3

मध्यमा सङ्ख्या (m) = 3

जम्मा पद सङ्ख्या (n) = $3 + 2 = 5$

पाँचौँ पद (t_5) = 23

हामीलाई थाहा छ पाँचौँ पद (t_5) = $a + (5 - 1)d$

अथवा, $23 = 3 + 4d$

अथवा, $23 - 3 = 4d$

अथवा, $\frac{20}{4} = d$

$\therefore d = 5$

$$\text{अब } m_1 = \text{दोस्रो पद} = a + d = 3 + 5 = 8$$

$$m_2 = \text{तेस्रो पद} = a + 2d = 3 + 2 \times 5 = 13$$

$$m_3 = \text{चौथो पद} = a + 3d = 3 + 3 \times 5 = 18$$

अतः 3 र 23 का बिचका 3 ओटा समानान्तरीय मध्यमाहरू 8, 13 र 18 हुन् ।

उदाहरण 3

दुईओटा पद 3 र 43 का बिचमा 7 ओटा समानान्तरीय मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ 7 ओटा समानान्तरीय मध्यमासहितको अनुक्रम 3, $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, 43$ हुन्छ ।

$$\text{पहिलो पद } (a) = 3$$

$$\text{मध्यमा सङ्ख्या } (m) = 7$$

$$\text{जम्मा पद सङ्ख्या } (n) = 7 + 2 = 9$$

$$\text{नवौँ पद } (t_9) = 23$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ नवौँ पद } (t_9) = a + (9 - 1)d$$

$$\text{अथवा, } 43 = 3 + 8d$$

$$\text{अथवा, } 8d = 43 - 3 = 40$$

$$\text{अथवा, } d = 5$$

$$\text{अब } m_1 = \text{दोस्रो पद} = a + d = 3 + 5 = 8$$

$$m_2 = \text{तेस्रो पद} = a + 2d = 3 + 2 \times 5 = 13$$

$$m_3 = \text{चौथो पद} = a + 3d = 3 + 3 \times 5 = 18$$

$$m_4 = \text{पाँचौँ पद} = a + 4d = 3 + 4 \times 5 = 23$$

$$m_5 = \text{छैटौँ पद} = a + 5d = 3 + 5 \times 5 = 28$$

$$m_6 = \text{सातौँ पद} = a + 6d = 3 + 6 \times 5 = 33$$

$$m_7 = \text{आठौँ पद} = a + 7d = 3 + 7 \times 5 = 38$$

6.2 समानान्तरिय श्रेणीको योगफल (Sum of Arithmetic Series)

क्रियाकलाप 2

एउटा सपिड सेन्टरमा कार्यरत कर्मचारीलाई उसको कार्यसम्पादनका आधारमा नगद प्रोत्साहन गरिंदोरहेछ । एक जना कर्मचारीको पहिलो 7 महिनाको नगद प्रोत्साहनबापतको रकम देहायबमोजिम रहेछ :

| | | | | | | | |
|-------------------|-------|------|------|------|------|------|---------|
| 2079 साल | वैशाख | जेठ | असार | साउन | भदौ | असोज | कात्तिक |
| बढेको तलब (रु.मा) | 800 | 1000 | 1200 | 1400 | 1600 | 1800 | 2000 |

माथिको तालिका अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नमाथि छलफल गर्नुहोस् :

- उक्त कर्मचारीले प्रत्येक महिना कति रकमका दरले प्रोत्साहन रकम बढाउँदै लगेका रहेछन् ?
- वि.स. 2079 वैशाखदेखि कार्तिकसम्ममा जम्मा कति रकम प्रोत्साहनबापत बुभेका रहेछन् ?
- यही दरले बढ्दै गएमा वि.स. 2080 वैशाख महिनामा कति रकम प्रोत्साहनबापत पाउँछन् ?
- वि.स. 2080 वैशाखसम्मको जम्मा प्रोत्साहन रकम कति होला ?

यहाँ प्रत्येक महिना समान अन्तर रु. 200 ले तलब बढेको रहेछ ।

अब 7 महिनाको प्रोत्साहन रकमलाई श्रेणीमा राख्दा,

$$800 + 1000 + 1200 + 1400 + 1600 + 1800 + 2000 \text{ हुन्छ ।}$$

7 महिनासम्मको जम्मा प्रोत्साहन रकमलाई S_7 ले जनाउँदा,

$$S_7 = 800 + 1000 + 1200 + 1400 + 1600 + 1800 + 2000 = 9800 \dots (i)$$

$$\text{पहिलो पद (a) = 800, समान अन्तर (d) = 1000 - 800 = 200}$$

$$\text{जम्मा पद सङ्ख्या (n) = 7 सातौँ पद (t_7) = 2000}$$

समीकरण (i) लाई यसरी पनि लेख्न सकिन्छ,

$$S_7 = 2000 + 1800 + 1600 + 1400 + 1200 + 1000 + 800 = 9800 \dots (ii)$$

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा

$$2S_7 = 2800 + 2800 + 2800 + 2800 + 2800 + 2800 + 2800$$

$$\text{अथवा, } 2S_7 = 7 \times 2800$$

$$\text{अथवा, } S_7 = \frac{7}{2} \times 2800 = 9800$$

2800 लाई पहिलो पद र सातौं पदका रूपमा लेख्दा,

$$\text{अथवा, } S_7 = \frac{7}{2} (800 + 2000)$$

$\therefore S_n = \frac{n}{2} (a + t_n)$ जहाँ a = पहिलो महिनाको प्रोत्साहन रकम, t_n = अन्तिम महिनाको प्रोत्साहन रकम

$$\begin{aligned} \text{अब } S_n &= \frac{n}{2} (a + t_n) \\ &= \frac{n}{2} [a + a + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \quad [\because t_n = a + (n-1)d] \end{aligned}$$

200 का दरले बढ्दै जाँदा वि.सं 2080 वैशाख महिनासम्म जम्मा 13 महिना हुन्छ ।

$$\begin{aligned} 13 \text{ औं महिनामा पाउने प्रोत्साहन रकम } (t_{13}) &= 800 + (13-1)200 \\ &= 800 + 12 \times 200 \\ &= \text{रु. } 3,200 \end{aligned}$$

अतः वि.सं. 2080 वैशाख महिनामा पाउने प्रोत्साहन रकम = रु. 3,200

अब 13 औं महिनासम्मको जम्मा प्रोत्साहन रकम $S_{13} = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [(2a + (n-1)d)] \\ &= \frac{13}{2} [2 \times 800 + (13-1) 200] \\ &= \frac{13}{2} [1600 + (12 \times 200)] = \frac{13}{2} [1600 + 2400] = \frac{13}{2} \times 4000 \\ &= 26000 \end{aligned}$$

13 औं महिनासम्मको जम्मा प्रोत्साहन रकम = रु. 26,000

कुनै समानान्तरिय श्रेणीको n औं पदसम्मको योगफल $S_n = \frac{n}{2} (a + t_n)$ हुन्छ ।

यहाँ पहिलो पद = a , अन्तिम पद = t_n , समान अन्तर = d , पद सङ्ख्या = n र n औं पदसम्मको योगफल = S_n

फेरि $t_n = a + (n-1)d$ मान राख्दा,

$$S_n = \frac{n}{2} (a + t_n) = \frac{n}{2} [a + \{a + (n-1)d\}] = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

नोट: अन्तिम पदलाई (t_n) वा l ले पनि जनाउने गरेको पाइन्छ ।

उदाहरण 4

$1 + 2 + 3 + \dots$ का पहिलो 20 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $1 + 2 + 3 + \dots$ समानान्तरीय अनुक्रम हो ।

त्यसैले पहिलो पद $(a) = 1$

समान अन्तर $(d) = 2 - 1 = 1$

पद सङ्ख्या $(n) = 20$

20 औँ पदसम्मको योगफल $(S_{20}) = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d] = \frac{20}{2} [2 \times 1 + (20 - 1)1] \\ &= 10(2 + 19) \\ &= 10 \times 21 = 210\end{aligned}$$

उदाहरण 5

$2 + 4 + 6 + \dots$ का पहिलो 13 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $2 + 4 + 6 + \dots$ समानान्तरीय अनुक्रम हो ।

त्यसैले पहिलो पद $(a) = 2$

समान अन्तर $(d) = 4 - 2 = 2$

पद सङ्ख्या $(n) = 13$

13 औँ पदसम्मको योगफल $(S_{13}) = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d] = \frac{13}{2} [2 \times 2 + (13 - 1)2] \\ &= \frac{13}{2} (4 + 24) \\ &= \frac{13}{2} \times 28 \\ &= 182\end{aligned}$$

उदाहरण 6

श्रेणी $5 + 17 + 29 + \dots$ का 28 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ $5 + 17 + 29 + \dots$ समानान्तरीय अनुक्रम हो ।

त्यसैले पहिलो पद $(a) = 5$

समान अन्तर $(d) = 17 - 5 = 12$

पद सङ्ख्या $(n) = 28$

28 औं पदसम्मको योगफल $(S_{28}) = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

$$\begin{aligned} S_{28} &= \frac{28}{2} [2 \times 5 + (28 - 1)12] \\ &= 14(10 + 324) \\ &= 14 \times 334 = 4676 \end{aligned}$$

उदाहरण 7

एउटा समानान्तरीय श्रेणीको पहिलो पद 2, अन्तिम पद 29 र जम्मा पदको योगफल 155 छ । उक्त श्रेणीका जम्मा पदसङ्ख्या र समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ पहिलो पद $(a) = 2$

अन्तिम पद $(t_n) = 29$

जम्मा योगफल $S_n = 155$

जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = ?$

समान अन्तर $(d) = ?$

हामीलाई थाहा छ $S_n = \frac{n}{2} (a + t_n)$

$$\text{अथवा, } 155 = \frac{n}{2}(2 + 29)$$

$$\text{अथवा, } 310 = 31n$$

$$\text{अथवा, } n = \frac{310}{31} = 10$$

फेरि हामीलाई थाहा छ,

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\text{अथवा, } 29 = 2 + (10 - 1)d$$

$$\text{अथवा, } 27 = 9d$$

$$\text{अथवा, } d = \frac{27}{9} = 3$$

तसर्थ उक्त श्रेणीको पद सङ्ख्या 10 र समान अन्तर 3 हुन्छ ।

उदाहरण 8

समानान्तरिय श्रेणी $24 + 20 + 16 + \dots$ मा पदको योगफल 72 छ भने उक्त श्रेणीमा जम्मा कतिओटा पद छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ पहिलो पद $(a) = 24$

समान अन्तर $(d) = 20 - 24 = -4$

जम्मा योगफल $S_n = 72$ छ

जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = ?$

हामीलाई थाहा छ

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$\text{अथवा, } 72 = \frac{n}{2} [2 \times 24 + (n - 1)(-4)]$$

$$\text{अथवा, } 144 = n(48 - 4n + 4)$$

$$\text{अथवा, } 144 = 52n - 4n^2$$

$$\text{अथवा, } 4n^2 - 52n + 144 = 0$$

$$\text{अथवा, } n^2 - 13n + 36 = 0$$

$$\text{अथवा, } n^2 - 9n - 4n + 36 = 0$$

$$\text{अथवा, } n(n - 9) - 4(n - 9) = 0$$

$$\text{अथवा, } (n - 9)(n - 4) = 0$$

या त, $n - 9 = 0 \quad \therefore n = 9$

अथवा, $n - 4 = 0 \quad \therefore n = 4$

तसर्थ जम्मा पदको सङ्ख्या 4 अथवा 9 हुन्छ ।

उदाहरण 9

समानान्तर्रीय श्रेणीको तेस्रो पद 0, दसौं पद 42 छ । उक्त श्रेणीको पहिलो 15 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ तेस्रो पद $(t_3) = 0$

दसौं पद $(t_{10}) = 42$

जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = 15$

जम्मा योगफल $S_{15} = ?$

हामीलाई थाहा छ

$$t_n = a + (n - 1) d$$

$$\text{अथवा, } t_3 = a + (3 - 1) d$$

$$\text{अथवा, } 0 = a + 2d$$

$$\text{अथवा, } a + 2d = 0 \dots \dots \dots (i)$$

त्यस्तै, $t_{10} = a + (10 - 1) d$

$$\text{अथवा, } 42 = a + 9d$$

$$a + 9d = 42 \dots \dots \dots (ii)$$

समीकरण (i) बाट समीकरण (ii) घटाउँदा,

$$a + 2d = 0$$

$$\underline{a + 9d = 42}$$

$$\underline{-7d = -42}$$

अथवा, $d = \frac{42}{7} = 6$

$$\therefore d = 6$$

अब d को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$$a + 2 \times 6 = 0$$

$$a = -12$$

$$\begin{aligned} \text{अब पहिला 15 ओटा पदको जम्मा योगफल } S_{15} &= \frac{15}{2} [2 \times (-12) + (15 - 1)6] \\ &= \frac{15}{2} [-24 + 84] \\ &= 450 \end{aligned}$$

तसर्थ पहिलो 15 पदको जम्मा योगफल 450 हुन्छ ।

उदाहरण 10

एक जना कर्मचारीको हालको मासिक तलब रु. 40,000 छ। प्रत्येक वर्ष उसको ग्रेड रकम रु. 1,000 मासिक तलबमा थपिदै जान्छ। यदि यही दरले बढ्दै जाने हो भने 6 वर्षपछि उसको जम्मा आमदानी कति हुन्छ ? उसले 6 वर्षको जम्मा आमदानी रु. 35,00,000 पुऱ्याउन कति रकम अपुग हुन्छ, गणना गर्नुहोस्।

समाधान

यहाँ पहिलो वर्षको जम्मा आमदानी $(a) = 40000 \times 12 = \text{रु. } 4,80,000$

प्रत्येक वर्ष बढ्ने रकम $(d) = 1000 \times 12 = \text{रु. } 12,000$

6 वर्षपछिको जम्मा आमदानी $(S_6) = ?$

जम्मा वर्ष $(n) = 6$

हामीलाई थाहा छ,

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

$$S_6 = \frac{6}{2} [2 \times 480000 + (6 - 1) \times 12000]$$

$$= 3[960000 + 60000]$$

$$= 3 \times 10,20,000$$

$$= 30,60,000$$

तसर्थ 6 वर्षमा हुने जम्मा आमदानी रकम रु. 30,60,000 हुन्छ।

त्यसैले 6 वर्षमा हुने जम्मा आमदानी रु. 35 लाख पुऱ्याउन,

जम्मा $35,00,000 - 30,60,000 = \text{रु. } 4,40,000$ अपुग हुन्छ।

अभ्यास 6.1

- (क) समानान्तरिय मध्यमा भनेको के हो ?

(ख) यदि a, m, b समानान्तरिय अनुक्रममा भए m लाई a र b का रूपमा लेख्नुहोस्।

(ग) दुई सङ्ख्या 12 र 18 को मध्यमान कति हुन्छ, लेख्नुहोस्।
- समानान्तरिय मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) 6 र 10 (ख) -2 र 2 (ग) -4 र 8 (घ) $(a + b)$ र $(a - b)$
- समानान्तरिय मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) 5 र 20 का बिचमा 4 ओटा

(ख) 70 र 14 का बिचमा 6 ओटा

(ग) 5 र -9 का बिचमा 6 ओटा

4. तल दिइएका अनुक्रम समानान्तर अनुक्रम हुन् । उक्त अनुक्रमबाट x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $5, x, 9, \dots$

(ख) $x + 1, x + 5, 3x + 1, \dots$

(ग) $x + 2, 3x, 4x + 1, \dots$

5. दिइएका समानान्तरीय श्रेणीको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $7 + 11 + 15 + 19 \dots$, 20 ओटा पद

(ख) $4 - 1 - 6 - 11 - 16 - \dots$, 7 ओटा पद

(ग) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots$, 16 ओटा पद

(घ) $5 + 10 + 15 + \dots + 65$

(ङ) $-64 - 48 - 32 - \dots + 32$

(च) पहिलो 10 ओटा बिजोर सङ्ख्याको योगफल

(छ) पहिलो 100 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याको योगफल

(ज) 50 देखि 100 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याको योगफल

6. समानान्तरीय श्रेणीको पहिलो पद, अन्तिम पद र जम्मा पदको योगफल निम्नानुसार दिइएको छ । यसका आधारमा समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) पहिलो पद = 1, अन्तिम पद = 50 र जम्मा पदको योगफल = 204

(ख) पहिलो पद = 60, अन्तिम पद = 20 र जम्मा पदको योगफल = 440

(ग) पहिलो पद = 17, अन्तिम पद = $-\frac{99}{8}$ र जम्मा पदको योगफल = $\frac{407}{16}$

7. समानान्तरीय श्रेणीको समान अन्तर, पदको सङ्ख्या र जम्मा पदको योगफल निम्नानुसार दिइएको छ । पहिलो पद पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) समान अन्तर = -3, पदको सङ्ख्या = 10 र जम्मा पदको योगफल = 325

(ख) समान अन्तर = 9, पदको सङ्ख्या = 9 र जम्मा पदको योगफल = 108

(ग) समान अन्तर = 3, पदको सङ्ख्या = 10 र जम्मा पदको योगफल = 155

8. (क) समानान्तरीय श्रेणी $4 + 10 + 16 + 22 + \dots$ मा कतिओटा सङ्ख्याको जम्मा योगफल 374 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) समानान्तरीय श्रेणीमा पहिलो पद 36 र समान अन्तर 9 छ । कतिओटा सङ्ख्याको जम्मा योगफल 540 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. (क) समानान्तरीय श्रेणीको तेस्रो पद -15 र आठौँ पद 10 भए पहिलो 16 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) समानान्तरीय श्रेणीको पाँचौँ पद 10 र एघारौँ पद 22 भए पहिलो 20 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. (क) समानान्तरीय श्रेणीको पहिलो छ, पदको योगफल 75 र पहिलो 12 पदको योगफल 390 भए पहिलो 20 पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) समानान्तरीय श्रेणीको पहिलो सात पदको योगफल 21 र पहिलो 12 पदको योगफल 126 भए उक्त श्रेणी पत्ता लगाउनुहोस् ।
11. (क) नेपाली ढाका उद्योगमा कार्यरत एक जना कामदारले पहिलो वर्षमा 1,000 ओटा टोपी बनाए । प्रत्येक वर्ष उनले 100 का दरले टोपीको सङ्ख्या बढाउँदै गए । के 10 वर्षपछि उनले टोपीको सङ्ख्या 15,000 पुऱ्याउन सक्लान् त ? गणना गरी लेख्नुहोस् ।
- (ख) एक जना कर्मचारी मासिक तलब रु. 60,000 कमाउने गरी नोकरीमा लागे । प्रत्येक वर्ष उनको तलबमा समान रु. 24,000 का दरले बढोत्तरी पाउँछन् । उसले जम्मा आम्दानी रु. 1,02,24,000 पुऱ्याउन चाहन्छन् । त्यसका लागि उसले कति वर्षसम्म नोकरी गर्नुपर्ला ? गणना गरी कारणसहित उल्लेख गर्नुहोस् । (यहाँ ब्याज समावेश गरिने छैन)

परियोजना कार्य

तपाईंका आमा वा बुबालाई पनि आफ्नो हरेक जन्मदिनमा वार्षिक समान अन्तरमा बढाउने गरी केही रकम जम्मा गर्न लगाउनुहोस् र 5 वर्षमा कसको रकम कति बढी हुने रहेछ, जम्मा भएको पैसा कसरी सदुपयोग गर्ने आदि विषयमा साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (ख) $m = \frac{a+b}{2}$ (ग) 15 2. (क) 8 (ख) 0 (ग) 2 (घ) a
3. (क) 8, 11, 14, 17 (ख) 62, 54, 46, 38, 30, 22 (ग) 3, 1, -1, -3, -5, -7
4. (क) 7 (ख) 4 (ग) 3
5. (क) 900 (ख) -77 (ग) 128 (घ) 455
(ङ) -112 (च) 100 (छ) 5050 (ज) 3825
6. (क) 7 (ख) -4 (ग) $-\frac{47}{16}$
7. (क) 46 (ख) -24 (ग) 2
8. (क) 11 (ख) 8
9. (क) 200 (ख) 420
10. (क) $\frac{3550}{3}$ (ख) $-6 -3 + 0 + \dots$
11. (क) सक्रम, 500 कम (ख) 12 वर्ष

6.3 गुणोत्तर अनुक्रमको मध्यमान (Means of Geometric Sequence)

क्रियाकलाप 1

तल दिइएका गुणोत्तर अनुक्रममा थाहा नभएका पद कसरी पत्ता लगाउने होला, जोडी जोडीमा छलफल गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(क) $3, m, 27, \dots$

(ख) $2, m_1, m_2, m_3, 512, \dots$

यहाँ (क) $3, m, 27, \dots$ गुणोत्तर अनुक्रममा भएकाले $\frac{3}{m} = \frac{m}{27}$ हुन्छ ।

$$\frac{3}{m} = \frac{m}{27}$$

$$\text{अथवा, } m^2 = 3 \times 27$$

$$\text{अथवा, } m = \sqrt{(3 \times 27)} = 9$$

$$\text{दोस्रो पद} = \sqrt{\text{पहिलो पद} \times \text{तेस्रो पद}}$$

(ख) $2, m_1, m_2, m_3, 512, \dots$ गुणोत्तर अनुक्रममा भएकाले,

यहाँ पहिलो पद $(a) = 2$

मध्यमा $(m) = 3$

जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = m + 2 = 3 + 2 = 5$

पाँचौँ पद $(t_5) = 512$

हामीलाई थाहा छ $t_n = ar^{n-1}$

$$\text{अथवा, } 512 = 2r^{5-1}$$

$$\text{अथवा, } 256 = r^4$$

$$\text{अथवा, } (4)^4 = r^4$$

$$\therefore r = 4$$

अब दोस्रो पद $(t_2) = m_1 = ar = 2 \times 4 = 8$

$$\text{तेस्रो पद } (t_3) = m_2 = ar^2 = 2 \times 4^2 = 32$$

$$\text{चौथो पद } (t_4) = m_3 = ar^3 = 2 \times 4^3 = 128$$

गुणोत्तर अनुक्रमका पहिलो पद र अन्तिम पदबिचको पद वा पदहरूलाई गुणोत्तर मध्यमा (Geometric Mean) भनिन्छ ।

(क) यदि दुईओटा पदबिचमा एउटा मात्र गुणोत्तर मध्यमा पत्ता लगाउन पहिलो पद र अन्तिम पदको गुणनफलको वर्गमूल निकाल्नु पर्ने रहेछ ।

(ख) यदि दुईओटा पदबिचमा एकभन्दा बढी गुणोत्तर मध्यमा पत्ता लगाउनु पर्ने भएमा अन्तिम पदबाट समान अनुपात पत्ता लगाई सबै मध्यमा निकाल्न सकिँदोरहेछ ।

उदाहरण 1

दुई सङ्ख्या 2 र 32 बिचमा पर्ने एउटा गुणोत्तर मध्यमा निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ दुईओटा पदका बिचमा एउटा मध्यमा भएकाले 2, m , 32

$$\text{पहिलो पद } (a) = 2$$

$$\text{तेस्रो पद } (t_3) = 32$$

$$\text{दोस्रो पद अर्थात मध्यमान } (m) = ?$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ मध्यमान } (m) = \sqrt{(a \times t_3)} = \sqrt{(2 \times 32)} = 8$$

अतः गुणोत्तर मध्यमा $(m) = 8$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

दुईओटा पद 5 र 405 का बिचमा 3 ओटा गुणोत्तर मध्यमा निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ 3 ओटा गुणोत्तर मध्यमासहितको अनुक्रम 5, m_1 , m_2 , m_3 , 405 हुन्छ ।

$$\text{पहिलो पद } (a) = 5$$

$$\text{मध्यमा सङ्ख्या } (m) = 3$$

$$\text{जम्मा पद सङ्ख्या } (n) = 3 + 2 = 5$$

$$\text{पाँचौँ पद } (t_5) = 405$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ } t_5 = ar^{5-1}$$

$$\text{अथवा, } 405 = 5r^{5-1}$$

$$\text{अथवा, } 405 = 5r^4$$

$$\text{अथवा, } 81 = r^4$$

$$\text{अथवा, } 3^4 = r^4$$

$$\therefore r = 3$$

$$\text{अब } m_1 = \text{दोस्रो पद} = ar = 5 \times 3 = 15$$

$$m_2 = \text{तेस्रो पद} = ar^2 = 5 \times 3^2 = 45$$

$$m_3 = \text{चौथो पद} = ar^3 = 5 \times 3^3 = 135$$

अतः 5 र 405 का बिचका 3 मध्यमाहरू 15, 45 र 135 हुन् ।

6.4 गुणोत्तर श्रेणीको योगफल (Sum of Geometric Series)

क्रियाकलाप 4

एउटा औषधी उद्योगमा कार्यरत कर्मचारीको मासिक तलब रु. 10,000 थियो । कोभिड १९ रोगका कारण कर्मचारीको काम र माग बढेसँगै तलब पनि प्रति महिना 10% बढाउने निर्णय भयो । यसरी प्रति महिना 10% ले तलब बढ्दै जाने हो भने 5 महिनाको अन्त्यमा उसले जम्मा कति आम्दानी गर्ला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ कर्मचारीको सुरुका महिनाको तलब = 10,000

$$\text{दोस्रो महिनाको तलब} = 10,000 + 10,000 \times 10\% = \text{रु.} 11,000$$

$$\text{तेस्रो महिनाको तलब} = 11,000 + 11,000 \times 10\% = \text{रु.} 12,100$$

$$\text{चौथो महिनाको तलब} = 12,100 + 12,100 \times 10\% = \text{रु.} 13,310$$

$$\text{पाँचौँ महिनाको तलब} = 13,310 + 13,310 \times 10\% = \text{रु.} 14,641$$

अब पाँच महिनाको तलब रकमलाई श्रेणीमा राख्दा,

$$S_5 = 10000 + 11000 + 12100 + 13310 + 14641 \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{समान अनुपात } (r) = \frac{11000}{10000} = \frac{12100}{11000} = \frac{13310}{12100} = \frac{14641}{13310} = 1.1$$

तसर्थ समीकरण (i) लाई 1.1 ले गुणन गर्दा,

$$1.1 \times (S_5) = 11000 + 12100 + 13310 + 14641 + 16105.1 \dots \dots \dots (ii)$$

समीकरण (ii) बाट समीकरण (i) घटाउँदा,

$$\text{अथवा, } (1.1 - 1) S_5 = 16105.1 - 10000$$

$$\text{अथवा, } (1.1 - 1) S_5 = 10000(1.1)^5 - 10000$$

$$\text{अथवा, } (1.1 - 1) S_5 = 10000\{(1.1)^5 - 1\}$$

$$\text{अथवा, } S_5 = \frac{10000[(1.1)^5 - 1]}{(1.1 - 1)}$$

यसलाई पहिलो पद (a), समान अनुपात (r) र जम्मा पद सङ्ख्या (n) का रूपमा लेख्दा,

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

$$\text{अथवा, } S_5 = 61051$$

अतः उक्त कर्मचारीको 5 महिनासम्मको जम्मा आम्दानी रु. 61051 हुन्छ ।

कुनै गुणोत्तर अनुक्रमको n औँ पदसम्मको योगफल $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ जहाँ $r > 1$ र

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ जहाँ } r < 1 \text{ हुन्छ ।}$$

यहाँ पहिलो पद = a, समान अनुपात = r, पद सङ्ख्या = n र n औँ पदसम्मको योगफल = S_n

$$\text{फेरि } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{ar^n - a}{r - 1} = \frac{ar^{n-1} \times r - a}{r - 1}$$

$$= \frac{t_n r - a}{r - 1} \quad \therefore t_n = ar^{n-1}$$

उदाहरण 3

गुणोत्तर श्रेणी $1 + 3 + 9 + 27 + \dots$ को पहिलो 5 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो पद $(a) = 1$

समान अनुपात $(r) = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = 3$

जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = 5$

हामीलाई थाहा छ $r > 1$, $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$$\begin{aligned} \text{तसर्थ } S_5 &= \frac{1[(3^5 - 1)]}{3 - 1} \\ &= \frac{243 - 1}{2} = 121 \end{aligned}$$

अतः गुणोत्तर श्रेणी $1 + 3 + 9 + 27 + \dots$ को पहिलो 5 ओटा पदको योगफल 121 हुन्छ ।

उदाहरण 4

गुणोत्तर श्रेणी $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ को पहिलो 5 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो पद $(a) = 2$

समान अनुपात $(r) = \frac{1}{2}$

पदको सङ्ख्या $(n) = 5$

हामीलाई थाहा छ $r < 1$, $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$$S_5 = \frac{2\{1 - (\frac{1}{2})^5\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2(1 - \frac{1}{32})}{\frac{1}{2}} = 4(1 - \frac{1}{32}) = \frac{31}{8}$$

अतः गुणोत्तर श्रेणी $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ को पहिलो 5 ओटा पदको योगफल $\frac{31}{8}$ हुन्छ ।

उदाहरण 5

गुणोत्तर श्रेणी $3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 768$ को योगफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो पद $(a) = 3$

समान अनुपात $(r) = \frac{6}{3} = 2$

अन्तिम पद $(t_n) = 768$

अब पहिलो पद र अन्तिम पद दिइएकाले $S_n = \frac{t_n r - a}{r - 1}$ हुन्छ ।

$$S_n = \frac{768 \times 2 - 3}{2 - 1} = 1536 - 3 = 1533$$

अतः गुणोत्तर श्रेणी $3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 768$ को योगफल 1533 हुन्छ ।

उदाहरण 6

गुणोत्तर श्रेणीको पहिलो पद 7 र अन्तिम पद 448 तथा तिनीहरूको योगफल 889 भए समान अनुपात कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो पद $(a) = 7$

अन्तिम पद $(l) = 448$

जम्मा योगफल $(S_n) = 889$

अब पहिलो पद र अन्तिम पद दिइएकाले $S_n = \frac{t_n r - a}{r - 1}$ हुन्छ ।

$$\text{तसर्थ } S_n = \frac{t_n r - a}{r - 1}$$

$$\text{अथवा, } 889 = \frac{448 \times r - 7}{r - 1}$$

$$\text{अथवा, } 889r - 889 = 448r - 7$$

$$\text{अथवा, } 889r - 448r = 889 - 7$$

$$\text{अथवा, } 441r = 882$$

$$\text{अथवा, } r = \frac{882}{441} = 2$$

अतः समान अनुपात 2 हुन्छ ।

उदाहरण 7

गुणोत्तर श्रेणीको तेस्रो र छैटौँ पद क्रमशः 27 र 729 छन् भने पहिलो 10 पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधानक

यहाँ तेस्रो पद $(t_3) = 27$, छैटौँ पद $(t_6) = 729$ छन् ।

हामीलाई थाहा छ $t_n = ar^{n-1}$

$$\text{अथवा, } t_3 = ar^{3-1} = ar^2$$

$$\text{अथवा, } 27 = ar^2 \dots \dots \dots \text{(i)}$$

$$\text{अथवा, } t_6 = ar^{6-1} = ar^5$$

$$\text{अथवा, } 729 = ar^5 \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) लाई (i) ले भाग गर्दा

$$\text{अथवा, } \frac{729}{27} = \frac{ar^5}{ar^2}$$

$$\text{अथवा, } 27 = r^3$$

$$\text{अथवा, } 3^3 = r^3$$

$$\text{अथवा, } r = 3$$

अतः समान अनुपात 3 हुन्छ ।

फेरि r को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$$27 = a \times 32$$

$$\therefore a = 3$$

अब यहाँ $r > 1$ छ । त्यसैले $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ हुन्छ ।

$$\text{तसर्थ } S_{10} = \frac{a\{(3)^{10} - 1\}}{3 - 1} = \frac{3(59049 - 1)}{2} = 88,572$$

अतः पहिलो 10 ओटा पदको योगफल 88,572 हुन्छ ।

उदाहरण 8

गुणोत्तर श्रेणी $64 + 32 + 16 + \dots$ मा कतिओटा पदको जम्मा योगफल $\frac{255}{2}$ हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो पद $(a) = 64$

$$\text{समान अनुपात } (r) = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$$\text{जम्मा योगफल } S_n = \frac{255}{2} \text{ छ ।}$$

जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = ?$

$$\text{यहाँ } r < 1 \text{ छ । त्यसैले } (S_n) = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

$$\text{or, } \frac{255}{2} = \frac{64\{1 - (\frac{1}{2})^n\}}{(1 - \frac{1}{2})} = \frac{64\{1 - (\frac{1}{2})^n\}}{\frac{1}{2}} = 128 \{1 - (\frac{1}{2})^n\}$$

$$\text{or, } \frac{255}{256} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

$$\text{or, } (\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{255}{256}$$

$$\text{or, } (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{256}$$

$$\text{or, } (\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^8$$

$$\therefore n = 8$$

अतः दिइएको श्रेणीमा योगफल $\frac{255}{2}$ हुन जम्मा 8 ओटा पद हुनुपर्छ ।

उदाहरण 9

हरिले रामनरेशसँग 9 ओटा किस्ताबन्दीमा तिर्ने गरी रु. 19,682 सापटी लिए । प्रत्येक किस्ताबन्दीमा अगिल्लोभन्दा पछिल्लो किस्ताबन्दी तेब्बरका दरले बढी तिर्दै जान्छन् भने पहिलो किस्ताबन्दी र अन्तिम किस्ताबन्दीबिचको फरक कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ समान अनुपात $(r) = 3$ (तेब्बर)

जम्मा पदको योगफल $(S_n) = \text{रु. } 19682$

पहिलो पद $(a) = ?$

नवौँ पद $(t_9) = ?$

यहाँ $r > 1$ छ । त्यसैले $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ हुन्छ ।

$$\text{अथवा, } 19682 = \frac{a(3^9 - 1)}{3 - 1}$$

$$\text{अथवा, } 19682 = \frac{a(19683 - 1)}{2}$$

$$\text{अथवा, } 19682 = \frac{a \times 19682}{2}$$

$$\therefore a = 2$$

पहिलो किस्ताबन्दी = रु. 2

फेरि अन्तिम किस्ताबन्दी $(t_9) = ar^{n-1} = 2 \times 3^{9-1} = 2 \times 3^8 = \text{रु. } 13122$

तसर्थ अन्तिम किस्ताबन्दी र पहिलो किस्ताबन्दीबिचको फरक $13122 - 2 = \text{रु. } 13120$ छ ।

अभ्यास 6.2

- (क) गुणोत्तर मध्यमा भन्नाले के बुझिन्छ ?

(ख) यदि धनात्मक सङ्ख्या a, m र b गुणोत्तर अनुक्रममा भए m लाई a र b का रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ग) 3 र 27 बिचको गुणोत्तर मध्यमा कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।
- दिइएका दुई पदबिच पर्ने गुणोत्तर मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) -4 र -64 (ख) $\frac{1}{5}$ र 125 (ग) 7 र 343
- गुणोत्तर मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 6 र 192 का बिचमा 4 ओटा

(ख) 5 र 405 का बिचमा 3 ओटा

(ग) $\frac{9}{4}$ र $\frac{4}{9}$ का बिचमा 3 ओटा

4. दिइएको गुणोत्तर अनुक्रमबाट, x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :
- (क) 4, x र 9
 (ख) x , 4 र 8
 (ग) 5, 25 र $x+1$
5. दिइएका गुणोत्तर श्रेणीको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् :
- (क) $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$, 6 ओटा पद
 (ख) $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + \dots$, 5 ओटा पद
 (ग) $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \dots$, 6 ओटा पद
 (घ) $16 + 8 + 4 + \dots + \frac{1}{16}$
 (ङ) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{729}$
6. गुणोत्तर श्रेणीको पहिलो पद, अन्तिम पद र जम्मा पदको योगफल निम्नानुसार दिइएको छ । यसका आधारमा समान अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् :
- (क) पहिलो पद = 2, अन्तिम पद = 486 र जम्मा पदको योगफल = 728
 (ख) पहिलो पद = 5, अन्तिम पद = 1215 र जम्मा पदको योगफल = 1820
 (ग) पहिलो पद = 3, अन्तिम पद = 768 र जम्मा पदको योगफल = 1533
7. (क) गुणोत्तर श्रेणीको दोस्रो पद 4 र सातौँ पद 128 भए पहिलो 10 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) गुणोत्तर श्रेणीको दोस्रो पद 3 र पाँचौँ पद 81 भए पहिलो 7 ओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. (क) गुणोत्तर श्रेणी $32 + 48 + 72 + \dots$ मा कतिओटा पदको योगफल 665 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) गुणोत्तर श्रेणी $6 - 12 + 24 - 48 + \dots$ मा कतिओटा पदको योगफल -2046 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. सरिताले उसकी साथी गरिमासँग 6 ओटा किस्ताबन्दीमा तिर्ने गरी रु. 43680 सापटी लिइन् । प्रत्येक किस्ताबन्दीमा अगिल्लोभन्दा पछिल्लो किस्ताबन्दी तेब्बरका दरले बढी तिर्ने जान्छिन् भने पहिलो किस्ताबन्दी र अन्तिम किस्ताबन्दीबिचको फरक कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

शिक्षकको सहभागितामा साथीहरूको दुई समूह A र B बनाउनुहोस् र गणितीय समस्या समाधान गर्ने अभ्यासमा सरिक हुन 1 हप्ताको योजना बनाउनुहोस्। तपाईंका शिक्षकले समूह A का लागि प्रत्येक दिन दोब्बरको सङ्ख्यामा थप्दै अभ्यासका लागि समस्या दिनुहुन्छ भने समूह B का लागि प्रत्येक दिन तेब्बरको सङ्ख्यामा थप्दै अभ्यासका लागि समस्या दिनुहुन्छ। समूह A का लागि पहिलो दिन जम्मा 3 ओटा सङ्ख्यामा मात्र समस्या दिनुभयो र समूहका B का लागि पहिलो दिन जम्मा 1 ओटा सङ्ख्यामा मात्र समस्या दिनुभयो।

एक हप्तापछि कुन समूहले जम्मा कति कतिओटा समस्या समाधान गरेछन् पत्ता लगाउनुहोस् र छलफल गर्नुहोस्।

उत्तर

- (ख) $m = \sqrt{a \times b}$ (ग) 9
- (क) 16 (ख) 5 (ग) 49
- (क) 12, 24, 48, 96 (ख) 15, 45, 135 (ग) $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}$
- (क) 6 (ख) 2 (ग) 124
- (क) 126 (ख) $\frac{121}{9}$ (ग) $\frac{21}{4}$
(घ) $31\frac{15}{16}$ (ङ) $1\frac{364}{729}$
- (क) 3 (ख) 3 (ग) 2
- (क) 2046 (ख) 1093
- (क) 6 (ख) 10
- रु. 29,040

वर्ग समीकरण (Quadratic Equation)

7.0 पुनरवलोकन (Review)

एउटा विद्यालयको आयतकार अफिस कोठामा कार्पेट बिछ्याउँदा 80 m^2 कार्पेट लाग्यो । यसका आधारमा जोडी जोडीमा छलफल गरी तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) उक्त अफिस कोठाको लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला ?

(ख) यदि उक्त कोठाको लम्बाइ चौडाइभन्दा 2 मिटरले बढी भए उक्त कोठाको लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला ?

यहाँ कोठाको चौडाइ (b) = x मान्दा कोठाको लम्बाइ (l) = चौडाइ + 2 = $x + 2$

कोठाको क्षेत्रफल = 80 m^2

$$(x + 2)x = 80$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 2x - 80 = 0$$

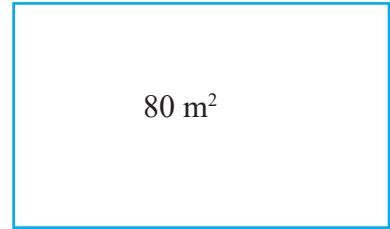
$$\text{अथवा, } x^2 + 10x - 8x + 80 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x + 10) - 8(x + 10) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x + 10)(x - 8) = 0$$

या त, $x + 10 = 0 \quad \therefore x = -10$ असम्भव छ ।

अथवा, $x - 8 = 0 \quad \therefore x = 8$



डिग्री 2 भएको एक चलयुक्त समीकरण वर्ग समीकरण हो । यो $ax^2 + bx + c = 0$ स्वरूपको हुन्छ । जहाँ $a \neq 0$ हुन्छ । यसमा चल राशिका दुईओटा मान हुन्छन् ।

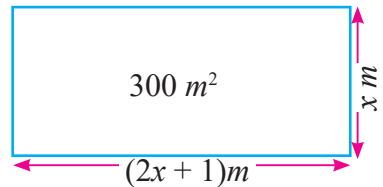
7.1 वर्ग समीकरणको हल (Solving Quadratic Equation)

(क) खण्डीकरण विधिबाट

क्रियाकलाप 1

एउटा आयतकार खेलमैदानको क्षेत्रफल 300 m^2 छ । उक्त खेलमैदानको लम्बाइ चौडाइको दोब्बरभन्दा 1 m ले बढी छ भने उक्त खेलमैदानको लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

यहाँ खेलमैदानको क्षेत्रफल = 300 m^2



यदि खेलमैदानको चौडाइ = x भए

खेलमैदानको लम्बाइ = $2x + 1$ हुन्छ ।

अब आयतकार खेलमैदानको क्षेत्रफल = लम्बाइ \times चौडाइ

$$300 = (2x + 1)x$$

अथवा, $2x^2 + x - 300 = 0$

[\therefore यो वर्ग समीकरण हो ।]

माथिको वर्ग समीकरणबाट x को मान निकाल्न,

$$2x^2 + (25 - 24)x - 300 = 0$$

अथवा, $2x^2 + 25x - 24x - 300 = 0$

अथवा, $x(2x + 25) - 12(2x + 25) = 0$

अथवा, $(2x + 25)(x - 12) = 0$

दुई गुणनखण्डको गुणनफल 0 हुन्छ भने यी दुईमध्ये एउटा शून्य हुनै पर्छ ।

या त, $(2x + 25) = 0$ अथवा, $(x - 12) = 0$ हुन्छ ।

यदि $2x + 25 = 0$ भए

$$2x = -25$$

$$x = -\frac{25}{2} \text{ असम्भव छ ।}$$

$$x - 12 = 0 \text{ भए}$$

अथवा, $x = 12 \quad \therefore x = 12$

खेलमैदानको चौडाइ (x) = 12 m भए लम्बाइ = $2x + 1 = 2 \times 12 + 1 = 25 m$

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् र मिले नमिलेको जाँचनुहोस् :

(क) $x^2 + 4x = 0$

(ख) $x^2 + 6x + 8 = 0$

(ग) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(घ) $x^2 - x - 6 = 0$

(ङ) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

समाधान

(क) $x^2 + 4x = 0$

अथवा, $x(x + 4) = 0$

या त, $x = 0$

अथवा, $x + 4 = 0$ भए,

$x = -4$

अतः $x = 0, -4$ हुन्छ ।

जाँचेर हेर्दा,

$x^2 + 4x = 0$ मा $x = 0$ राख्दा,

LHS = $0 + 4 \times 0 = 0 =$ RHS

$x = -4$ राख्दा

LHS = $(-4)^2 - 4 \times (-4) = 16 - 16 = 0 =$ RHS

(ख) $x^2 + 6x + 8 = 0$

अथवा, $x^2 + (4 + 2)x + 8 = 0$

अथवा, $x^2 + 4x + 2x + 8 = 0$

अथवा, $x(x + 4) + 2(x + 4) = 0$

अथवा, $(x + 4)(x + 2) = 0$

या त, $x + 4 = 0 \quad \therefore x = -4$

अथवा, $(x + 2) = 0 \quad \therefore x = -2$

जाँचेर हेर्दा,

$x^2 + 6x + 8 = 0$ मा $x = -2$ राख्दा,

LHS = $(-2)^2 + 6 \times (-2) + 8$

$4 - 12 + 8 = 0 = \text{RHS}$

$x^2 + 6x + 8 = 0$ मा $x = -4$ राख्दा,

LHS = $(-4)^2 + 6 \times (-4) + 8$

$= 16 - 24 + 8 = 0 = \text{RHS}$

(ग) $x^2 - 5x + 6 = 0$

अथवा, $x^2 - (3 + 2)x + 6 = 0$

अथवा, $x^2 - (3 + 2)x + 6 = 0$

अथवा, $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

अथवा, $x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

अथवा, $(x - 3)(x - 2) = 0$

या त, $(x - 3) = 0 \therefore x = 3$

अथवा, $x - 2 = 0 \quad \therefore x = 2$

\therefore वर्ग समीकरणका मूल 2 र 3 हुन् ।

जाँचेर हेर्दा,

$x = 2$ राखेर हेर्दा,

$x^2 - 5x + 6 = (2)^2 - 5 \times 2 + 6$

$= 4 - 10 + 6 = 0$

LHS = RHS

फेरि $x = 3$ राख्दा,

$(3)^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

LHS = RHS

(घ) $x^2 - x - 6 = 0$

अथवा, $x^2 - (3 - 2)x - 6 = 0$

अथवा, $x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$

अथवा, $x(x - 3) + 2(x - 3) = 0$

अथवा, $(x - 3)(x + 2) = 0$

या त, $(x - 3) = 0 \therefore x = 3$

अथवा, $x + 2 = 0 \quad \therefore x = -2$

\therefore वर्ग समीकरणका मूल 3 र -2 हुन् ।

जाँचेर हेर्दा,

$x = 3$ राख्दा,

LHS = $(3)^2 - 3 - 6$

$= 9 - 9 = 0 = \text{RHS}$

$x = -2$ राख्दा,

LHS = $(-2)^2 - 2 - 6$

$= 4 + 2 - 6 = 0 = \text{RHS}$

$$(ड) 2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$\text{अथवा, } 2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$\text{अथवा, } 2x^2 + (4 + 3)x + 6 = 0$$

$$\text{अथवा, } 2x^2 + 4x + 3x + 6 = 0$$

$$\text{अथवा, } 2x(x + 2) + 3(x + 2) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x + 2)(2x + 3) = 0$$

$$\text{या त, } (x + 2) = 0. \quad \therefore x = -2$$

$$\text{अथवा, } 2x + 3 = 0. \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$$

\therefore वर्ग समीकरण $2x^2 + 7x + 6 = 0$ का मूलहरू -2 र $-\frac{3}{2}$ हुन्।

जाँचेर हेर्दा,

$$x = -2 \text{ राखेर हेर्दा,}$$

$$\text{LHS} = 2(-2)^2 + 7 \times (-2) + 6$$

$$= 8 - 14 + 6 = 0 = \text{RHS}$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ राख्दा,}$$

$$\text{LHS} = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 7 \times -\frac{3}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + 6 = \frac{21 - 21}{2}$$

$$= 0 = \text{RHS}$$

(ख) वर्ग पूरा गरेर वर्ग समीकरणको हल (Solving quadratic equation by completing square)

क्रियाकलाप 2

दिइएका वर्ग समीकरणको हल गर्नुहोस् :

$$(क) x^2 - 9 = 0$$

$$(ख) x^2 - 5x + 6 = 0$$

समाधान

$$(क) x^2 - 9 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 3^2 = 0$$

$$\text{अथवा, } (x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\text{या त, } x + 3 = 0 \therefore x = -3$$

$$\text{अथवा, } x - 3 = 0 \quad \therefore x = 3$$

$$\therefore x = \pm 3$$

यसलाई यसरी पनि गर्न सकिन्छ,

$$x^2 - 9 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 9$$

$$\text{अथवा, } x^2 = (\pm 3)^2 \quad [\because \text{यहाँ } x^2 \text{ र } 9 \text{ दुवै वर्ग हुन्।}]$$

$$\text{अथवा, } x = \pm 3$$

$x^2 = a^2$ स्वरूपका वर्ग समीकरणको हल $x = \pm a$ हुने रहेछ।

$$(ख) \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 5x = -6$$

$$\text{अथवा, } x^2 - \left(2 \frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 \quad [:: (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$$

$$\text{अथवा, } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25 - 24}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{अथवा, } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{अथवा, } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

धनात्मक चिह्न लिँदा,

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{अथवा, } x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

ऋणात्मक चिह्न लिँदा,

$$x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

तसर्थ x का मान 2 र 3 रहेछन् ।

उदाहरण 2

वर्ग पूरा गरेर हल गर्नुहोस् :

$$(क) \quad x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(ख) \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(ग) \quad 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

समाधान

$$(क) \quad x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 2 \times x \times 5 + (5)^2 - (5)^2 + 16 = 0 \quad [:: (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 2 \times x \times 5 + (5)^2 - 25 + 16 = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 5)^2 - 9 = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 5)^2 = 9$$

$$\text{अथवा, } (x - 5)^2 = (\pm 3)^2$$

$$\text{अथवा, } x - 5 = \pm 3$$

अब धनात्मक चिह्न लिँदा,

$$x - 5 = 3 \quad \text{अथवा, } x = 3 + 5 = 8$$

ऋणात्मक चिह्न लिँदा,

$$x - 5 = -3 \quad \text{अथवा, } x = 5 - 3 = 2$$

$$\therefore x = 8, 2$$

(ख) $x^2 - 7x + 12 = 0$

अथवा, $x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 0$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + 12 - \frac{49}{4} = 0$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{48 - 49}{4} = 0$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right) = 0$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}$

अब धनात्मक चिह्न लिँदा,

$x - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$ अथवा, $x = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

ऋणात्मक चिह्न लिँदा,

$x - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$ अथवा, $x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$\therefore x = 4, 3$

(ग) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

अथवा, $2x^2 - 7x + 6 = 0$

अथवा, $2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + 3\right) = 0$

अथवा, $x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = 0$

अथवा, $x^2 - 2 \times x \times \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 3 = 0$

अथवा, $x^2 - 2 \times x \times \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 3 - \left(\frac{49}{16}\right) = 0$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

अथवा, $\left(x - \frac{7}{4}\right) = \pm \frac{1}{4}$

अब धनात्मक चिह्न लिँदा,

$x - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$ अथवा, $x = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$

ऋणात्मक चिह्न लिँदा, $x - \frac{7}{4} = -\frac{1}{4}$

अथवा, $x = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\therefore x = 2, \frac{3}{2}$

(ग) सूत्र प्रयोग गरेर वर्ग समीकरणको हल
(Solving Quadratic Equation by Using Formula)

क्रियाकलाप 3

वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ मा x को मान कसरी पत्ता लगाउने होला ?

$$\text{यहाँ, } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{or, } ax^2 + bx = -c$$

$$\text{or, } \frac{ax^2 + bx}{a} = -\frac{c}{a} \quad [\text{किनकि दुवैतिर } a \text{ ले भाग गर्दा}]$$

$$\text{or, } x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$\text{or, } x^2 + 2 \times x\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} \quad [\text{वर्ग पूरा गर्दा}]$$

$$\text{or, } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\text{or, } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\text{or, } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\text{or, } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$$\text{or, } x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$$

$$\text{or, } x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{or, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

तसर्थ x का मूलहरू $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ र $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ रहेछन् ।

उदाहरण 3

सूत्र प्रयोग गरी दिइएका वर्ग समीकरणको हल गर्नुहोस् :

$$(क) x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (ख) x\left(x - \frac{2}{7}\right) = \frac{3}{49}$$

समाधान

(क) यहाँ $x^2 - 5x + 6 = 0$ लाई $ax^2 + bx + c = 0$ सँग तुलना गर्दा,

$$a = 1, b = -5, c = 6$$

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{अब धनात्मक चिह्न लिँदा, } x = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{ऋणात्मक चिह्न लिँदा, } x = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

तसर्थ x का मूल 3 र 2 रहेछन् ।

$$(ख) x\left(x - \frac{2}{7}\right) = \frac{3}{49}$$

$$\text{यहाँ } x\left(x - \frac{2}{7}\right) = \frac{3}{49}$$

$$\text{or, } x^2 - \frac{2}{7}x - \frac{3}{49} = 0$$

$$\text{or, } 49x^2 - 14x - 3 = 0$$

यो समीकरणलाई $ax^2 + bx + c = 0$ सँग तुलना गर्दा,

$$a = 49, b = -14, c = -3$$

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \times 49 \times (-3)}}{2 \times 49} \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{196 + 588}}{98} \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{784}}{98} \\ &= \frac{14 \pm 28}{98} \end{aligned}$$

$$\text{अब धनात्मक चिह्न लिँदा, } x = \frac{14+28}{98} = \frac{42}{98} = \frac{3}{7}$$

$$\text{ऋणात्मक चिह्न लिँदा, } x = \frac{14-28}{98} = \frac{-14}{98} = -\frac{1}{7}$$

तसर्थ x का मूल $\frac{3}{7}$ र $-\frac{1}{7}$ रहेछन् ।

अभ्यास 7.1

1. दिइएका मध्ये कुन कुन वर्ग समीकरण हुन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् :

(क) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$

(ख) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(ग) $x(2x + 3) = x^2 + 1$

(घ) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

(ङ) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(च) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

2. खण्डीकरण विधिबाट हल गर्नुहोस् :

(क) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(ख) $2x^2 + x - 6 = 0$

(ग) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(घ) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

(ङ) $x^2 - 45x + 324 = 0$

(च) $x^2 - 27x + 182 = 0$

3. वर्ग पूरा गरेर हल गर्नुहोस् :

(क) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(ख) $9x^2 - 15x + 6 = 0$

(ग) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

(घ) $5x^2 - 6x - 2 = 0$

(ङ) $x^2 + \frac{15}{16} = 2x$

(च) $x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{35}{9}$

4. सूत्र प्रयोग गरेर हल गर्नुहोस् :

(क) $x^2 - 9x + 20 = 0$

(ख) $x^2 + 2x - 143 = 0$

(ग) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(घ) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

(ङ) $x + \frac{1}{x} = 3$

(च) $\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-2)} = 3,$

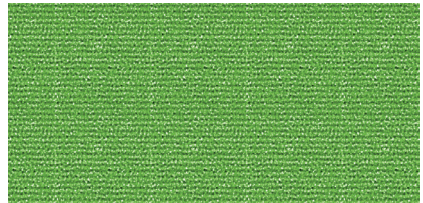
(छ) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}$

5. कक्षा 10 को पहिलो त्रैमासिक परीक्षामा रामनरेश महतोले दुई विषय गणित र अङ्ग्रेजीमा गरी जम्मा 30 अङ्क मात्र ल्याएछन् । यदि उनले गणितमा 2 अङ्क बढी र अङ्ग्रेजीमा 3 अङ्क कम ल्याएको भए ती दुई विषयमा ल्याएको अङ्कको गुणनफल 210 हुने थियो भने उनले गणित र अङ्ग्रेजीमा कति कति अङ्क ल्याएछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. यहाँ एउटा आयताकार खेलमैदान चित्रमा देखाइएको छ ।

यसको लामो भुजा छोटो भुजाभन्दा 30 मिटर बढी छ तर

यसको विकर्ण छोटो भुजाभन्दा 60 मिटर बढी छ :



(क) आयताकार खेलमैदानको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) उक्त खेलमैदानमा $12\text{ m} \times 3\text{ m}$ मानव निर्मित घाँसको टर्फ बिछ्याउँदा जम्मा कतिओटा टर्फको आवश्यक पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त जग्गाको वरिपरि 4 फन्को काँडेतार लगाउन प्रतिमिटर रु. 15 का दरले कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

खुला प्रश्न

१. $(x - 2)$, $(x + 3)$ र $(x + 1)$ आयामहरू भएको एउटा षड्मुखाको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् । x को कुनै मान दिएर सो षड्मुखाको वास्तविक आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
२. एउटा आयतको लम्बाइ र चौडाइ $(x + 5)$ र $(x - 3)$ छ । कुन अवस्थामा सो आयतको क्षेत्रफल शून्य हुन्छ ? चित्रसहित आफ्नो जवाफ तर्कपूर्ण रूपमा दिनुहोस् ।
३. $x^2 + 4x + 4 = 0$ मान्य हुन x को मान कति हुनुपर्छ ? क्षेत्रफल शून्य हुन के कुराले निर्धारण गर्ने रहेछ ? तपाईंको तर्क प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
४. तपाईं र तपाईंको आमाको उमेर कति कति वर्ष छ ? तपाईंको उमेरको दुईगुणा तपाईंको साथीको हजुरआमाको उमेरको आधा छ भने तपाईंको आमा र साथीको हजुरआमाको उमेरको अन्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) हो (ख) हैन (ग) हो (घ) हो (ङ) हैन (च) हैन
2. (क) $5, -2$ (ख) $-2, \frac{3}{2}$ (ग) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (घ) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ (ङ) $9, 36$ (च) $13, 14$
3. (क) $3, 3$ (ख) $1, \frac{2}{3}$ (ग) $1, \frac{3}{2}$ (घ) $\frac{3 + \sqrt{19}}{5}, \frac{3 - \sqrt{19}}{5}$
(ङ) $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}$ (च) $\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}$
4. (क) $4, 5$ (ख) $11, -13$ (ग) $1, \frac{2}{3}$ (घ) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$
(ङ) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (च) $\frac{4 + \sqrt{10}}{3}, \frac{4 - \sqrt{10}}{3}$ (छ) $1, 2$
5. (क) $12, 18$ वा $13, 17$
6. (क) $120 m, 90 m$ (ख) 300 ओटा (ग) रु. $25,200$

7.2 वर्ग समीकरणसम्बन्धी शाब्दिक समस्या (Word problems related to quadratic equation)

क्रियाकलाप 4

अहिले सुमित्राको उमेर 12 वर्ष र सुमित्राकी दिदीको उमेर 18 वर्ष छ । कति वर्षपछि उनीहरूको उमेरको गुणनफल 280 हुन्छ होला ? कसरी पत्ता लगाउने होला ?

| समय | सुमित्राको उमेर | सुमित्राकी दिदीको उमेर | दुवैको उमेरको गुणनफल |
|-----------|-----------------|------------------------|----------------------|
| अहिले | 12 | 18 | 216 |
| 1 वर्षपछि | 13 | 19 | 247 |
| 2 वर्षपछि | 14 | 20 | 280 |

यसलाई समीकरण बनाएर पनि हल गर्न सकिन्छ, कि ?

यहाँ अहिले सुमित्राको उमेर = 12 वर्ष

सुमित्राकी दिदीको उमेर = 18 वर्ष

x वर्षपछि,

सुमित्राको उमेर = $12 + x$

सुमित्राकी दिदीको उमेर = $18 + x$

दिइएको सर्तअनुसार,

$$(12 + x)(18 + x) = 280$$

$$\text{अथवा, } 216 + 18x + 12x + x^2 = 280$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 30x + 216 - 280 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 30x - 64 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 32x - 2x - 64 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x + 32) - 2(x + 32) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x + 32)(x - 2) = 0$$

$$\text{या त } x + 32 = 0 \quad \therefore x = -32$$

$$\text{अथवा, } x - 2 = 0 \quad \therefore x = 2$$

यहाँ $x = -32$ उपयुक्त समाधान होइन किनभने वर्ष ऋणात्मक हुँदैन ।

त्यसैले $x = 2$

अतः 2 वर्षपछि उनीहरूको उमेरको गुणनफल 280 हुन्छ ।

उदाहरण 4

यदि दुईओटा धनात्मक सङ्ख्याको योगफल 18 र गुणनफल 77 भए ती सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

मानौं ती धनात्मक सङ्ख्या x र y हुन् ।

प्रश्नानुसार,

$$x + y = 18 \dots\dots\dots (i)$$

$$x \times y = 77 \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) बाट $y = 18 - x \dots\dots\dots (iii)$

y को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$$x(18 - x) = 77$$

$$\text{अथवा, } 18x - x^2 = 77$$

$$\text{अथवा, } 18x - x^2 - 77 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 18x + 77 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 11x - 7x + 77 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x - 11) - 7(x - 11) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 11)(x - 7) = 0$$

$$\text{या त, } (x - 11) = 0 \quad \therefore x = 11$$

$$\text{अथवा, } (x - 7) = 0 \quad \therefore x = 7$$

x को मान समीकरण (iii) मा राख्दा,

$$\text{यदि } x = 11 \text{ भए } y = 18 - x = 18 - 11 = 7$$

$$\text{यदि } x = 7 \text{ भए } y = 18 - x = 18 - 7 = 11$$

त्यसैले आवश्यक सङ्ख्या 7 र 11 तथा 11 र 7 रहेछन् ।

उदाहरण 5

यदि एउटा धनात्मक सङ्ख्याको वर्गबाट 11 घटाउँदा 38 बाँकी रहन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

मानौं त्यो धनात्मक x हो, त्यसैले त्यसको वर्ग सङ्ख्या x^2 हुन्छ ।

$$\text{प्रश्नानुसार, } x^2 - 11 = 38$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 11 = 38$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 38 + 11$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 49$$

$$\text{अथवा, } x^2 = (7)^2$$

$$\therefore x = (\pm 7)^2$$

तर हामीलाई धनात्मक सङ्ख्या चाहिएकाले x को मान 7 मात्र हुन्छ ।

तसर्थ उक्त धनात्मक सङ्ख्या 7 रहेछ ।

उदाहरण 6

कुनै दुईओटा धनात्मक क्रमागत जोर सङ्ख्याको गुणनफल 24 हुन्छ भने ती सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

मानौं दुईओटा क्रमागत जोर सङ्ख्या x र $x+2$ हुन् ।

प्रश्नानुसार,

$$x \times (x + 2) = 24$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 6x - 4x - 24 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x + 6) - 4(x + 6) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x + 6)(x - 4) = 0$$

$$\text{या त, } (x + 6) = 0 \quad \therefore x = -6 \quad [\because \text{यो ऋणात्मक सङ्ख्या हो ।}]$$

$$\text{अथवा, } x - 4 = 0 \quad \therefore x = 4$$

तसर्थ आवश्यक धनात्मक सङ्ख्या 4 र $4 + 2 = 6$ रहेछन् ।

उदाहरण 7

यदि कुनै सङ्ख्या र त्यसको व्युत्क्रमको योगफल $\frac{26}{5}$ भए सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

मानौं, त्यो सङ्ख्या x र त्यसको व्युत्क्रमको सङ्ख्या $\frac{1}{x}$ हो ।

प्रश्नानुसार,

$$x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$$

$$\text{अथवा, } \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{26}{5}$$

$$\text{अथवा, } 5x^2 + 5 = 26x$$

$$\text{अथवा, } 5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$\text{अथवा, } 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$$

$$\text{अथवा, } 5x(x-5) - 1(x-5) = 0$$

$$\text{अथवा, } (5x-1)(x-5) = 0$$

$$\text{या त, } (5x-1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{5}$$

$$\text{अथवा, } x-5 = 0 \quad \therefore x = 5$$

तसर्थ आवश्यक सङ्ख्या 5 र $\frac{1}{5}$ रहेछन् ।

उदाहरण 8

दुई जना दाजु र भाइको हालको उमेरको योगफल 34 वर्ष र उनीहरूको उमेरको गुणनफल 288 छ भने तिनीहरूको हालको उमेर कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

मानौं दाजुको उमेर र भाइको उमेर क्रमशः x र y वर्ष छन् ।

प्रश्नानुसार,

$$x + y = 34 \dots\dots\dots (i)$$

$$x \times y = 288 \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) बाट $y = 34 - x \dots\dots\dots (iii)$

y को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$$x(34 - x) = 288$$

$$\text{अथवा, } 34x - x^2 = 288$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 34x + 288 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 16x - 18x + 288 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x - 16) - 18(x - 16) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 16)(x - 18) = 0$$

$$\text{या त, } x - 16 = 0 \quad \therefore x = 16$$

$$\text{अथवा, } x - 18 = 0 \quad \therefore x = 18$$

x को मान समीकरण (iii) मा राख्दा,

यदि $x = 16$ भए $y = 34 - x = 34 - 16 = 18$ [\therefore दाजुको उमेर भाइको भन्दा बढी हुनुपर्छ ।]

यदि $x = 18$ भए $y = 34 - x = 34 - 18 = 16$

त्यसैले दाजुको उमेर 18 वर्ष र भाइको उमेर 16 वर्ष रहेछ ।

उदाहरण 9

दुई अङ्कले बनेको एउटा सङ्ख्यामा अङ्कहरूको गुणनफल 18 छ । यदि सो सङ्ख्यामा 27 जोडियो भने अङ्कहरूको स्थान बदलिन्छ । उक्त सङ्ख्या कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

मानौं दुई अङ्कले बनेका सङ्ख्या $= 10x + y$ [\because जहाँ x दशको स्थान र y एकको स्थानमा भएका अङ्क हुन् ।]
प्रश्नानुसार,

$$x \cdot y = 18$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{18}{y} \dots\dots\dots (i)$$

फेरि दोस्रो सर्त, $(10x + y) + 27 = 10y + x$

$$\text{अथवा, } 10x + y + 27 - 10y - x = 0$$

$$\text{अथवा, } 9x - 9y + 27 = 0$$

$$\text{अथवा, } 9(x - y + 3) = 0$$

$$\text{अथवा, } x - y + 3 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) बाट x को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$$\frac{18}{y} - y + 3 = 0$$

$$\text{अथवा, } \frac{18 - y^2 + 3y}{y} = 0$$

$$\text{अथवा, } y^2 - 3y - 18 = 0$$

$$\text{अथवा, } y^2 - 6y + 3y - 18 = 0$$

$$\text{अथवा, } y(y - 6) + 3(y - 6) = 0$$

$$\text{अथवा, } (y - 6)(y + 3) = 0$$

$$\text{या त, } y - 6 = 0 \therefore y = 6$$

$$\text{अथवा, } y + 3 = 0 \therefore y = -3$$

y को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$$\text{यदि } y = 6 \text{ हुँदा } x = \frac{18}{6} = 3$$

$$\text{यदि } y = -3 \text{ हुँदा } x = \frac{18}{-3} = -6$$

अतः $y = 6$ र $x = 3$ हुँदा, उक्त सङ्ख्या $= 10x + y = 10 \times 3 + 6 = 36$

$y = -3$ र $x = -6$ हुँदा, उक्त सङ्ख्या $= 10x + y = 10 \times (-6) - 3 = -63$

उदाहरण 10

बुबा र छोराको हालको उमेर क्रमशः 42 वर्ष र 16 वर्ष छ । कति वर्ष अगि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 272 थियो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं x वर्षअगि बुबाको उमेर र छोराको उमेर क्रमशः $42 - x$ र $16 - x$ वर्ष थियो ।

प्रश्नानुसार,

$$x \text{ वर्ष अगिको उमेरको गुणनफल} = 272$$

$$\text{अथवा, } (42 - x)(16 - x) = 272$$

$$\text{अथवा, } 672 - 42x - 16x + x^2 = 272$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 58x + 400 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 50x - 8x + 400 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x - 50) - 8(x - 50) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 8)(x - 50) = 0$$

$$\text{या त, } x - 8 = 0 \quad \therefore x = 8$$

$$\text{अथवा, } x - 50 = 0 \quad \therefore x = 50$$

यहाँ x को मान 50 वर्ष उमेरका हिसाबले असम्भव छ, त्यसैले $x = 8$ हुन्छ ।

तसर्थ 8 वर्षअगि बुबाको उमेर र छोराको उमेरको गुणनफल 272 थियो ।

उदाहरण 11

एउटा समकोणी त्रिभुजको कर्ण 13 मिटर छ । यदि बाँकी दुई भुजाको नापको फरक 7 मिटर भए बाँकी भुजाहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

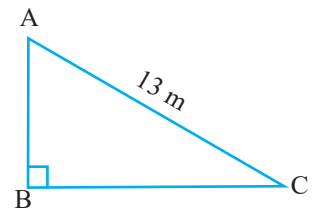
समाधान

यहाँ चित्रमा ABC एउटा समकोण त्रिभुज हो, जहाँ $\angle B = 90^\circ$

र कर्णको नाप $(h) = AC = 13$ मिटर छ ।

मानौं आधारको नाप $(b) = BC = x$ र लम्बको नाप $(p) = AB = y$

प्रश्नानुसार, $x - y = 7$ अथवा, $y = x + 7$(i)



अब समकोण त्रिभुज ABC मा $h^2 = p^2 + b^2$ हुन्छ ।

$$\text{त्यसैले } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\text{अथवा, } 13^2 = (x + 7)^2 + x^2$$

$$\text{अथवा, } 169 = x^2 + 14x + 49 + x^2$$

$$\text{अथवा, } 2x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 12x - 5x - 60 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x + 12) - 5(x + 12) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 5)(x + 12) = 0$$

$$\text{या त, } (x - 5) = 0 \quad \therefore x = 5$$

$$\text{अथवा, } x + 12 = 0 \quad \therefore x = 0$$

यहाँ x भनेको आधारको नाप भएकाले $x = -12$ असम्भव छ, त्यसैले $x = 5$ हुन्छ ।

तसर्थ आधारको नाप (b) = BC = $x = 5$ मिटर

र लम्बको नाप (p) = AB = $y = 5 + 7 = 12$ मिटर

तसर्थ बाँकी भुजाहरूको नाप 5 मिटर र 12 मिटर रहेछ ।

उदाहरण 12

एउटा आयतकार जग्गाको क्षेत्रफल 500 वर्ग मिटर र परिमिति 90 मिटर छ । उक्त जग्गालाई वर्गाकार बनाउने हो भने लम्बाइतर्फ कति प्रतिशतले घटाउनुपर्छ, गणना गर्नुहोस् ।

समाधान

मानौं आयतकार जग्गाको लम्बाइ र चौडाइको नाप क्रमशः x मिटर र y मिटर छ ।

प्रश्नानुसार,

आयतकार जग्गाको क्षेत्रफल = 500 वर्ग मिटर

$$\text{अथवा, } xy = 500 \dots\dots\dots(i)$$

आयतकार जग्गाको परिमिति = 90 मिटर

$$\text{अथवा, } 2(x + y) = 90$$

$$\text{अथवा, } x + y = 45$$

$$\text{अथवा, } y = 45 - x \dots\dots\dots(ii)$$

अब,

समीकरण (ii) बाट $y = 45 - x$ मानलाई समीकरण (i) मा राख्दा,

$$xy = 500$$

$$\text{अथवा, } x(45 - x) = 500$$

$$\text{अथवा, } 45x - x^2 = 500$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 45x + 500 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 25x - 20x + 500 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x - 25) - 20(x - 25) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 25)(x - 20) = 0$$

या त, $(x - 25) = 0$. $\therefore x = 25$

$$\text{अथवा, } x - 20 = 0 \quad \therefore x = 20$$

यदि $x = 25$ भए $y = 45 - x = 45 - 25 = 20$

यदि $x = 20$ भए, $y = 45 - x = 45 - 20 = 25$

तसर्थ उक्त जग्गाको लम्बाइ 25 मिटर र चौडाइ 20 मिटर रहेछ ।

उक्त जग्गालाई वर्गाकार बनाउने हो भने लम्बाइ र चौडाइ बराबर हुनु जरुरी छ ।

त्यसैले लम्बाइतर्फ $25 - 20 = 5$ m घटाउनुपर्छ ।

यसलाई प्रतिशतमा देखाउँदा $= \frac{5}{25} \times 100\% = 20\%$ हुन्छ ।

उदाहरण 13

कक्षा 10 मा अध्ययनरत केही विद्यार्थीले जम्मा रु. 42,000 को बजेट रहने गरी वनभोजको आयोजना गरे । त्यसका लागि उनीहरूले बराबर रकम उठाउने पति निर्णय गरे । तर वनभोजका दिन सोचेभन्दा 5 जना कम विद्यार्थीको सहभागिता रह्यो, जसले गर्दा प्रत्येकले रु. 700 बढी उठाउनु पर्ने भएछ । त्यसका आधारमा तलका समस्या समाधान गर्नुहोस् :

(क) वनभोजमा जम्मा कति विद्यार्थीको सहभागिता रह्यो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एक जनाको भागमा कति रकम परेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं विद्यार्थीको सङ्ख्या $= x$ र प्रत्येकले तिर्नुपर्ने रकम $=$ रु. $\frac{42000}{x}$

यहाँ 5 जना विद्यार्थीले वनभोजमा सहभागिता जनाएनन् ।

त्यसैले सहभागी विद्यार्थीको सङ्ख्या $= x - 5$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{42000}{x-5} = \frac{42000}{x} + 700$$

अथवा, $\frac{42000}{x-5} - \frac{42000}{x} = 700$

अथवा, $\frac{60}{x-5} - \frac{60}{x} = 1$

अथवा, $\frac{60x - 60(x-5)}{x(x-5)} = 1$

अथवा, $60x - 60x + 300 = x(x-5)$

अथवा, $x^2 - 5x - 300 = 0$

अथवा, $x^2 - 20x + 15x - 300 = 0$

अथवा, $x(x-20) + 15(x-20) = 0$

अथवा, $(x-20)(x+15) = 0$

या त, $x-20 = 0 \quad \therefore x = 20$

अथवा, $x+15 = 0 \quad \therefore x = -15$

यहाँ x भनेको विद्यार्थीको सङ्ख्या भएकाले $x = -15$ असम्भव छ, । त्यसैले $x = 20$ हुन्छ ।

तसर्थ

(क) वनभोजमा सहभागिता जनाएका जम्मा विद्यार्थीको सङ्ख्या = $20 - 5 = 15$ जना रहेछ ।

(ख) एक जनाको भागमा परेको जम्मा रकम = $\frac{42000}{x-5} = \frac{42000}{15} = \text{रु. } 2800$ रहेछ ।

अभ्यास 7.2

1. एउटा प्राकृतिक सङ्ख्याको वर्गमा 11 जोड्दा 36 हुन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. कुनै सङ्ख्याको वर्गबाट 11 घटाउँदा 25 बाँकी रहन्छ भने उक्त सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. यदि एउटा धनात्मक सङ्ख्याको वर्गको दोब्बरबाट 7 घटाउँदा 91 बाँकी रहन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. एउटा प्राकृतिक सङ्ख्याको वर्गबाट 2 घटाउँदा 7 बाँकी रहन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. कुनै सङ्ख्याको वर्गबाट 11 घटाउँदा 89 बाँकी रहन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. यदि कुनै सङ्ख्याको वर्गको दोब्बरबाट 17 घटाउँदा 55 बाँकी रहन्छ भने सो सङ्ख्या कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. यदि एउटा धनात्मक सङ्ख्याको वर्गको दोब्बरबाट 3 घटाउँदा 285 बाँकी रहन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. यदि एउटा धनात्मक सङ्ख्या र त्यसको वर्गको योगफल 72 हुन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. कुनै दुईओटा क्रमागत जोर सङ्ख्याको गुणनफल 80 हुन्छ भने ती सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. कुनै दुईओटा क्रमागत विजोर सङ्ख्याको वर्गको गुणनफल 225 हुन्छ भने ती सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
11. यदि कुनै सङ्ख्या र त्यसको व्युत्क्रमको योगफल $\frac{10}{3}$ भए सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
12. यदि कुनै दुईओटा प्राकृतिक सङ्ख्याको योगफल 21 र उक्त सङ्ख्याको वर्गको योगफल 261 भए ती सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
13. यदि दुई जना दाजुभाइको उमेरबिचको फरक 4 वर्ष र गुणनफल 221 भए दाजु र भाइको उमेर कति कति हो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
14. दुई जना दाजु र भाइको हालको उमेरको योगफल 22 वर्ष र उनीहरूको उमेरको गुणनफल 120 छ भने तिनीहरूको हालको उमेर कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
15. दुई जना दिदी र बहिनीको हालको उमेरको अन्तर 3 वर्ष र उनीहरूको उमेरको गुणनफल 180 छ भने तिनीहरूको हालको उमेर कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
16. (क) बाबु र छोरोको हालको उमेर क्रमशः 40 वर्ष र 13 वर्ष छ । कति वर्षअगि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 198 थियो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) आमा छोरीको हालको उमेर क्रमशः 34 वर्ष र 4 वर्ष छ । कति वर्षपछि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 400 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) अहिले बाबु र छोरोको उमेर क्रमशः 35 वर्ष र 1 वर्ष छ । कति वर्षपछि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 240 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) एक जोडी श्रीमान् र श्रीमतीको हालको उमेर क्रमशः 35 वर्ष र 27 वर्ष छ । कति वर्षअगि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 425 थियो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
17. (क) एउटा समकोणी त्रिभुजको कर्ण 25 मिटर छ । यदि बाँकी दुई भुजाको नापको फरक 17 मिटर भए बाँकी भुजाहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) एउटा समकोणी त्रिभुजको कर्ण छोटो भुजाको दोब्बरभन्दा पनि 6 मिटरले बढी छ । यदि बाँकी रहेको भुजा कर्णभन्दा 2 मिटरले कम छ भने भुजाहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) एउटा आयतकार जग्गाको क्षेत्रफल 150 वर्ग मिटर र परिमिति 50 मिटर छ । उक्त जग्गाको लम्बाइ र चौडाइ कति हुन्छ, गणना गर्नुहोस् ।
 (घ) एउटा आयतकार जग्गाको क्षेत्रफल 54 वर्ग मिटर र परिमिति 30 मिटर छ । उक्त जग्गाको लम्बाइ र चौडाइ कति हुन्छ, गणना गर्नुहोस् ।

(ड) एउटा आयतको विकर्ण त्यसको चौडाइभन्दा 16 मिटरले बढी छ, र त्यसको लम्बाइ 24 मिटर छ। उक्त आयतको क्षेत्रफल कति हुन्छ, गणना गर्नुहोस्।

(च) एउटा आयतकार जग्गाको क्षेत्रफल 2000 वर्ग मिटर र परिमिति 180 मिटर छ। उक्त जग्गालाई वर्गाकार बनाउन लम्बाइ अथवा चौडाइलाई कति प्रतिशतले घटाउनुपर्छ, र किन, गणना गर्नुहोस्।

18. दुई अड्कले बनेको एउटा सङ्ख्या त्यसका अड्कहरूको योगफलको चार गुणा र अड्कहरूको गुणनफलको तीनगुणा छ भने उक्त सङ्ख्या कति होला, पत्ता लगाउनुहोस्।

19. एउटा संस्थाले कक्षा एकमा भर्ना भएका विद्यार्थीलाई बराबर हुने गरी 180 ओटा सिसाकलम वितरण गर्ने योजना बनाएछन्। उक्त दिन 5 जना विद्यार्थी अनुपस्थित हुँदा पनि सबै सिसाकलम बाँड्दा प्रत्येकले 3 ओटाका दरले बढी सिसाकलम प्राप्त गरेछन् भने,

(क) कति जना विद्यार्थी भर्ना भएका रहेछन् ?

(ख) प्रत्येक विद्यार्थीका भागमा उक्त दिन कति कतिओटा सिसाकलम परेछन् ?

परियोजना कार्य

आफ्नो विद्यालयको चउरमा भलिबल खेल्ने ठाउँको नक्साङ्कन गर्नका लागि पाँच पाँच जनाको तीनओटा समूह निर्माण गर्नुहोस्। पहिलो समूहले जम्मा क्षेत्रफल 128 वर्ग मिटर र परिमिति 48 मिटर हुने गरी कोर्टको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस्। दोस्रो समूहले जम्मा क्षेत्रफल 162 वर्ग मिटर र परिमिति 54 मिटर हुने गरी कोर्टको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस्। तेस्रो समूहले जम्मा क्षेत्रफल 200 वर्ग मिटर र परिमिति 60 मिटर हुने गरी कोर्टको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् र प्राप्त नतिजाका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस्। कुन समूहले बनाएको भलिबल कोर्ट खेल्नका लागि नापका आधारमा उपयुक्त हुन्छ, निष्कर्ष निकाली कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

उत्तर

1. 5 2. ± 6 3. 7 4. 3 5. ± 10 6. ± 6
7. 12 8. 8 9. 8 र 10 वा -10 र -8
10. 3 र 5 वा -5 र -3 11. 3 र $1/3$ 12. 6 र 15
13. 17 वर्ष र 13 वर्ष 14. 12 वर्ष र 10 वर्ष 15. 15 वर्ष र 12 वर्ष
16. (क) 7 वर्ष (ख) 6 वर्ष (ग) 5 वर्ष (घ) 10 वर्ष
17. (क) 24 m र 7m (ख) 10m, 24m, 26m (ग) 15 m र 10 m
(घ) 9 m र 6 m (ड) 240 m² (च) 20% ले कमी
18. 24 19. (क) 20 जना (ख) 12 ओटा सिसाकलम

बीजीय भिन्न (Algebraic Fraction)

8.0 पुनरवलोकन (Review)

(अ) दिइएका बीजीय भिन्नलाई लघुतम पदमा लैजानुहोस् र मिले नमिलेको साथी साथीबिच जाँच्नुहोस् :

(क) $\frac{xy}{x^2y}$

(ख) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$

(ग) $\frac{a+3}{a^2+5a+6}$

(घ) $\frac{a-2}{a^2-6a+8}$

(ङ) $\frac{a-6}{a^2-8a+12}$

(च) $\frac{a+2}{a^2-4a+12}$

(आ) दिइएका भिन्नको सरल गर्नुहोस् र मिले नमिलेको जाँचन साथीलाई देखाउनुहोस् :

(क) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

(ख) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

(ग) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

(घ) $\frac{a}{b} + \frac{2a}{b}$

(ङ) $\frac{3a}{b} - \frac{ab}{a}$

(च) $\frac{3}{xy} + \frac{2a}{xy^2}$

8.1 बीजीय भिन्नको सरलीकरण (Simplification of Algebraic Fractions)

क्रियाकलाप 1

दिइएका बीजीय भिन्नको सरल गर्नुहोस् । सरल गर्दा अपनाइने प्रक्रियाका बारेमा साथीसँग छलफल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x-y}$

(ख) $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$

(ग) $\frac{1}{a-b} - \frac{b}{a^2-b^2}$

माथि उल्लिखित भिन्नलाई सरल गर्दा भिन्नको हर समान वा असमान के छ त्यो हेरी सरल गर्नुपर्छ । यदि हर समान भएमा अंशहरूको आवश्यक क्रिया मात्र गरेर एउटा हर लेखे पुग्छ भने असमान हर भएमा तिनीहरूको ल.स. पत्ता लगाउनुपर्छ ।

जस्तै:

(क) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x-y}$ यी समान हर भएका भिन्न हुन्, त्यसैले

$$\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x-y} = \frac{x+y}{x-y} \text{ [एउटा मात्र हर राखेर अंशमा जोड क्रिया गरियो ।]}$$

(ख) $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$ मा हर असमान छन् । अब समान हर भएका भिन्न बनाउनका लागि,

$$= \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{y(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$

[∵ एउटा भिन्नको हरले अर्को भिन्नको हर र अंशलाई गुणन गरेको]

$$= \frac{x(x+y) - y(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 + xy - xy + y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

(ग) $\frac{1}{a-b} - \frac{b}{a^2 - b^2}$

$$= \frac{1}{a-b} - \frac{b}{(a-b)(a+b)}$$

मा हर असमान छन् ।

अब समान हर भएका भिन्न बनाउनका लागि,

$$= \frac{1(a+b)}{(a-b)(a+b)} - \frac{b}{(a-b)(a+b)}$$

हर बराबर बनाउन

पहिलो भिन्नको हर = $(a-b)$ $\left| \begin{array}{l} \times (a+b) \\ \times 1 \end{array} \right.$

दोस्रो भिन्नको हर = $(a-b)(a+b)$ $\left| \begin{array}{l} \times (a+b) \\ \times 1 \end{array} \right.$

$$= \frac{a+b-b}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{a}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{a}{a^2 - b^2}$$

यसलाई यसरी पनि गर्न सकिन्छ,

पहिलो भिन्नको हर = $(a-b)$

दोस्रो भिन्नको हर = $(a-b)(a+b)$

ल.स. = $(a-b)(a+b)$

अब यसको सरल गर्दा,

$$= \frac{1}{(a-b)} - \frac{b}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{(a+b)-b}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{a}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{a}{a^2 - b^2}$$

[भिन्नको हरमा ल.स. राखी भिन्नको हरले ल.स. लाई
भाग गरेर सोही भिन्नको अंशलाई गुणन गरेको ।]

उदाहरण 1

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{x^2}{x+y} - \frac{y^2}{x+y}$$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2 - y^2}{x+y} \\ &= \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} \\ &= x - y \end{aligned}$$

उदाहरण 3

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}$$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \\ &= \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} \end{aligned}$$

उदाहरण 5

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{1}{2a-3b} - \frac{a+b}{4a^2-9b^2}$$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2a-3b} - \frac{a+b}{4a^2-9b^2} \\ &= \frac{1}{2a-3b} - \frac{a+b}{(2a-3b)(2a+3b)} \\ &= \frac{(2a+3b)-(a+b)}{(2a-3b)(2a+3b)} \\ &= \frac{(a+2b)}{4a^2-9b^2} \end{aligned}$$

उदाहरण 2

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}$$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \\ &= \frac{(x+y)-(x-y)}{x^2-y^2} \\ &= \frac{x+y-x+y}{x^2-y^2} \\ &= \frac{2y}{x^2-y^2} \end{aligned}$$

उदाहरण 4

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{a^3+1}{a^2-a+1} + \frac{a^3-1}{a^2+a+1}$$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{a^3+1}{a^2-a+1} + \frac{a^3-1}{a^2+a+1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1} + \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1} \\ &= (a+1) + (a-1) \\ &= 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4a^2 - 9b^2 \text{ को गुणनखण्ड निकाल्दा,} \\ &= (2a)^2 - (3b)^2 \\ &= (2a+3b)(2a-3b) \end{aligned}$$

उदाहरण 6

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{4x^2 + y^2}{4x^2 - y^2} - \frac{2x - y}{2x + y}$$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{4x^2 + y^2}{4x^2 - y^2} - \frac{2x - y}{2x + y} \\ &= \frac{4x^2 + y^2}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{2x - y}{2x + y} \\ &= \frac{4x^2 + y^2 - (2x - y)^2}{(2x - y)(2x + y)} \\ &= \frac{4x^2 + y^2 - 4x^2 + 4xy - y^2}{4x^2 - y^2} \\ &= \frac{4xy}{4x^2 - y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4x^2 - y^2 \text{ को गुणनखण्ड निकाल्दा,} \\ &= (2x)^2 - (y)^2 \\ &= (2x + y)(2x - y) \end{aligned}$$

उदाहरण 7

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{x}{x - y} + \frac{x}{x + y} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{x - y} + \frac{x}{x + y} + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x(x + y) + x(x - y)}{x^2 - y^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + xy + x^2 - xy}{x^2 - y^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{2x^2}{x^2 - y^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{2x^2(x^2 + y^2) + 2xy(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{2(x^4 + x^2y^2 + x^3y - xy^3)}{x^4 - y^4} \end{aligned}$$

उदाहरण 8

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)} - \frac{y}{x^2-y^2}$$

समाधान

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)} - \frac{y}{x^2-y^2} \\ &= \frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)} - \frac{y}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{(x+y)-(x-y)-2y}{2(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x+y-x+y-2y}{2(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{0}{2(x-y)(x+y)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

उदाहरण 9

$$\text{सरल गर्नुहोस् : } \frac{a-1}{a^2-4a+3} + \frac{a-2}{a^2-8a+12} + \frac{a-5}{a^2-8a+15}$$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{a-1}{a^2-4a+3} + \frac{a-2}{a^2-8a+12} + \frac{a-5}{a^2-8a+15} \\ &= \frac{a-1}{(a-1)(a-3)} + \frac{a-2}{(a-6)(a-2)} + \frac{a-5}{(a-5)(a-3)} \\ &= \frac{1}{(a-3)} + \frac{1}{(a-6)} + \frac{1}{(a-3)} \\ &= \frac{a-6+a-3+a-6}{(a-6)(a-3)} \\ &= \frac{3a-15}{(a-6)(a-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a^2 - 4a + 3 \\ &= a^2 - 3a - 1a + 3 \\ &= a(a-3) - 1(a-3) \\ &= (a-3)(a-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a^2 - 8a + 15 \\ &= a^2 - 5a - 3a + 15 \\ &= a(a-5) - 3(a-5) \\ &= (a-5)(a-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a^2 - 8a + 12 \\ &= a^2 - 6a - 2a + 12 \\ &= a(a-6) - 2(a-6) \\ &= (a-6)(a-2) \end{aligned}$$

उदाहरण 10

सरल गर्नुहोस् : $\frac{pr^2 + q}{2r - 1} + \frac{pr^2 - q}{2r + 1} + \frac{4pr^3}{1 - 4r^2}$

समाधान

$$\begin{aligned}
 &= \frac{pr^2 + q}{2r - 1} + \frac{pr^2 - q}{2r + 1} + \frac{4pr^3}{1 - 4r^2} \\
 &= \frac{pr^2 + q}{2r - 1} + \frac{pr^2 - q}{2r + 1} - \frac{4pr^3}{4r^2 - 1} \\
 &= \frac{pr^2 + q}{2r - 1} + \frac{pr^2 - q}{2r + 1} - \frac{4pr^3}{(2r - 1)(2r + 1)} \\
 &= \frac{(pr^2 + q)(2r + 1) + (pr^2 - q)(2r - 1) - 4pr^3}{(2r - 1)(2r + 1)} \\
 &= \frac{2pr^3 + pr^2 + 2rq + q + 2pr^3 - pr^2 - 2rq + q - 4pr^3}{4r^2 - 1} \\
 &= \frac{2q}{4r^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &4r^2 - 1 \text{ को गुणनखण्ड निकाल्दा,} \\
 &= 4r^2 - 1 \\
 &= (2r)^2 - (1)^2 \\
 &= (2r - 1)(2r + 1)
 \end{aligned}$$

उदाहरण 11

सरल गर्नुहोस् : $\frac{a-b}{a^2 - ab + b^2} + \frac{a+b}{a^2 + ab + b^2} - \frac{2a^3}{a^4 - a^2b^2 + b^4}$

समाधान

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a-b}{a^2 - ab + b^2} + \frac{a+b}{a^2 + ab + b^2} - \frac{2a^3}{a^4 - a^2b^2 + b^4} \\
 &= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)} - \frac{2a^3}{a^4 - a^2b^2 + b^4} \\
 &= \frac{a^3 - b^3 + a^3 + b^3}{(a^4 + a^2b^2 + b^4)} - \frac{2a^3}{a^4 - a^2b^2 + b^4} \\
 &= \frac{2a^3}{(a^4 + a^2b^2 + b^4)} - \frac{2a^3}{a^4 - a^2b^2 + b^4} \\
 &= \frac{2a^3(a^4 - a^2b^2 + b^4) - 2a^3(a^4 + a^2b^2 + b^4)}{(a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^4 - a^2b^2 + b^4)} \\
 &= 2a^3 \left[\frac{a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^4 - a^2b^2 - b^4}{a^8 + a^4b^4 + b^8} \right] \\
 &= 2a^3 \left[\frac{-4a^2b^2}{a^8 + a^4b^4 + b^8} \right] \\
 &= \frac{-4a^5b^2}{a^8 + a^4b^4 + b^8}
 \end{aligned}$$

अभ्यास 8.1

1. लघुत्तम पदमा लैजानुहोस् :

$$(क) \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$$

$$(ख) \frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2}$$

$$(ग) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12}$$

2. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$$

$$(ख) \frac{1}{b-c} - \frac{b+c}{b^2-c^2}$$

$$(ग) \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}$$

$$(घ) \frac{m+n}{m-n} + \frac{m-n}{m+n}$$

$$(ङ) \frac{1}{m+n} + \frac{n}{m^2-n^2}$$

$$(च) \frac{3}{x^2-4} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$(छ) \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} + \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$(ज) \frac{4x^2+25y^2}{4x^2-25y^2} - \frac{2x-5y}{2x+5y}$$

$$(झ) \frac{4x^3}{x^4+a^4} - \frac{8x^7}{x^8-a^8}$$

$$(ञ) \frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$(ट) \frac{3}{a+3} + \frac{4}{a-3} + \frac{9a}{2(9-a^2)}$$

$$(ठ) \frac{1}{x+2y} - \frac{1}{x-2y} + \frac{2x}{4y^2-x^2}$$

$$(ड) \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-b)(c-a)}$$

$$(ढ) \frac{y-z}{x^2-(y-z)^2} + \frac{z-x}{y^2-(z-x)^2} + \frac{x-y}{z^2-(x-y)^2}$$

$$(ण) \frac{x^2-(a-b)^2}{(x+b)^2-a^2} + \frac{a^2-(x-b)^2}{(x+a)^2-b^2} + \frac{b^2-(x-a)^2}{(a+b)^2-x^2}$$

$$(त) \frac{1}{p^2+7p+12} + \frac{2}{p^2+5p+6} - \frac{3}{p^2+6p+8}$$

$$(थ) \frac{x+3}{x^2+3x+9} + \frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{54}{x^4+9x^2+81}$$

$$(द) \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{2}{4x-x^2-3} - \frac{3}{x^2-3x+2}$$

$$(ध) \frac{b+2}{1+b+b^2} - \frac{b-2}{1-b+b^2} - \frac{2b^2}{1+b^2+b^4}$$

$$(न) \frac{1}{1-b+b^2} - \frac{1}{1+b+b^2} - \frac{2b}{1-b^2+b^4}$$

$$(प) \frac{a+c}{a^2+ac+c^2} + \frac{a-c}{a^2-ac+c^2} + \frac{2c^3}{a^4+a^2c^2+c^4}$$

3. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{1}{4(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{4(1+\sqrt{x})} + \frac{2\sqrt{x}}{4(1-x)}$$

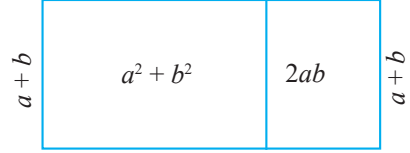
$$(ख) \frac{1}{8(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{8(1+\sqrt{x})} + \frac{2\sqrt{x}}{8(1-x)}$$

$$(ग) \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a-1)^2} - \frac{2}{a^2-1}$$

4. यदि $\frac{a}{2x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{4x+5}{2x^2+5x+2}$ भए a को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

एउटा आयताकार टुक्रालाई चौडाइ समान हुने गरी बिचबाट काटेर दुई टुक्रा बनाउनुहोस् । समूहले फरक फरक दुईओटा आयताकार कागजका टुक्रा लिनुहोस् । पहिलो टुक्राको कागजको क्षेत्रफल र चौडाइ क्रमशः $a^2 + b^2$ र $(a + b)$ उल्लेख गर्नुहोस् । दोस्रो टुक्राको कागजको क्षेत्रफल र चौडाइ क्रमशः $2ab$ र $(a + b)$ उल्लेख गर्नुहोस् । अब a लाई b भन्दा ठुलो मानेर,



(क) दुवै टुक्राको जम्मा लम्बाइ कति हुन्छ ?
 a र b का रूपमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $a = 5$ मिटर र $b = 3$ मिटर भए ती दुई कागजको क्षेत्रफल, लम्बाइ र चौडाइको सम्बन्ध कस्तो रहेछ पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

- (क) $\frac{x}{x+5}$ (ख) $\frac{a+b}{a-b}$ (ग) $\frac{x-2}{x-4}$
- (क) 1 (ख) 0 (ग) $\frac{2m}{m^2-n^2}$

(घ) $\frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}$ (ङ) $\frac{m}{m^2-n^2}$ (च) $\frac{4(x-1)}{(x+2)(x-2)^2}$

(छ) $2a$ (ज) $\frac{20xy}{4x^2-25y^2}$ (झ) $\frac{4x^3}{a^4-x^4}$ (ञ) $\frac{4x^3y}{x^4-y^4}$

(ट) $\frac{5a+6}{2(a^2-9)}$ (ठ) $\frac{2}{2y-x}$ (ड) 0 (ढ) 0 (ण) 1

(त) $\frac{1}{(p+2)(p+3)(p+4)}$ (थ) $\frac{2(x-3)}{x^2-3x+9}$ (द) $\frac{4}{3x-x^2-2}$

(ध) $\frac{4}{1+b^2+b^4}$ (न) $\frac{-4b^3}{1+b^4+b^8}$ (प) $\frac{2(a+c)}{a^2+ac+c^2}$
- (क) $\frac{\sqrt{x}}{1-x}$ (ख) $\frac{\sqrt{x}}{2(1-x)}$ (ग) $\frac{4}{(a^2-1)^2}$
- $a = 2$

9.0 पुनरवलोकन (Review)

अगिल्लो कक्षामा हामीले घाताङ्कको सरलीकरणका बारेमा अध्ययन गरेका छौं । यहाँ घाताङ्क युक्त समीकरण सम्बन्धी समस्याको विषयमा छलफल गर्ने छौं ।

तलको तालिकामा खाली ठाउँ भर्नुहोस् । x को मान कति हुँदा दिइएको अवस्था मान्य हुन्छ ?

(क) $2^x = 2$

| | | | | | | | |
|-------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2^x | $2^{-3} = \frac{1}{8}$ | | | | | | |
| | | | | | | | |

(ख) $5^{x+1} = 125$

| | | | | | | | |
|-----------|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5^{x+1} | $5^{-3+1} = \frac{1}{25}$ | | | | | | |
| | | | | | | | |

(ग) $3^x = \frac{1}{9}$

| | | | | | | | |
|-------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3^x | $3^{-3} = \frac{1}{27}$ | | | | | | |
| | | | | | | | |

9.1 घाताङ्क युक्त समीकरण (Exponential Equations)

क्रियाकलाप 1

तल सोधिएका घाताङ्कयुक्त समीकरण कसरी हल गर्ने होला, समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) $2^x = 4$

(ख) $3^{x-1} = 81$

(ग) $3^{x+1} + 3^x = \frac{4}{27}$

(घ) $3^x + \frac{1}{3^x} = 3\frac{1}{3}$

$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ राख्दै जाने ।
 x को मान जतिले समीकरण मान्य हुन्छ
त्यही नै x को मान हुन्छ ।



दिइएको घाताङ्क युक्त समीकरणमा x
को मान $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ राख्दै
जानेबाहेक x को मान पत्ता लगाउने
अर्को विधि पनि छ कि ?



(क) $2^x = 4$ मा $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ राख्दै जाँदा $x = 2$ मान्य हुन्छ । त्यसैले $x = 2$ भयो ।
यसलाई यसरी पनि गर्न सकिन्छ ।

यहाँ $2^x = 4$

अथवा, $2^x = 2^2$

$\therefore x = 2$

(ख) $3^{x-1} = 81$

अथवा, $3^{x-1} = 3^4$

अथवा, $x - 1 = 4$

$\therefore x = 5$

ए ! यो तरिका छोटो र सजिलो रहेछ । आधार
बराबर हुँदा घाताङ्क पनि बराबर हुने रहेछ ।
त्यसैले दुवैतर्फ एउटै आधार बनाउनु पर्ने रहेछ ।

परीक्षण गर्दा, $x = 5$

$3^{x-1} = 81$

LHS = 3^{5-1}

= $3^4 = 81$

\therefore LHS = RHS

हामीले पत्ता लगाएको x को मान 5 सही छ ।



(ग) $3^{x+1} + 3^x = \frac{4}{81}$

अथवा, $3^x \times 3^1 + 3^x = \frac{4}{81}$

अथवा, $3^x(3 + 1) = \frac{4}{81}$

अथवा, $3^x(4) = \frac{4}{81}$

अथवा, $3^x = \frac{1}{81}$ बनाउनुपर्छ ।

अथवा, $3^x = 3^{-4}$

$\therefore x = -4$

परीक्षण गर्दा, $x = -4$

$3^{x+1} + 3^x = \frac{4}{81}$

LHS = $3^{-4+1} + 3^{-4}$

= $3^{-3} + 3^{-4}$

= $\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}$

= $\frac{1}{27} + \frac{1}{81}$

= $\frac{4}{81} =$ RHS

हामीले पत्ता लगाएको x को मान -4 सही छ ।

$$(घ) 3^x + \frac{1}{3^x} = 3\frac{1}{3}$$

यो घाताङ्कयुक्त समीकरण अगिल्ला घाताङ्कयुक्त समीकरणभन्दा के फरक छ ?

$$\text{अथवा, } 3^x + \frac{1}{3^x} = 3\frac{1}{3}$$

$$\text{अथवा, } \frac{(3^x)^2 + 1}{3^x} = \frac{10}{3}$$

$$\text{अथवा, } 3 \times (3^x)^2 + 3 = 10 \times 3^x$$

$$\text{अथवा, } 3 \times (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 3 = 0$$

यो 3^x को वर्ग समीकरण स्वरूपमा रहेछ, त्यसैले

$$\text{मानौं } 3^x = a \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{अब } 3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$$\text{अथवा, } 3a^2 - 9a - a + 3 = 0$$

$$\text{अथवा, } 3a(a - 3) - 1(a - 3) = 0$$

$$\text{अथवा, } (a - 3)(3a - 1) = 0$$

$$\text{या त, } (a - 3) = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$\text{अथवा, } (3a - 1) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

अब a को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$$a = 3 \text{ भए } 3^x = 3^1 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ भए } 3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \quad \Rightarrow x = -1$$

तसर्थ x का मानहरू 1 र -1 हुन् ।

उदाहरण 1

$$\text{हल गर्नुहोस् : } 7^x = 49$$

समाधान

$$\text{यहाँ } 7^x = 49$$

$$\text{अथवा, } 7^x = 7^2$$

$$\therefore x = 2$$

उदाहरण 2

हल गर्नुहोस् : $4^{x-2} = 0.25$

समाधान

$$\text{यहाँ, } 4^{x-2} = 0.25$$

$$\text{अथवा, } (2)^{2(x-2)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{अथवा, } (2)^{2(x-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } (2)^{2(x-2)} = 2^{-2}$$

$$\text{अथवा, } (2)^{2(x-2)} = 2^{-2}$$

$$\text{अथवा, } 2(x-2) = -2$$

$$\text{अथवा, } x-2 = -1$$

$$\therefore x = 1$$

वैकल्पिक तरिका

$$\text{यहाँ, } 4^{x-2} = 0.25$$

$$\text{अथवा, } 4^{x-2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{अथवा, } 4^{x-2} = (4)^{-1}$$

$$\text{अथवा, } (4)^{(x-2)} = (4)^{-1}$$

$$\text{अथवा, } x-2 = -1$$

$$\text{अथवा, } x = -1 + 2$$

$$\therefore x = 1$$

उदाहरण 3

हल गर्नुहोस् : $3^{5x-4} + 3^{5x} = 82$

समाधान:

$$\text{यहाँ, } 3^{5x-4} + 3^{5x} = 82$$

$$\text{अथवा, } 3^{5x} \times 3^{-4} + 3^{5x} = 82$$

$$\text{अथवा, } 3^{5x} \left(\frac{1}{81} + 1\right) = 82$$

$$\text{अथवा, } 3^{5x} \left(\frac{82}{81}\right) = 82$$

$$\text{अथवा, } 3^{5x} = 81$$

$$\text{अथवा, } 3^{5x} = 3^4$$

$$\text{अथवा, } 5x = 4$$

$$\therefore x = \frac{4}{5}$$

उदाहरण 4

हल गर्नुहोस् : $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$

समाधान

$$\text{यहाँ, } 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$$

$$\text{अथवा, } 3^x \times 3^{-1} + 3^x \times 3^{-2} + 3^x \times 3^{-3} = 13$$

$$\text{अथवा, } \frac{1}{3}3^x + \frac{1}{9}3^x + \frac{1}{27}3^x = 13$$

$$\text{अथवा, } 3^x \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) = 13$$

$$\text{अथवा, } 3^x \left(\frac{9+3+1}{27}\right) = 13$$

$$\text{अथवा, } 3^x \left(\frac{13}{27}\right) = 13$$

$$\text{अथवा, } 3^x = 27$$

$$\text{अथवा, } 3^x = 3^3$$

$$\therefore x = 3$$

उदाहरण 5

हल गर्नुहोस् : $2^x + \frac{1}{2^x} = 2\frac{1}{2}$

समाधान

यहाँ, $2^x + \frac{1}{2^x} = 2\frac{1}{2}$

अथवा, $2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2}$

मानौं $2^x = a$(i)

त्यसैले, $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$

अथवा, $\frac{a^2+1}{a} = \frac{5}{2}$

अथवा, $2(a^2 + 1) = 5a$

अथवा, $2a^2 - 5a + 2 = 0$

अथवा, $2a^2 - 4a - a + 2 = 0$

अथवा, $2a(a - 2) - 1(a - 2) = 0$

अथवा, $(a - 2)(2a - 1) = 0$

या त, $a - 2 = 0 \quad \therefore a = 2$

अथवा, $2a - 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$

अब a को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$$a = 2 \text{ भए } 2^x = 2^1 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ भए } 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \quad \Rightarrow x = -1$$

तसर्थ x का मानहरू 1 र -1 हुन् ।

उदाहरण 6

हल गर्नुहोस् : $5 \times 4^{x+1} - 16^x = 64$

समाधान

यहाँ, $5 \times 4^{x+1} - 16^x = 64$

अथवा, $5 \times (4^x \times 4) - 4^{2x} = 64$

अथवा, $20 \times 4^x - (4^x)^2 = 64$

मानौं, $4^x = a$(i)

तसर्थ $20a - a^2 = 64$

$$\text{अथवा, } a^2 - 20a + 64 = 0$$

$$\text{अथवा, } a^2 - 16a - 4a + 64 = 0$$

$$\text{अथवा, } a(a - 16) - 4(a - 16) = 0$$

$$\text{अथवा, } (a - 4)(a - 16) = 0$$

$$\text{या त, } (a - 4) = 0 \quad \therefore a = 4$$

$$\text{अथवा, } (a - 16) = 0 \quad \therefore a = 16$$

अब a को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$\text{यदि } a = 4 \text{ भए } 4^x = 4^1 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$\text{यदि } a = 16 \text{ भए } 4^x = 16 = 4^2 \quad \Rightarrow x = 2$$

तसर्थ x का मानहरू 1 र 2 हुन्।

उदाहरण 7

$$\text{यदि } x^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}} \text{ भए प्रमाणित गर्नुहोस् } 3x(x^2 + 3) = 8$$

समाधान

$$\text{यहाँ, } x^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}} - 2$$

$$\text{अथवा, } x^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \quad [\because 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} = 1]$$

$$\text{अथवा, } x^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } x = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} \quad \dots\dots\dots(i)$$

समीकरण (i) को दुवैतिर घन गर्दा,

$$\text{अथवा, } x^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$\text{अथवा, } x^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3 \times 3^{\left(\frac{1}{3}\right)} \times 3^{-\left(\frac{1}{3}\right)} \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\text{अथवा, } x^3 = 3 - 3^{-1} - 3 \times 1 \times x$$

$$\text{अथवा, } x^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3x$$

$$\text{अथवा, } x^3 = \frac{9 - 1 - 9x}{3}$$

$$\text{अथवा, } 3x^3 = 8 - 9x$$

$$\text{अथवा, } 3x^3 + 9x = 8$$

$$\therefore 3x(x^2 + 3) = 8 \text{ प्रमाणित भयो।}$$

अभ्यास 9.1

1. तलको तालिकामा खाली ठाउँ भर्नुहोस् र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् :

(क)

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 7^x | | | | | | | |

(ख)

| | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5^{-x} | | | | | | | |
| | | | | | | | |

2. हल गर्नुहोस् र जाँचेर पनि देखाउनुहोस् :

(क) $3^x = 9$ (ख) $5^{x-1} = 25$ (ग) $\frac{1}{5^{2x-4}} = 125$
 (घ) $4^{x-2} = 0.125$ (ङ) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(1\frac{2}{3}\right)^3$ (च) $2^x \times 3^{x+1} = 18$

3. हल गर्नुहोस् :

(क) $4^{\frac{1-x}{1+x}} = 4^{\frac{1}{3}}$ (ख) $2^{x+4}\sqrt{4^{x+8}} = \sqrt[6]{128}$
 (ग) $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 448$ (घ) $3^{x+1} - 3^x = 162$
 (ङ) $4^{x+1} - 8 \times 4^{x-1} = 32$ (च) $4 \times 3^{x+1} - 3^{x+2} - 3^{x-1} = 72$
 (छ) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 2 \times 3^x = 126$ (ज) $2^x + 3^{x-2} = 3^x - 2^{x+1}$
 (झ) $8^{x-1} - 2^{3x-2} + 8 = 0$ (ञ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{5x+1}} = 4 \times 2^{\sqrt{5x+1}}$

4. हल गर्नुहोस् :

(क) $5^x + \frac{1}{5^x} = 5\frac{1}{5}$
 (ख) $7^x + \frac{1}{7^x} = 7\frac{1}{7}$
 (ग) $9^x + \frac{1}{9^x} = 9\frac{1}{9}$
 (घ) $4^x + \frac{1}{4^x} = 16\frac{1}{16}$
 (ङ) $5^x + 5^{-x} = 25\frac{1}{25}$
 (च) $81 \times 3^x + 3^{-x} = 30$

5. हल गर्नुहोस् :

(क) $4 \times 3^{x+1} - 9^x = 27$

(ख) $3 \times 2^{p+1} - 4^p = 8$

(ग) $5^{2x} - 6 \times 5^{x+1} + 125 = 0$

(घ) $2^{x-2} + 2^{3-x} = 3$

(ङ) $5^{x+1} + 5^{2-x} = 126$

(च) $3^{2y} - 4 \times 3^y + 3 = 0$

6. $16^x - 5 \times 4^{x+1} + 64 = 0$ को हल गर्नुहोस् । x का मानहरूले $5^x + \frac{125}{5^x} = 30$ लाई पनि सन्तुष्ट गर्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

7. (क) यदि $x = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $3x(x^2 - 3) = 10$

(ख) यदि $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $2x^3 + 6x - 3 = 0$

उत्तर

2. (क) 2 (ख) 3 (ग) $\frac{1}{2}$ (घ) $\frac{1}{2}$ (ङ) -3 (च) 1

3. (क) $\frac{1}{2}$ (ख) 34 (ग) 5 (घ) 4 (ङ) 2 (च) 3 (छ) 2 (ज) 3
(झ) 2 (ञ) 7

4. (क) ± 1 (ख) ± 1 (ग) ± 1 (घ) ± 2 (ङ) ± 2 (च) -1, -3

5. (क) 1, 2 (ख) 1, 2 (ग) 1, 2 (घ) 2, 3 (ङ) -1, 2 (च) 0, 1

6. 1, 2

1. नेपाल पुस्तक पसलमा कार्यरत दुई जना कर्मचारीको पाँच महिनाको कमिसन रकम देहायबमोजिम छ :

| महिना | | | | | |
|------------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| नाम | वैशाख | जेठ | असार | साउन | भदौ |
| कर्मचारी A | रु. 5000 | रु. 6000 | रु. 7000 | रु. 8000 | रु. 9000 |
| कर्मचारी B | रु. 2000 | रु. 3000 | रु. 4500 | रु. 6750 | रु. 10125 |

माथिको तालिका हेरी तलका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् :

- कुन कर्मचारीले प्राप्त गरेको कमिसन रकम समानान्तरिय अनुक्रममा छ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।
- कर्मचारी A र कर्मचारी B ले प्राप्त गरेको वैशाख र असार महिनाको मध्यमान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- पाँच महिनाको अन्त्यमा कर्मचारी A र कर्मचारी B ले प्राप्त गरेको जम्मा रकमबिचको फरक कति हुन्छ ? सूत्र प्रयोग गरी गणना गर्नुहोस् ।

2. विशालले उसको साथी सुनिलसँग 6 ओटा किस्ताबन्दीमा रकम तिर्ने गरी रु. 45000 सापटी लिए । उनले प्रत्येक किस्ताबन्दीमा अगिल्लोभन्दा पछिल्लो किस्ताबन्दी रु. 1000 का दरले बढी तिर्दै जान्छन् । त्यस्तै सीताले उनको साथी ओमकुमारीसँग 6 ओटै किस्ताबन्दीमा रकम तिर्ने गरी रु. 63,000 सापटी लिइन् ।

प्रत्येक किस्ताबन्दीमा अगिल्लोभन्दा पछिल्लो किस्ताबन्दी दोब्बरका दरले बढी तिर्दै जान्छन् ।

- विशाल र सीताले पहिलो किस्ताबन्दीमा कति कति रकम तिर्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- विशाल र सीताले तिरेको पहिलो र अन्तिम किस्ताबन्दीबिचको फरक कति कति छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- कुन किस्ताबन्दीमा विशाल र सीताले बराबर रकम तिर्छन्, गणना गर्नुहोस् ।

3. एउटा सामुदायिक वनमा पहिलो दिन 2 ओटा चरा बसाइँ सरेर आएछन् । अगिल्लो दिन आएका चराले भोलिपल्ट दोब्बर सङ्ख्यामा अरू साथीहरूलाई बसाइँ सराएछन् । यदि यही दरमा चरा बसाइँ सर्ने हो भने,

(क) दसौँ दिनमा कति चराहरूले बसाइँ सर्ने रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) दसौँ दिनसम्म जम्मा कति चराले बसाइँ सर्ने रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. नवराजको खुत्रुकेमा उनका बुबाले वैशाख 1 गतेदेखि 7 गतेसम्म अगिल्लो दिनको दोब्बर हुने गरी रकम (पैसा) राखी दिनुभयो । सातौँ दिनमा नवराजको खुत्रुकेमा रु. 635 जम्मा भयो भने,

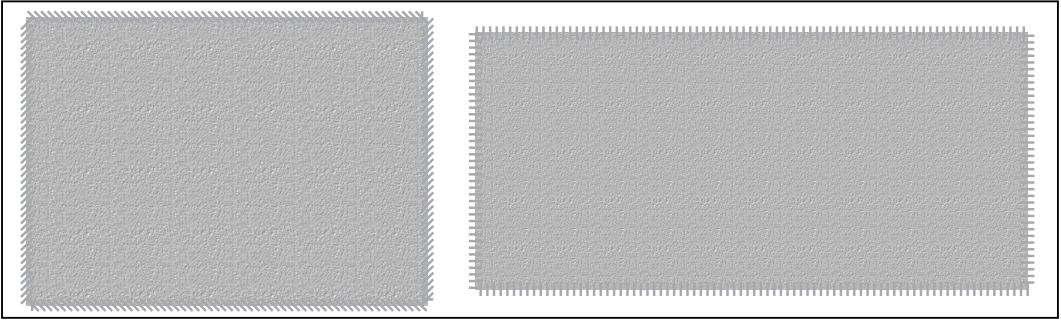
(क) नवराजको बुबाले पहिलो दिनमा कति रुपियाँ खुत्रुकेमा जम्मा गरिदिनु भएको रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सातौँ दिनको दिन कति रुपियाँ जम्मा गरिदिनु भएको रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. सुनिलको बुबाले उसको हरेक जन्मदिनमा केही रकम जम्मा गरिदिने निधो गर्नुभयो । सोहीबमोजिम पहिलो जन्मदिनको अवसरमा रु. 500, दोस्रो जन्मदिनको अवसरमा रु. 1000, तेस्रो जन्मदिनको अवसरमा रु. 1500 जम्मा गरिदिनुभयो । यसरी हरेक जन्मदिनमा रु. 500 का दरले बढाउँदै जम्मा गरिदिनु हुन्छ ।

- (क) सुनिलको 16 औँ जन्मदिनको अवसरमा कति रकम जम्मा गरिदिनुपर्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) सुनिलको 16 औँ जन्मदिनसम्म जम्मा कति रकम जम्मा हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) सुनिलले रु. 1 लाख जम्मा गर्न कतिऔँ जन्मदिन कुनै पर्ला, कारणसहित उल्लेख गर्नुहोस् ।

6. हरिशरणले आफ्नो 2 ओटा आयतकार जग्गाहरू घेर्नका लागि काँडेतारको नाप अनुमान गर्न सकिरहेको छैन । दुवै जग्गाको क्षेत्रफल 360 वर्गमिटर छ । पहिलो जग्गाको लम्बाइ र चौडाइको फरक 2 मिटर छ भने दोस्रो जग्गाको लम्बाइ र चौडाइको फरक 9 मिटर छ ।



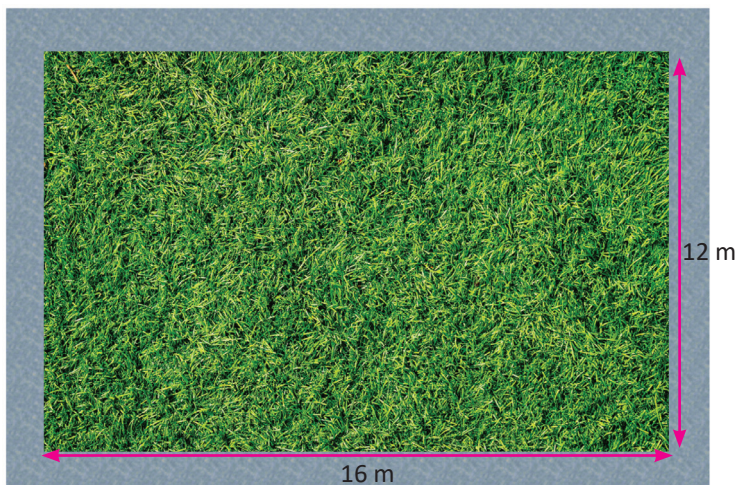
यसका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

- (क) दुवै जग्गाको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) के दुवै जग्गाको वरिपरि काँडेतार लगाउन समान नापको तार भए पुग्ला ? गणना गरी कारणसहित उल्लेख गर्नुहोस् ।
 (ग) प्रतिमिटर रु. 10 का दरले काँडेतार लगाउँदा कुन जग्गामा कति रकम बढी लाग्छ, गणना गर्नुहोस् ।

7. राम र सीता श्रीमान् श्रीमती हुन् । रामको हालको उमेर 30 वर्ष र सीताको हालको उमेर 25 वर्ष छ :

- (क) राम र सीताको x वर्ष अगिको उमेर कति थियो ?
 (ख) x वर्ष अगिको उनीहरूको उमेरको गुणनफल 500 थियो भने x को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) कति वर्षपछि उनीहरूको उमेरको योगफल 99 पुग्छ, गणना गर्नुहोस् ।

8. समानान्तरीय अनुक्रमको पहिलो पद 2 छ । उक्त अनुक्रमको पहिला पाँच पदको योगफलको चार गुणासँग त्यसपछिका पाँच पदको योगफल बराबर हुन्छ भने,
- (क) समान अन्तर कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) प्रमाणित गर्नुहोस् । $t_{20} = -112$
- (ग) पहिला पाँच पदको योगफल कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. चित्रमा देखाएजस्तै $16\text{ m} \times 12\text{ m}$ नाप भएको घाँसे मैदानको वरिपरि बराबर चौडाइ भएको पैदल मार्ग स्थापना गरिएको छ । जसले गर्दा यसको कुल क्षेत्रफल 320 m^2 ले बढेको पाइयो ।



- (क) माथिको सन्दर्भअनुसार घाँसे मैदानको वरिपरि रहेको बराबर चौडाइलाई x मानेर समीकरण बनाउनुहोस् ।
- (ख) घाँसे मैदानको वरिपरि रहेको चौडाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. एउटा आयताकार जमिनको लामो भुजा छोटो भुजाभन्दा 40 m बढी छ तर त्यसको विकर्ण लामो भुजाभन्दा 40 m बढी छ ।
- (क) माथिको सन्दर्भअनुसार छोटो भुजालाई x मानेर समीकरण बनाउनुहोस् ।
- (ख) छोटो भुजा, लामो भुजा र विकर्णको लम्बाइ कति कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) उक्त जग्गाको वरिपरि 4 पटक काँडेतार लगाउन प्रतिमिटर रु. 15 का दरले कति खर्च लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) उक्त आयताकार जमिनमा 20×15 मिटरका बढीमा कतिओटा जग्गाका टुक्राहरू तयार गर्न सकिएला, गणना गर्नुहोस् ।

11. रमेश र सीता दाजु र बहिनी हुन् । रमेशको हालको उमेर 30 वर्ष र सीताको हालको उमेर 25 वर्ष छ ।

- (क) रमेश र सीताको x वर्ष अगिको उमेर कति थियो ?
 (ख) x वर्ष अगिको उनीहरूको उमेरको गुणनफल 644 थियो भने x को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) कति वर्षपछि उनीहरूको उमेरको गुणनफल 864 पुग्छ, गणना गर्नुहोस् ।

12. दुईओटा कारले एकै समयमा एउटा चौबाटो छोड्छन्, एउटा उत्तरतर्फ यात्रा गरिरहेको छ र अर्को पश्चिमतर्फ यात्रा गरिरहेको छ । जब उत्तरतर्फ यात्रा गरिएको कार 24 माइलको दुरीमा गएको थियो त्यतिखेर दुई कारहरूबिचको दुरी पश्चिमतिर गइरहेको कारको दुरीको तीन गुणाभन्दा चार माइल जति बढेको थियो ।

- (क) माथिको सन्दर्भबाट बन्ने समीकरण उल्लेख गर्नुहोस् ।
 (ख) पश्चिमतिर गइरहेको कार कति पर पुगेको रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) दुई कारहरूबिचको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. एउटा बसले समान गतिमा 90 किलोमिटरको दुरी तय गर्छ । यदि उक्त बसको गति 15 किमी/घण्टा बढी भएको भए जम्मा यात्रामा 30 मिनेट समय कम लाग्ने थियो ।

- (क) माथिको सन्दर्भअनुसार बसको गतिलाई x मानेर समीकरण बनाउनुहोस् ।
 (ख) बसको सुरुआती गति कति थियो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) सुरुको गतिअनुसार 90 कि.मि. दुरी पार गर्न कति समय लाग्छ ?

14. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-b^2}$

(ख) $\frac{a-4}{a^2-4a+16} + \frac{a+4}{a^2+4a+16} + \frac{128}{a^4+16a^2+256}$

(ग) $\frac{2a-6}{a^2-9a+20} - \frac{a-1}{a^2-7a+12} - \frac{a-2}{a^2-8a+15}$

(घ) $\frac{a+b}{2ab}(a+b-c) + \frac{b+c}{2bc}(b+c-a) + \frac{c+a}{2ac}(c+a-b)$

15. हल गर्नुहोस् :

(क) $3^{x+2} + 3^{2-x} = 82$

(ख) $\frac{3^{2x} + 1}{3^x} = \frac{82}{9}$

16. तलका सम्बन्धहरू प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) यदि $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् $x(x^2 - 3x - 3) = 1$

(ख) यदि $x = 3 + 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् $x(x^2 - 9x + 8) = 12$

(ग) यदि $x = 2 - 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् $x(x^2 - 6x + 18) = 22$

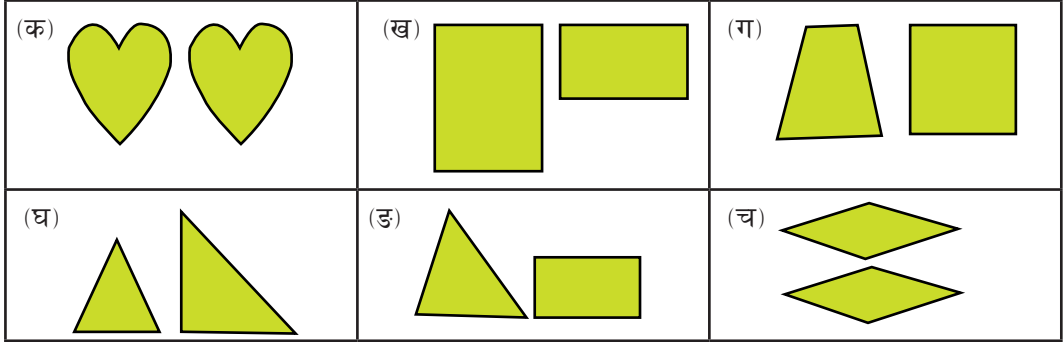
उत्तर

1. (क) कर्मचारी A (ख) रु. 6000, रु. 3000 (ग) रु. 8625
2. (क) रु. 5000, रु. 1000 (ख) रु. 4000, रु. 22000 (ग) चौथो
3. (क) रु. 1024 (ख) रु. 2046
4. (क) रु. 5 (ख) रु. 320
5. (क) रु. 8,000 (ख) रु. 68,000 (ग) 20 औं वर्ष
6. (क) 20 m, 18 m र 24 m, 15 m (ख) पुग्दैन, 76 m र 78 m
(ग) दोस्रोमा रु. 20
7. (क) $(30 - x)$ वर्ष र $(25 - x)$ वर्ष (ख) 5 वर्ष (ग) 22 वर्ष
8. (क) -6 (ग) -50
9. (क) $(16 + 2x)(12 + 2x) = 320$ (ख) 2 m
10. (क) $(x + 80)^2 = (x + 40)^2 + x^2$ (ख) 120 m, 160 m र 200 m
(ग) रु. 33,600 (घ) 64
11. (क) $30 - x$ र $25 - x$ (ख) 2 वर्ष (ग) 2 वर्ष
12. (ख) 7 माइल (ग) 25 माइल
13. (क) $\frac{90}{x} - \frac{90}{x+15} = \frac{1}{2}$ (ख) 45 km/h (ग) 2 घन्टा
14. (क) $\frac{1}{a+b}$ (ख) $\frac{2(a+4)}{a^2+4a+16}$ (ग) $\frac{5}{(a-3)(a-4)(a-5)}$ (घ) 3
15. (क) ± 2 (ख) ± 2 (ग) $\frac{2(a-4)}{a^2+4a+16}$

त्रिभुज र चतुर्भुजहरू (Triangle and Quadrilaterals)

10.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएका चित्रहरूको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) के जोडा चित्रहरूलाई आपसमा खप्दा उँदा ठिक मिल्छन् वा मिल्दैनन् ?

(ख) जोडा चित्रहरूको क्षेत्रफल एकआपसमा बराबर छ ?

(ग) कुन कुन चित्रहरू अनुरूप छन् र कुन कुन छैनन् ?

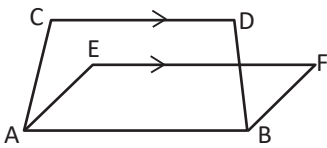
(घ) क्षेत्रफल बराबर भएका सबै चित्रहरू अनुरूप हुन्छन् ?

माथिका प्रश्नका बारेमा साथी समूहमा छलफल गरी प्राप्त निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

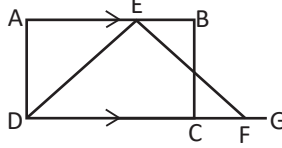
10.1 त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Triangle and Quadrilaterals)

क्रियाकलाप 1

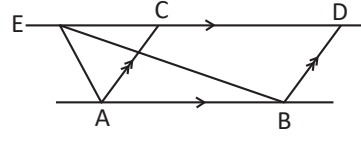
तलका चित्रहरूको अवलोकन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नको उत्तर खोज्नुहोस् :



चित्र (अ)



चित्र (आ)



चित्र (इ)

माथिका चित्रहरूको आधारमा,

(क) एउटै आधार र फरक समानान्तर रेखामा बनेका चतुर्भुजहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

(ख) फरक आधार र उही समानान्तर रेखामा बनेका त्रिभुज र चतुर्भुजको नाम लेख्नुहोस् ।

(ग) चित्र नं. (इ) मा एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाबिचमा रहेका त्रिभुजहरू तथा चतुर्भुजहरू पहिचान गर्नुहोस् ।

(क) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाबिचमा रहेका समानान्तर चतुर्भुजहरूको सम्बन्ध

क्रियाकलाप 2

दिइएको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुजहरू ABCD र ABEF को क्षेत्रफल कति कति होला, यिनीहरूबिचको सम्बन्ध के होला ?

यहाँ दुवै समानान्तर चतुर्भुजको आधार 7 cm र उचाइ 3 cm छ । तसर्थ स.च. ABCD को क्षेत्रफल = आधार × उचाइ = $AB \times DG$

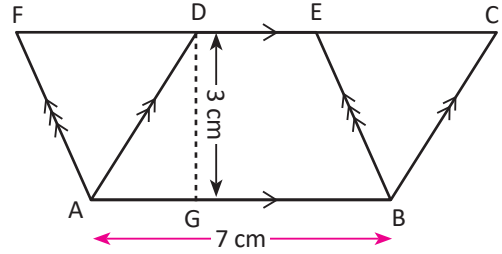
$$= 7 \times 3 \text{ cm}^2$$

$$= 21 \text{ cm}^2$$

फेरि स.च. ABEF को क्षेत्रफल = $AB \times DG$

$$= 7 \times 3 \text{ cm}^2$$

$$= 21 \text{ cm}^2$$



अतः स.च. ABCD को क्षेत्रफल = स.च. ABEF को क्षेत्रफल

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूमा बनेका समानान्तर चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुँदो रहेछ । स.च. ABCD को क्षेत्रफल = स.च. ABEF को क्षेत्रफल

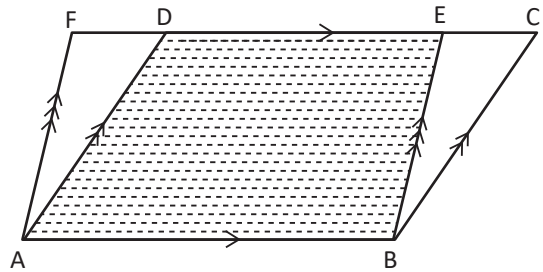
सैद्धान्तिक प्रमाण

साध्य 1

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिचमा बनेका समानान्तर चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

थाहा दिइएको : समानान्तर चतुर्भुजहरू ABCD र ABEF एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखाहरू $AB \parallel CF$ मा रहेका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुज ABEF को क्षेत्रफल



प्रमाण

| | तथ्य | कारण |
|--|--|--|
| 1. | ΔADF र ΔBCE मा i) $AD = BC$ (भू) ii) $\angle ADF = \angle BCE$ (को) iii) $\angle AFD = \angle BEC$ (को) | 1. (i) समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ मा सम्मुख भुजाहरू (ii) $AD \parallel BC$ मा सङ्गत कोणहरू (iii) $AF \parallel BE$ मा सङ्गत कोणहरू |
| 2. | $\Delta ADF \cong \Delta BCE$ | भु को. को. तथ्यअनुसार |
| 3. | ΔADF को क्षेत्रफल = ΔBCE को क्षेत्रफल | अनुरूप त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुने भएकाले |
| 4. | ΔADF को क्षेत्रफल + स.ल.च. $ABED$ को क्षेत्रफल = ΔBCE को क्षेत्रफल + स.ल.च. $ABED$ को क्षेत्रफल | बराबर भागहरूमा बराबर भाग जोड्दा (बराबरी तथ्यबाट) |
| 5. | स.च. $ABCD$ को क्षेत्रफल = स.च. $ABEF$ को क्षेत्रफल | तथ्य 4 बाट (सिङ्गो टुक्रे तथ्यअनुसार |
| एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिचमा बनेका समानान्तर चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल बराबर भयो । | | |

प्रमाणित भयो ।

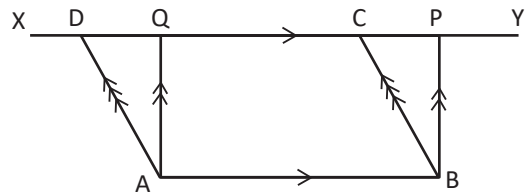
उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा $AB \parallel XY$ छ । $ABPQ$ आयत र $ABCD$ समानान्तर चतुर्भुज छन् ।

प्रमाणित गर्नुहोस् : स.च. $ABCD$ को क्षेत्रफल = आयत $ABPQ$ को क्षेत्रफल

थाहा दिइएको : समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ र आयत $ABPQ$ एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखाहरू XY र AB बिचमा रहेका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ को क्षेत्रफल = आयत $ABPQ$ को क्षेत्रफल



प्रमाण

| | तथ्य | | कारण |
|----|--|----|---|
| 1. | स.च. ABCD को क्षेत्रफल = $AB \times AQ$ | 1. | स.च.को क्षेत्रफल = आधार \times उचाइ |
| 2. | आयत ABPQ को क्षेत्रफल = $AB \times AQ$ | 2. | आयतको क्षेत्रफल = लम्बाइ \times चौडाइ |
| 3. | स.च. ABCD को क्षेत्रफल = आयत ABPQ को क्षेत्रफल | 3. | तथ्य (1) र (2) बाट |

प्रमाणित भयो ।

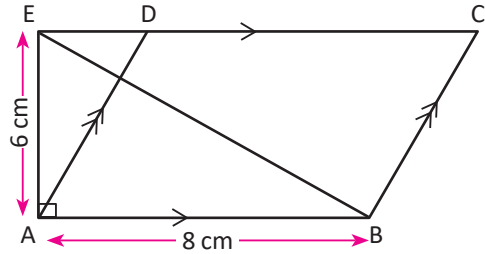
(ख) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बनेको समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजको सम्बन्ध

क्रियाकलाप 3

दिइएको चित्रको अवलोकन गर्नुहोस् :

त्रिभुज ABE र समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । यिनीहरूबिचको सम्बन्ध साथीसँग छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ त्रिभुज ABE, आधार $AB = 8 \text{ cm}$ र उचाइ $AE = 6 \text{ cm}$ भएको समकोणी त्रिभुज हो ।



तसर्थ त्रिभुज ABE को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार \times उचाइ = $\frac{1}{2} \times 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$.

फेरि समानान्तर चतुर्भुज ABCD को आधार $AB = 8 \text{ cm}$ र उचाइ $AE = 6 \text{ cm}$ छ ।

तसर्थ समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल = आधार \times उचाइ = $8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$

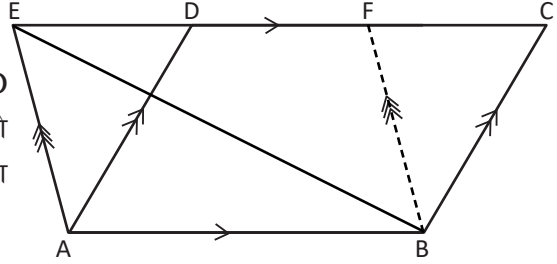
त्रिभुज ABE को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखामा बनेको त्रिभुजको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुजको आधा हुन्छ । ΔABE को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल

सैद्धान्तिक प्रमाण

साध्य 2

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बनेको समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजमध्ये त्रिभुजको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलको आधा हुन्छ ।



शाहा दिइएको : समानान्तर चतुर्भुज ABCD र त्रिभुज ABE एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखाहरू EC र AB बिचमा रहेका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने :

त्रिभुज ABE को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल

रचना : AE // BF खिचौं । अब ABFE स.च. हो ।

प्रमाण

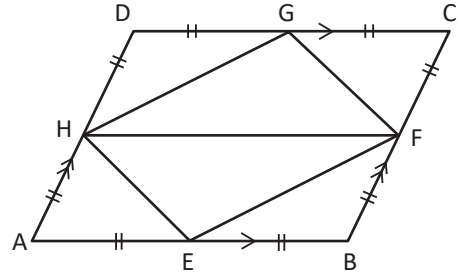
| | तथ्य | | कारण |
|----|---|----|---|
| 1. | स.च. ABFE को क्षेत्रफल = स.च. ABCD को क्षेत्रफल | 1. | एउटै आधार AB र CE//AB मा बनेका स.च.हरू भएकाले |
| 2. | त्रिभुज ABE को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABFE को क्षेत्रफल | 2. | विकर्ण EB ले स.च. ABFE लाई बराबर दुई भागमा बाँड्छ । |
| 3. | त्रिभुज ABE को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल | 3. | तथ्य 1 र 2 बाट |

अतः एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिचमा रहेका त्रिभुजको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलको आधा भयो ।

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

यदि E, F, G, र H क्रमशः समानान्तर चतुर्भुज ABCD का भुजाहरूका मध्यबिन्दुहरू हुन् भने स.च. EFGH को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



समाधान

संगैको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुज ABCD का चारओटा भुजाहरूका AB, BC, CD र DA का मध्यबिन्दुहरू क्रमशः E, F, G, र H हुन्। बिन्दुहरू H र F जोडौं।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : स.च. EFGH = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD

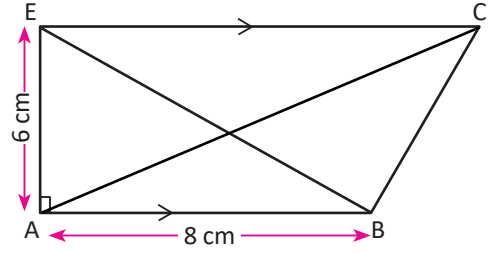
प्रमाण

| | तथ्य | कारण |
|----|--|--|
| 1. | $AH = \frac{1}{2} AD$ | AD को मध्यबिन्दु H हो |
| 2. | $BF = \frac{1}{2} BC$ | BC को मध्यबिन्दु F हो |
| 3. | $AD = BC$ | समानान्तर चतुर्भुज ABCD का सम्मुख भुजाहरू |
| 4. | तसर्थ $AH = BF$ र $AH \parallel BF$ | तथ्य 1, 2 र 3 तथा $AD \parallel BC$ भएकाले |
| 5. | तसर्थ ABFH एउटा समानान्तर चतुर्भुज भयो। | $AH \parallel BF$ र $AH = BF$ भएकाले |
| 6. | त्यसै गरी, CDHF एउटा समानान्तर चतुर्भुज भयो। | $CF \parallel DH$ र $CF = DH$ भएकाले |
| 7. | अब ΔHEF को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABFH को क्षेत्रफल | एउटै आधार HF र रेखा $HF \parallel AB$ मा बनेका स.च.र त्रिभुज |
| 8. | फेरि ΔHGF को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. CDHF को क्षेत्रफल | एउटै आधार HF र $HF \parallel DC$ मा बनेका स.च.र त्रिभुज |
| 9. | ΔHEF को क्षेत्रफल + ΔHGF को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABFH को क्षेत्रफल + $\frac{1}{2}$ स.च. CDHF को क्षेत्रफल अथवा, स.च. HEFG को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (स.च. ABFH + स.च. CDFH) को क्षेत्रफल \therefore स.च. HEFG को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल | तथ्य 7 र 8 बाट जोड तथ्य प्रयोग गरी |
| | | प्रमाणित भयो। |

(ग) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बनेका त्रिभुजहरूको सम्बन्ध

क्रियाकलाप 3

दिइएको चित्रका आधारमा,
 त्रिभुज ABE को क्षेत्रफल र
 त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 दुई त्रिभुजको क्षेत्रफलको तुलना गर्नुहोस् र सम्बन्ध
 पत्ता लगाउनुहोस् ।



यहाँ त्रिभुज ABE आधार $AB = 8 \text{ cm}$ र उचाइ $AE = 6 \text{ cm}$ भएको समकोणी त्रिभुज हो ।
 तसर्थ त्रिभुज ABE को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{उचाइ} = \frac{1}{2} \times 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$
 फेरि त्रिभुज ABC को आधार $AB = 8 \text{ cm}$ र $AB \parallel EC$ भएकाले उचाइ $AE = 6 \text{ cm}$ छ ।
 तसर्थ त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{उचाइ} = \frac{1}{2} \times 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$
 अतः त्रिभुज ABE को क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल भयो ।

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बनेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुँदोरहेछ ।
 ΔABE को क्षेत्रफल = ΔABC को क्षेत्रफल

सैद्धान्तिक प्रमाण

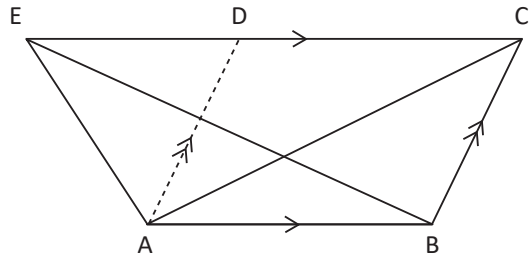
साध्य 3

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बनेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

थाहा दिइएको : त्रिभुजहरू ABE र ABC दुवै
 एउटै आधार AB तथा उही समानान्तर रेखाहरू
 EC र AB बिचमा बनेका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : ΔABE को क्षेत्रफल = ΔABC
 को क्षेत्रफल

रचना : $BC \parallel AD$ खिचौं । अब ABCD स.च.
 हो ।



प्रमाण

| | तथ्य | कारण |
|---|--|--|
| 1. | ΔABC को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल | विकर्ण AC ले स.च. ABCD लाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर्छ । |
| 2. | ΔABE को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल | ΔABE र स.च. ABCD दुवै एउटै आधार AB तथा उही समानान्तर रेखाहरू EC र AB बिचमा रहेकाले । |
| 3. | ΔABC को क्षेत्रफल = ΔABE को क्षेत्रफल | तथ्य 1 र 2 बाट प्रमाणित भयो । |
| एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बनेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर भयो । | | |

प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

दिइएको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुज ABCD भित्र बिन्दु P रहेको छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् ।

ΔAPB को क्षेत्रफल + ΔPCD को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल

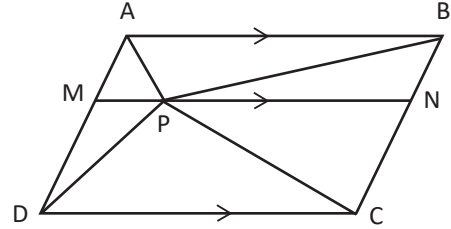
समाधान

याहा दिइएको : चित्रमा बिन्दु P समानान्तर चतुर्भुज ABCD भित्रको बिन्दु हो ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने,

ΔAPB को क्षेत्रफल + ΔPCD को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल

रचना : बिन्दु P बाट जाने गरी $MN \parallel DC$ खिच्नुहोस् ।



प्रमाण

| | तथ्य | कारण |
|----|--|--|
| 1. | ABNM र MNCD दुईओटा समानान्तर चतुर्भुजहरू हुन् । | विपरित भुजाहरू समानान्तर भएकोले |
| 2. | ΔAPB को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABNM को क्षेत्रफल | एउटै आधार AB र $AB \parallel MN$ मा बनेका स.च. र त्रिभुज |
| 3. | ΔPCD को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. MNCD को क्षेत्रफल | एउटै आधार CD र $CD \parallel MN$ मा बनेका स.च र त्रिभुज |

| | | |
|----|---|---------------------------|
| 4. | ΔAPB को क्षेत्रफल + ΔPCD को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABNM को क्षेत्रफल + $\frac{1}{2}$ स.च. MNCD को क्षेत्रफल | तथ्य (1) र (2) लाई जोड्दा |
| 5. | ΔAPB को क्षेत्रफल + ΔPCD को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. ABCD को क्षेत्रफल | तथ्य (3) बाट |

प्रमाणित भयो ।

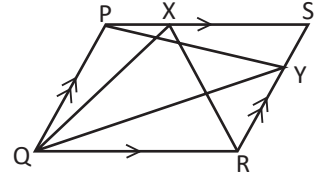
उदाहरण 4

चित्रमा PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । जसका भुजाहरू PS र RS मा बिन्दुहरू क्रमशः X र Y छन् । ΔPQY को क्षेत्रफल = ΔQRX को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

थाहा दिइएको : स.च. PQRS मा ΔPQY र ΔQRX छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : ΔPQY को क्षेत्रफल = ΔQRX को क्षेत्रफल



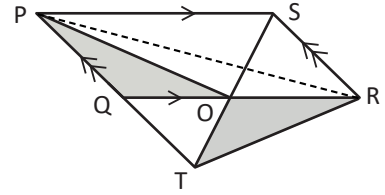
प्रमाण

| | तथ्य | कारण |
|----|--|--|
| 1. | ΔPQY को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. PQRS को क्षेत्रफल | ΔPQY र स.च. PQRS दुवैको आधार PQ र $PQ \parallel SR$ भएकाले |
| 2. | ΔQRX को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ स.च. PQRS को क्षेत्रफल | ΔQRX र स.च. PQRS दुवैको आधार QR र $QR \parallel PS$ भएकाले |
| 3. | ΔPQY को क्षेत्रफल = ΔQRX को क्षेत्रफल | तथ्य 1 र 2 बाट |

प्रमाणित भयो

उदाहरण 5

दिइएको चित्रमा PQRS एउटा स.च. हो, जसमा QR को कुनै बिन्दु O बाट SO र PQ लाई बिन्दु T सम्म लम्ब्याइएको छ भने ΔPQO को क्षेत्रफल = ΔRTO को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :



समाधान

थाहा दिइएको : स.च. PQRS को भुजा QR मा O बिन्दु छ । PQ र SO लाई T बिन्दुसम्म लम्ब्याइएको छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : ΔPQO को क्षेत्रफल = ΔRTO को क्षेत्रफल

रचना : स.च. PQRS मा PR विकर्ण खिचौं ।

प्रमाण

| तथ्य | कारण |
|---|---|
| 1. ΔPRS को क्षेत्रफल = ΔPQR को क्षेत्रफल | $\Delta PQRS$ लाई विकर्ण PR ले आधा गर्छ । |
| 2. ΔPRS को क्षेत्रफल = ΔTRS को क्षेत्रफल | एउटै आधार SR र उही समानान्तर रेखा PQ बिचमा बनेका त्रिभुजका क्षेत्रफलहरू बराबर हुन्छन् । |
| 3. $\therefore \Delta PQR$ को क्षेत्रफल = ΔTRS को क्षेत्रफल | तथ्य 1 र 2 बाट |
| 4. ΔPOR को क्षेत्रफल = ΔSOR को क्षेत्रफल | एउटै आधार OR र उही समानान्तर रेखाहरू PS र OR बिच बनेका त्रिभुजहरू भएकाले |
| 5. $\Delta PQR - \Delta POR = \Delta TRS - \Delta SOR$ | बराबरी तथ्यअनुसार |
| 6. ΔPQO को क्षेत्रफल = ΔRTO को क्षेत्रफल | शेष तथ्यअनुसार |

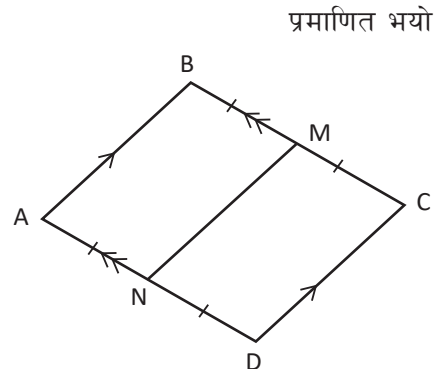
उदाहरण 6

समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा M र N क्रमशः भुजाहरू BC र AD का मध्यबिन्दुहरू हुन् भने MN ले स. च. ABCD लाई दुई बराबर स.च.मा विभाजन गर्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

थाहा दिइएको : यहाँ समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा M र N क्रमशः भुजाहरू BC र AD का मध्यबिन्दुहरू हुन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : स.च. ABMN को क्षेत्रफल = स.च. CDNM को क्षेत्रफल



प्रमाणित भयो

प्रमाण

| | तथ्य | कारण |
|----|--|---|
| 1. | $AD = BC$ र $AD \parallel BC$ हुन्छ । | ABCD समानान्तर चतुर्भुज भएकाले |
| 2. | फेरि $BM = MC$ र $AN = ND$ हुन्छ । | (समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा M र N भुजाहरू BC र AD का मध्यबिन्दुहरू भएकाले |
| 3. | $AN = BM$ र $AN \parallel BM$ | तथ्य 1 र 2 बाट |
| 4. | ABMN समानान्तर चतुर्भुज हो । | $AN = BM$ र $AN \parallel BM$ भएकाले |
| 5. | फेरि $DN = CM$ र $DN \parallel CM$ | माथिको जस्तै गर्दा |
| 6. | CDNM एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । | $DN = CM$ र $DN \parallel CM$ भएकाले |
| 7. | स.च. ABMN को क्षेत्रफल = स.च. CDNM को क्षेत्रफल | बराबर आधार $AN = ND$ र उही समानान्तर रेखाहरू BC र AD बिचमा रहेका स.च.हरू |

प्रमाणित भयो

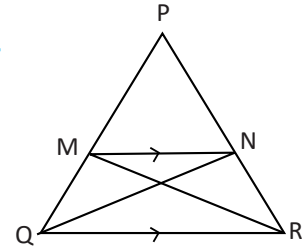
उदाहरण 7

दिइएको चित्रमा $MN \parallel QR$, भए ΔPQN को क्षेत्रफल = ΔPRM को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

थाहा दिइएको : त्रिभुज PQR मा $MN \parallel QR$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : ΔPQN को क्षेत्रफल = ΔPRM को क्षेत्रफल



प्रमाण

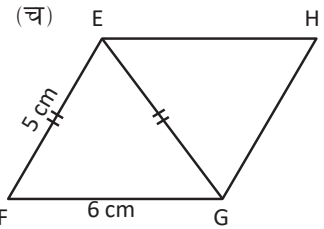
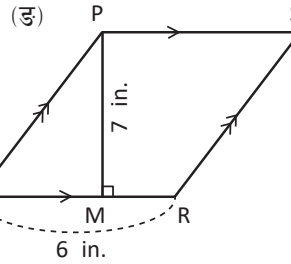
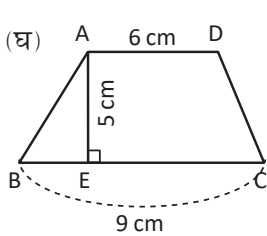
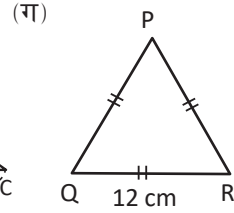
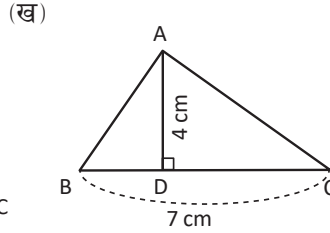
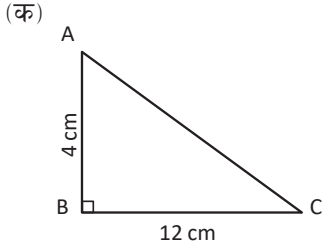
| | तथ्य | कारण |
|----|---|---|
| 1. | ΔMNQ को क्षेत्रफल = ΔMNR को क्षेत्रफल | एउटै आधार MN र उही समानान्तर रेखा $QR \parallel MN$ मा बनेका त्रिभुजहरू |
| 2. | $\Delta PMN + \Delta MNQ = \Delta PMN + \Delta MNR$ | ΔPMN लाई दुवैतिर जोड्दा |
| 3. | ΔPNQ को क्षेत्रफल = ΔPRM को क्षेत्रफल | तथ्य 2 बाट (सिङ्गो टुक्रे तथ्यअनुसार) |

प्रमाणित भयो ।

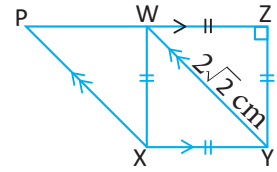
अभ्यास 10.1

(क) हल गर्नुहोस् :

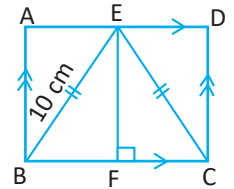
1. दिइएका आकृतिहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



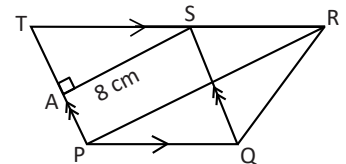
2. (क) दिइएको चित्रमा WXYZ वर्ग हो । यदि विकर्ण WY = $2\sqrt{2}$ cm भए समानान्तर चतुर्भुज PXYW को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



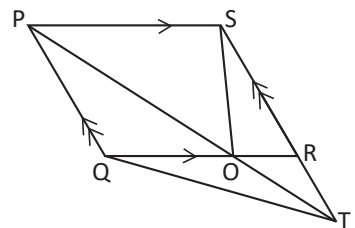
(ख) दिइएको चित्रमा BE = EC, EF ⊥ BC, BE = 10 cm र AD = 16 cm भए समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।



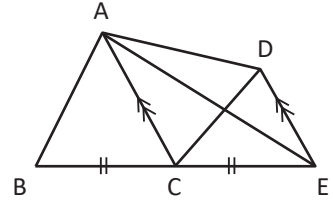
(ग) दिइएको चित्रमा PQST एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । यदि SA ⊥ TP, SA = 8 cm र ΔPQR को क्षेत्रफल 64 cm² भए TP को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



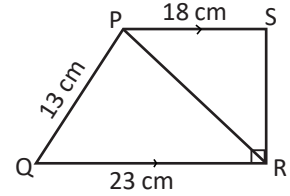
(घ) दिइएको चित्रमा PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो, जसमा भुजा QR को कुनै बिन्दु O बाट PO लाई T सम्म र SR लाई पनि उही बिन्दु T सम्म लम्ब्याई QT जोडिएको छ, भने ΔQOT को क्षेत्रफल = ΔROS को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



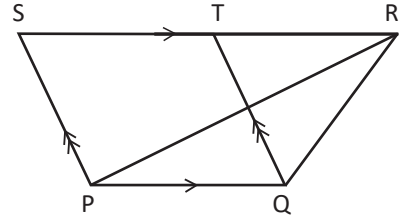
- (ड) दिइएको चित्रमा $AC \parallel DE$ र $BC = EC$ छन् । यदि $\triangle ACE$ को क्षेत्रफल 24 cm^2 छ भने चतुर्भुज $ABCD$ को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।



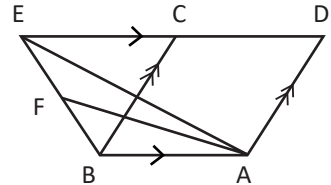
3. (क) समलम्ब चतुर्भुज PQRS मा $PS \parallel QR$, $PQ = 13 \text{ cm}$, $PS = 18 \text{ cm}$, $QR = 23 \text{ cm}$ र $SR \perp QR$ भए $\triangle PSR$ को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



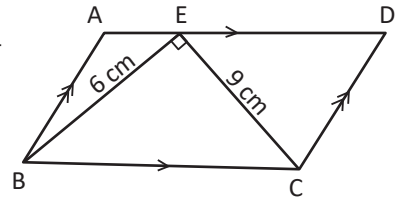
- (ख) सँगैको चित्रमा $PQ \parallel ST$, $PS \parallel QT$ र स.ल.च. PQRS को क्षेत्रफल 95 cm^2 र $\triangle QRT$ को क्षेत्रफल 35 cm^2 भए $\triangle RPQ$ को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



- (ग) सँगैको चित्रमा $DE \parallel AB$, $AD \parallel BC$ र BE को मध्यबिन्दु F र $\triangle AFE$ को क्षेत्रफल 12 cm^2 भएमा स.च. ABCD को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

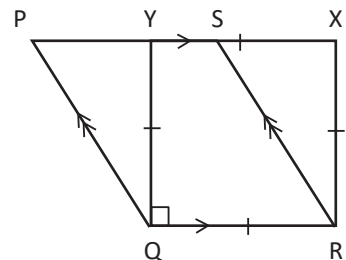


- (घ) समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा $\angle BEC = 90^\circ$, $BE = 6 \text{ cm}$, $CE = 9 \text{ cm}$ छ भने उक्त स.च.को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

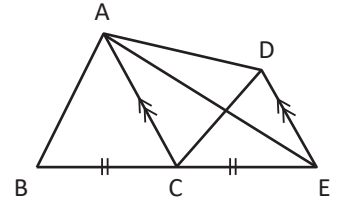


4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

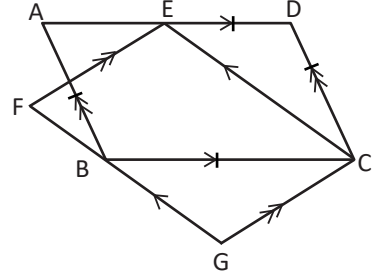
- (क) दिइएको चित्रमा PQRS एउटा स.च. हो । QRXY एउटा वर्ग हो भने, स.च. PQRS को क्षेत्रफल र वर्ग QRXY को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



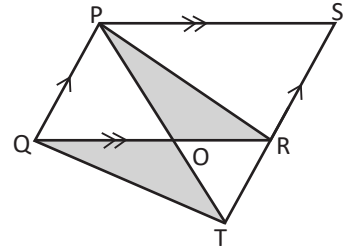
- (ख) दिइएको चित्रमा ABCD एउटा चतुर्भुज हो । जसको विकर्ण AC सँग समानान्तर हुने गरी DE खिचिएको छ । BC भुजालाई लम्ब्याएर E सम्म पुऱ्याइएको छ । A र E जोडिएको अवस्थामा चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल र ΔABE को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



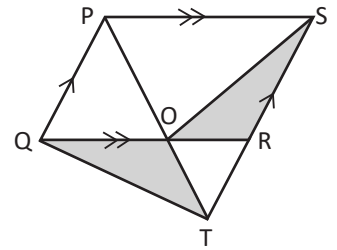
- (ग) दिइएको चित्रमा ABCD र EFGC दुईओटा स.च. हुन् भने, स.च. ABCD को क्षेत्रफल = स.च. EFGC को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



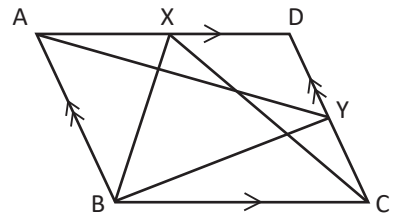
- (घ) दिइएको चित्रमा स.च. PQRS को भुजा SR लाई T सम्म लम्ब्याइएको छ । भुजा QR को कुनै बिन्दु O बाट जाने गरी PO लाई पनि T सम्म लम्ब्याइएको छ, प्रमाणित गर्नुहोस् : ΔPOR को क्षेत्रफल = ΔQOT को क्षेत्रफल



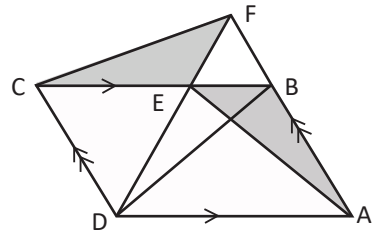
- (ङ) दिइएको चित्रमा PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो, जसमा भुजा QR को कुनै बिन्दु O बाट PO लाई T सम्म र SR लाई पनि उही बिन्दु T सम्म लम्ब्याइएको छ । QT जोडेको छ भने ΔQOT को क्षेत्रफल र ΔROS को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



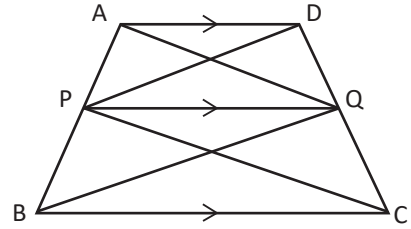
- (च) सँगैको चित्रमा ABCD एउटा स.च. हो, जसका भुजा AD को X बिन्दु तथा भुजा CD को Y बिन्दुबाट त्रिभुजहरू XBC र YAB बनेका छन् भने ΔABY को क्षेत्रफल = ΔABX को क्षेत्रफल + ΔCDX को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



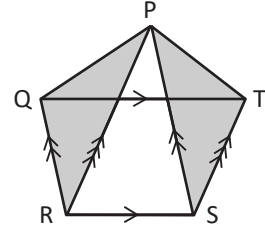
- (छ) सँगैको चित्रमा ABCD एउटा स.च. हो । भुजा BC मा कुनै बिन्दु E छ । DE र AB लाई F सम्म लम्ब्याइएको छ । CF जोडेको छ भने ΔCEF को क्षेत्रफल = ΔABE को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



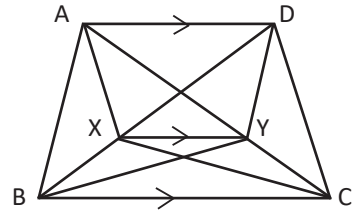
- (ज) दिइएको चित्रमा ABCD एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो, जसमा $AD//PQ//BC$ छन्। ΔAQB को क्षेत्रफल र ΔDPC को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



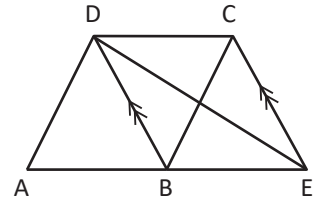
- (झ) दिइएको चित्रमा $QT//RS$, $PR//TS$ र $PS//QR$ छन्। ΔPQR को क्षेत्रफल र ΔPTS को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



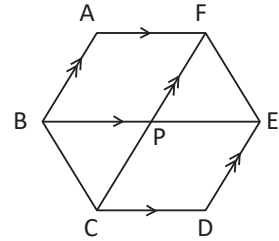
- (ञ) दिइएको चित्रमा ABCD एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो, जसमा विकर्णहरू AC र BD का बिन्दुहरू Y र X क्रमशः $AD//XY//BC$ हुने गरी जोडिएका छन्। ΔAXC को क्षेत्रफल र ΔBYD को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



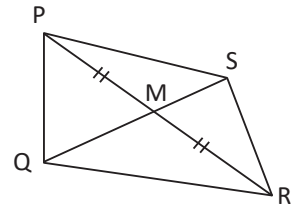
- (ट) सँगैको चित्रमा ABCD एउटा चतुर्भुज हो जसमा $DB//CE$ छ भने ΔADE को क्षेत्रफल चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



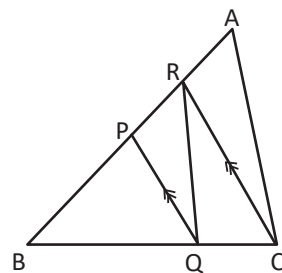
- (ठ) दिइएको चित्रमा ABCDEF एउटा षड्भुज हो। जसमा $AF//BE//CD$ र $AB//CF//DE$ छ। यदि समानान्तर चतुर्भुजहरू ABPF र CDEP को क्षेत्रफल बराबर भए $EF//BC$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



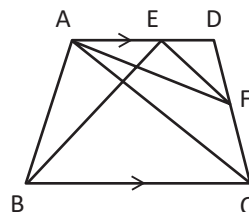
- (ड) दिइएको चित्रमा चतुर्भुज PQRS को विकर्ण PR लाई विकर्ण QS ले दुई बराबर भागमा विभाजन गर्छ भने त्रिभुज PQS को क्षेत्रफल चतुर्भुज PQRS को आधा हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।



- (ढ) दिइएको चित्रमा AB को मध्यबिन्दु P हो र BC मा कुनै बिन्दु Q छ । RC//PQ छ भने ΔBQR को क्षेत्रफल ΔABC को क्षेत्रफलको आधा हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



- (ण) दिइएको चित्रमा $AD//BC$ छन् । यदि ΔABE र ΔACF का क्षेत्रफलहरू बराबर छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $EF//AC$ ।



खुला प्रश्न

१. एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाबिच बनेका त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल बराबर, आधा, चौथाइ, तिहाइ ... हुने गरी चित्रहरू कोर्नुहोस् । ती चित्रहरूको नाप कति, कसरी, किन लिनुभयो ? तर्कसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

ग्राफ पेपर वा वर्गाङ्कित कागजमा फरक फरक रङ प्रयोग गरी एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बनेका,

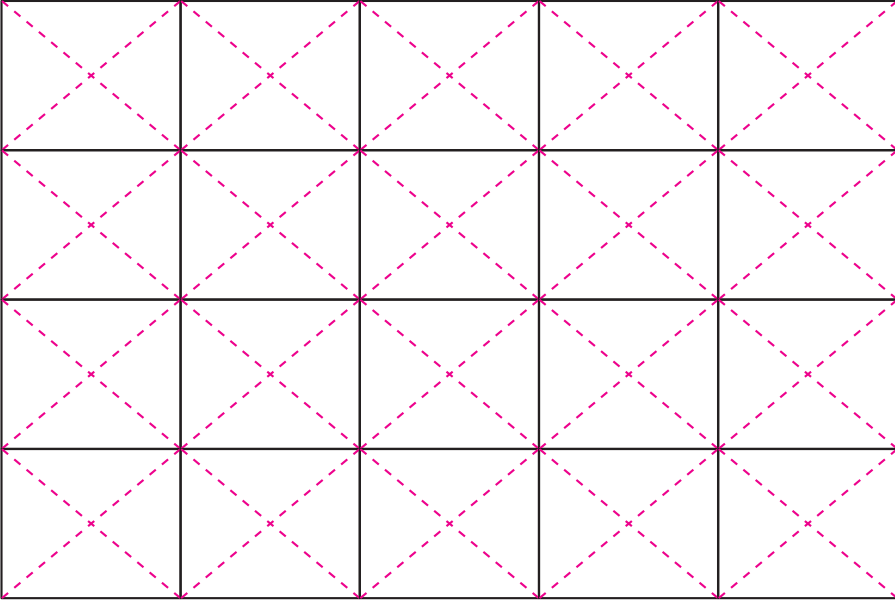
- (क) समानान्तर चतुर्भुजहरूको सम्बन्ध
- (ख) समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजको सम्बन्ध र
- (ग) त्रिभुजहरूको सम्बन्ध स्पष्ट देखिने गरी तयार पार्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| 1. (क) 24 cm^2 | (ख) 14 cm^2 | (ग) $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ |
| (घ) 37.5 cm^2 | (ङ) 42 sq.inch | (च) 24 cm^2 |
| 2. (क) 4 cm^2 | (ख) 96 cm^2 | (ग) 16 cm |
| (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् | (ङ) 48 cm^2 | |
| 3. (क) 108 cm^2 | (ख) 30 cm^2 | (ग) 48 cm^2 |
| (घ) 54 cm^2 | 4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । | |

11.0 पुनरवलोकन (Review)

वर्गाङ्कित कागजमा तल दिइए जस्तै चित्र बनाउनुहोस् । उक्त चित्रमा निम्नानुसारको अवस्था खोजी गरी छ्याँ पार्नुहोस् ।



- एक जोडा एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बन्ने बराबर क्षेत्रफल भएका समानान्तर चतुर्भुजहरू
- एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बन्ने एउटा स.च.र त्यसको क्षेत्रफलको ठिक आधा हुने एउटा त्रिभुज
- एक जोडा एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाहरूबिच बन्ने बराबर क्षेत्रफल भएका त्रिभुजहरू आफूले तयार पारको चित्रका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

11.1. बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज र चतुर्भुजको रचना (Construction of Triangle and Quadrilaterals with Equal Areas)

चरणहरू

- दिइएको अवस्थाको नमुना चित्र रूलर र सिसाकलमको प्रयोग गरी खिच्नुहोस् ।
- दिइएका मानहरूलाई नमुना चित्रमा भर्नुहोस् ।
- दिइएका अवस्था र भागहरूको नापका आधारमा कम्पास र रूलर प्रयोग गरी आवश्यक चरणहरू प्रयोग गरी रचना गर्ने र नामाकरण गर्ने ।

(क) बराबर क्षेत्रफल हुने समानान्तर चतुर्भुजहरूको रचना
(Construction of Parallelograms Equal in Area)

क्रियाकलाप 1

$AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 5.5 \text{ cm}$ र $\angle ABC = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ खिचौं र उक्त स.च. को क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी निम्नानुसारको स.च.को रचना गरौं ?

(अ) एउटा कोण 120° भएको स.च. $ABQP$

(आ) एउटा भुजा 6 cm भएको स.च. $ABQP$

(अ) एउटा कोण 120° भएको स.च. $ABQP$

(क) दिइएको अवस्थाका आधारमा स.च. $ABCD$ को नमुना चित्र खिची मानहरू भरौं ।

(ख) नमुना चित्रलाई आधार मानी $AB = 4 \text{ cm}$ खिचौं ।

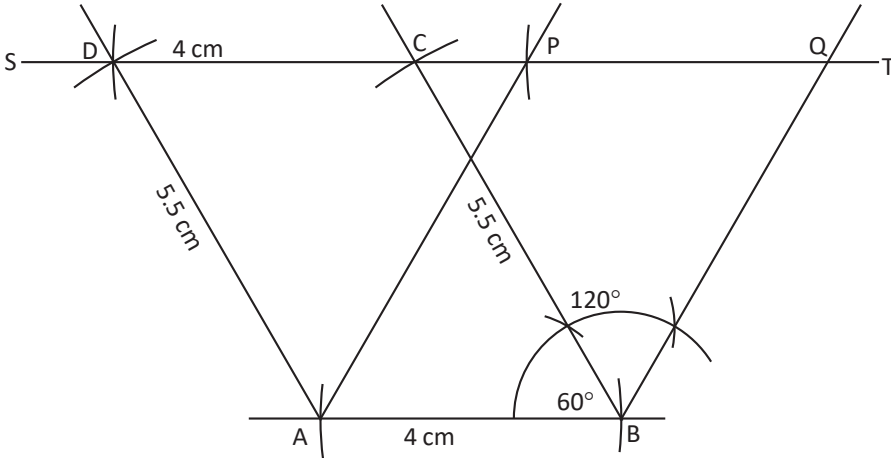
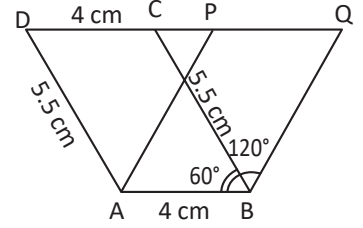
(ग) B मा 60° को कोण खिचौं, फेरि B बाट 5.5 cm अर्धव्यासको चापले 60° बनाउने रेखामा काटी C नाम दिऔं ।

(घ) अब A बाट 5.5 cm चाप र C बाट 4 cm को अर्धव्यासले काट्दा काटिएको स्थानलाई D नाम दिऔं ।

(ङ) अब D र C तथा A र D जोडौं । स.च. $ABCD$ तयार भयो ।

(च) DC लाई सिधा ST सम्म बढाऔं । बिन्दु B मा 120° को कोण खिची उक्त रेखाले ST मा भेट्ने बिन्दुलाई Q नाम दिऔं ।

(छ) Q बाट AB बराबरको चापले QS मा काटी P नाम दिई बिन्दु A र P जोडौं ।



यसरी बनेको स.च. $ABQP$ को क्षेत्रफल स.च. $ABCD$ को क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ, किन होला ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखाहरू AB//ST बिच बनेका स.च. ABCD र स.च. ABQP भएकाले क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

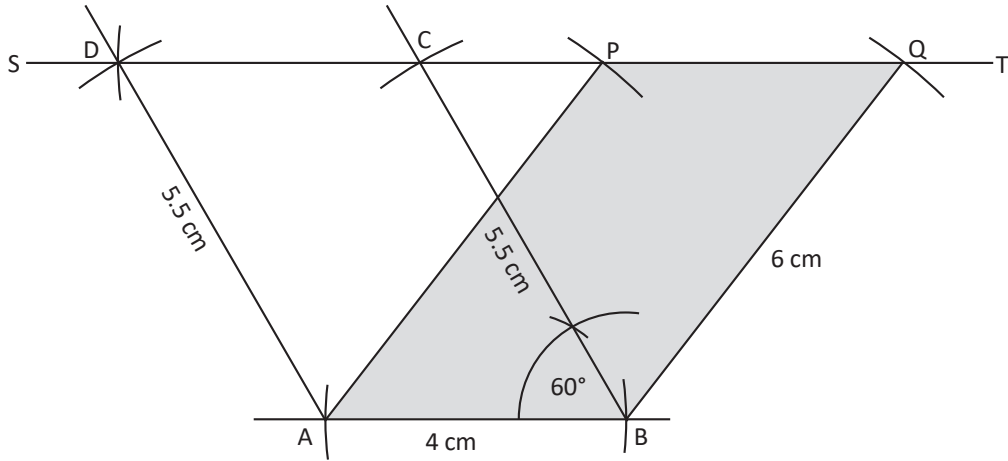
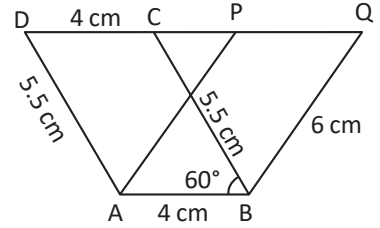
(आ) एउटा भुजा 6 cm भएको स.च. ABQP

(क) दिइएको अवस्थाका आधारमा स.च. ABCD को नमुना चित्र खिची मानहरू भरौं ।

(ख) $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 5.5 \text{ cm}$ र $\angle ABC = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज ABCD खिचौं CD लाई ST सम्म लम्ब्याऔं ।

(ग) बिन्दु A बाट 6 cm को अर्धव्यास ST मा चिह्न लगाऔं र P नाम दिऔं । फेरि सोही नापको अर्धव्यासका चापले बिन्दु B बाट ST मा T तर्फ चिह्न लगाई Q नाम दिऔं ।

(घ) रूलर र सिसाकलम प्रयोग गरी बिन्दुहरू A र P तथा B र Q जोडौं ।



यसरी बनेको स.च. ABQP र स.च. ABCD को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ, किन होला ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखाहरू AB//ST बिच बनेका स.च. ABCD र स.च. ABQP भएकाले क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

(ख) बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुजहरूको रचना (Construction of Triangles Equal in Area)

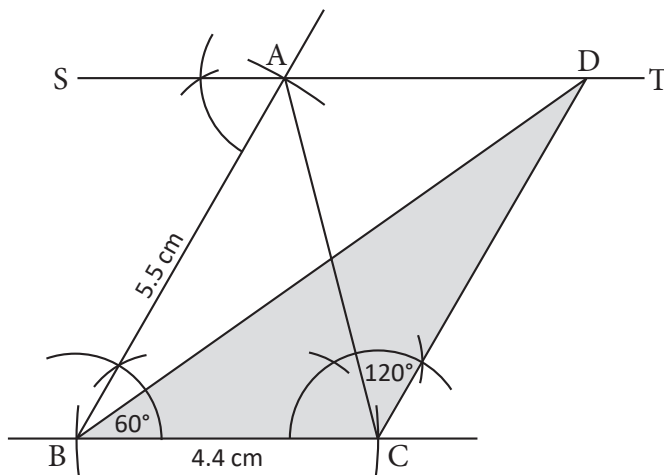
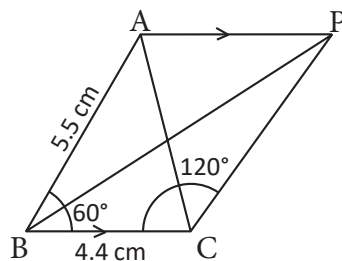
क्रियाकलाप 2

$\angle ABC = 60^\circ$, $BC = 4.4 \text{ cm}$ र $AB = 5.5 \text{ cm}$ भएको त्रिभुज ABC सँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी निम्नानुसारको त्रिभुज कसरी खिच्ने होला ?

- (१) एउटा कोण 120° भएको त्रिभुज $\triangle DBC$
- (२) एउटा भुजा 6.2 cm भएको त्रिभुज $\triangle DBC$

(१) एउटा कोण 120° भएको त्रिभुज $\triangle DBC$

- (अ) दिइएको अवस्थाका आधारमा त्रिभुज ABC को नमुना चित्र खिची मानहरू भरौं ।
- (आ) $BC = 4.4 \text{ cm}$, $\angle ABC = 60^\circ$ र $AB = 5.5 \text{ cm}$ भएको $\triangle ABC$ खिचौं ।
- (इ) बिन्दु A मा $\angle ABC = \angle BAS$ हुने गरी $BC \parallel ST$ खिचौं ।
- (ई) अब C मा 120° को कोण खिची उक्त रेखाले ST मा भेट्ने बिन्दुलाई D नाम दिऔं ।
- (उ) बिन्दु D र C जोडौं ।



यसरी बनेको $\triangle DBC$ को क्षेत्रफल $\triangle ABC$ को क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ, किन होला ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखा $BC \parallel ST$ मा बनेका त्रिभुजहरू भएकाले ।

(२) एउटा भुजा 6.2 cm भएको त्रिभुज $\triangle DBC$

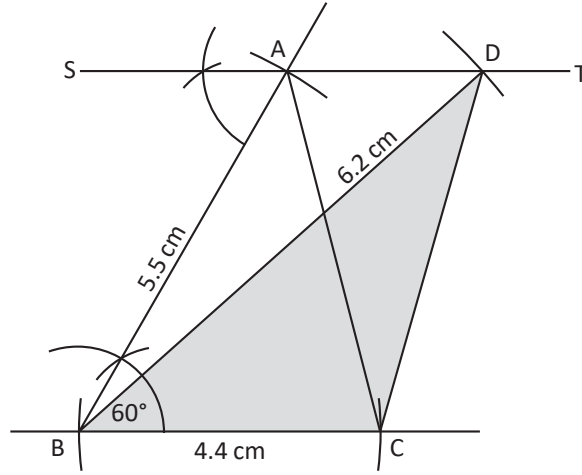
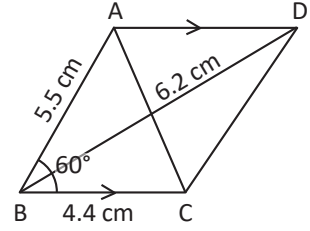
(क) दिइएको अवस्थाका आधारमा त्रिभुज ABC को नमूना चित्र खिची मानहरू भरौं ।

(ख) $BC = 4.4$ cm, $\angle ABC = 60^\circ$ र $AB = 5.5$ cm भएको $\triangle ABC$ खिचौं ।

(ग) बिन्दु A मा $\angle ABC = \angle BAS$ हुने गरी $BC \parallel ST$ खिचौं ।

(घ) अब 6.2 cm अर्धव्यासको चाप लिई B बाट ST मा काटौं । काटिएको बिन्दुलाई D नाम दिऔं ।

(ङ) बिन्दु D र C जोडौं ।



यसरी बनेको $\triangle DBC$ को क्षेत्रफल $\triangle ABC$ को क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ । किन होला ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

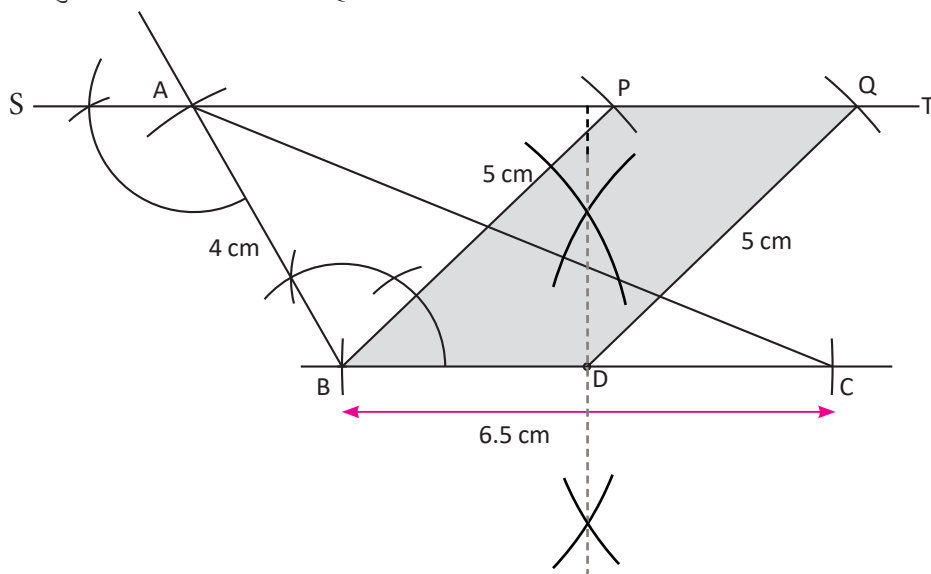
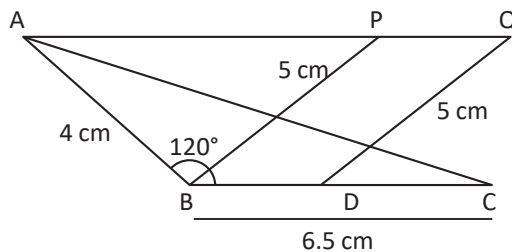
एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखा $BC \parallel ST$ मा बनेका त्रिभुजहरू भएकाले ।

(ग) बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज र समानान्तर चतुर्भुजको रचना (Construction of Triangles and Parallelograms Equal in Area)

क्रियाकलाप 3

$AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 6.5 \text{ cm}$ र $\angle ABC = 120^\circ$ भएको त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल बराबर हुने गरी एउटा भुजा $PB = 5 \text{ cm}$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $PBDQ$ को रचना कसरी गर्ने होला ?

- (क) दिइएको अवस्थाका आधारमा त्रिभुज ABC को नमुना चित्र खिची मानहरू भरौं ।
- (ख) $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 6.5 \text{ cm}$ र $\angle ABC = 120^\circ$ भएको एउटा त्रिभुज ABC खिचौं ।
- (ग) $\angle ABC = \angle BAS$ बनाई भुजा BC सँग समानान्तर हुने बिन्दु A बाट जाने रेखा ST खिचौं ।
- (घ) भुजा BC को मध्यबिन्दु D पत्ता लगाऔं । अब 5 cm अर्धव्यास भएको चाप लिएर बिन्दु B बाट ST मा चाप काटी P नाम दिऔं ।
- (ङ) D बाट BP बराबरको अर्धव्यासको चापले ST मा T तर्फ चिह्न लगाई Q नाम दिऔं । बिन्दुहरू B र P तथा D र Q जोडौं ।



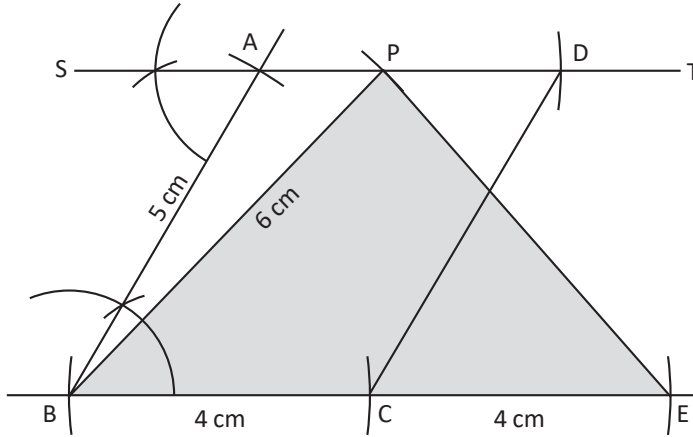
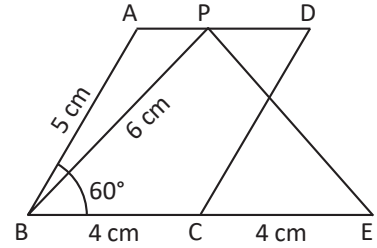
यसरी बनेको स.च. $PBDQ$ को क्षेत्रफल ΔABC को क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ, कसरी होला ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाबिच बनेका त्रिभुजको क्षेत्रफल स.च.को क्षेत्रफलको आधा हुन्छ । यदि स.च. आधा आधारमा बनाएमा त्रिभुजको क्षेत्रफल र स.च.को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

क्रियाकलाप 4

$AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ and $\angle ABC = 60^\circ$ भएको एउटा समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ खिचौं । उक्त स.च.सँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज PBE जसको एउटा भुजा $PB = 6 \text{ cm}$ को रचना कसरी गर्ने होला ?

- (क) दिइएको अवस्थाका आधारमा स.च. $ABCD$ को नमुना चित्र तयार गरी मानहरू भरौं ।
- (ख) $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ र $\angle ABC = 60^\circ$ भएको एउटा समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ खिचौं ।
- (ग) भुजा $BC = CE$ हुने गरी BC लाई E सम्म लम्ब्याऔं । BE सँग समानान्तर हुने बिन्दु A बाट जाने रेखा ST खिचौं ।
- (घ) $\angle ABC = \angle BAS$ हुने गरी BE सँग समानान्तर हुने रेखा ST खिचौं ।
- (ङ) बिन्दु B बाट 6 cm अर्धव्यासको नापले ST मा काटी काटिएको बिन्दुलाई P नाम दिऔं ।
- (च) बिन्दुहरू B र P तथा P र E जोडौं ।



यसरी बनेका त्रिभुज BPE हो जसको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ सँग बराबर हुन्छ, कसरी होला ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखाबिच बनेका स.च.को क्षेत्रफल त्रिभुजको दोब्बर हुन्छ । त्रिभुजको आधार स.च.को आधारको दोब्बर पादा बन्ने त्रिभुजको क्षेत्रफल स.च.को क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ ।

(घ) बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज र चतुर्भुजहरूको रचना (Construction of a Triangle and a Quadrilateral Equal in Area)

क्रियाकलाप 5

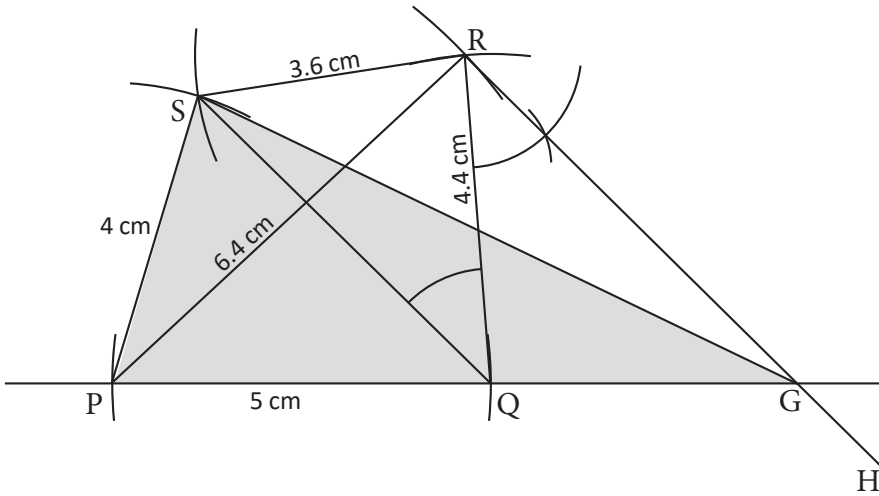
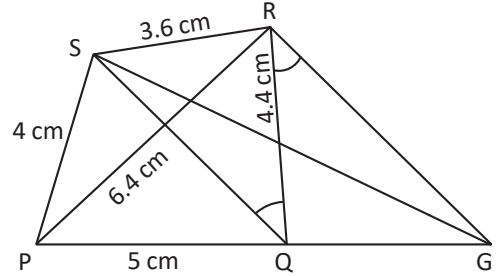
PQ = 5 cm, PS = 4 cm, QR = 4.4 cm RS= 3.6 cm र विकर्ण PR = 6.4 cm भएको एउटा चतुर्भुज PQRS खिची उक्त चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज PSG को रचना कसरी गर्ने होला ?

(क) दिइएको अवस्थाका आधारमा चतुर्भुज PQRS को नमुना चित्र तयार गरी मानहरू भरौं ।

(ख) PQ = 5 cm, PS = 4 cm, QR = 4.4 cm RS= 3.6 cm र विकर्ण PR = 6.4cm भएको एउटा चतुर्भुज PQRS खिचौं ।

(ग) विकर्ण SQ खिचौं ।

(घ) $\angle SQR = \angle QRH$ हुने गरी SQ सँग समानान्तर रेखा RH खिचौं । अब PQ लाई सिधा लम्ब्याएर RH सँग काटिएको बिन्दुलाई G नाम दिऔं । बिन्दुहरू S र G जोडौं ।



यसरी बनेको त्रिभुज PSG को क्षेत्रफल बराबर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ, कसरी होला ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

ΔSQR को क्षेत्रफल = ΔSQG को क्षेत्रफल

RH आधार र RG//SQ बिच बनेका त्रिभुज दुवैतर्फ ΔPSQ जोड्दा,

$(\Delta SQR + \Delta PSQ)$ को क्षेत्रफल = $(\Delta SQG + \Delta PSQ)$ को क्षेत्रफल

\therefore चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल = ΔPSG को क्षेत्रफल

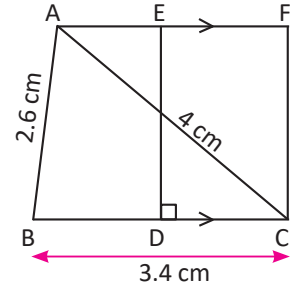
उदाहरण 1

$AB = 2.6 \text{ cm}$, $BC = 3.4 \text{ cm}$ and $CA = 4 \text{ cm}$ भएको एउटा त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् र उक्त त्रिभुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने आयतको रचना गर्नुहोस् ।

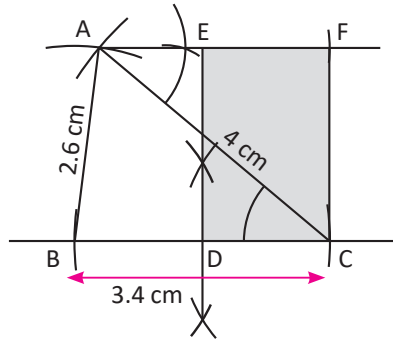
समाधान

यहाँ त्रिभुज ABC मा $AB = 2.6 \text{ cm}$, $BC = 3.4 \text{ cm}$ र $CA = 4 \text{ cm}$ छ ।

नमुना चित्र



आवश्यक आयत $CDEF$ हो जसको क्षेत्रफल त्रिभुज ABC सँग बराबर हुने गरी तल रचना गरिएको छ ।



अतः आवश्यक आयत $CDEF$ हो, जसको क्षेत्रफल त्रिभुज ABC को क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ ।

रचना गर्नुहोस् :

1. (a) भुजाहरू $AB = 4 \text{ cm}$, $AD = 6 \text{ cm}$ र $\angle BAD = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने र एउटा कोण 45° भएको समानान्तर चतुर्भुज रचना गर्नुहोस् ।
- (b) एउटा समानान्तर चतुर्भुजमा $AB = 5 \text{ cm}$, $AD = 6 \text{ cm}$ र विकर्ण $BD = 6 \text{ cm}$ छ । उक्त समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने र एउटा कोण 75° भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।
- (c) एउटा समानान्तर चतुर्भुजमा दुईथोटा विकर्णहरूको लम्बाइ क्रमशः 9 cm , 7 cm र तिनीहरूका बिचको कोण 30° छ । उक्त समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी एउटा विकर्ण 8 cm भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।
- (d) $AB = 5 \text{ cm}$, $AD = 6 \text{ cm}$ र विकर्ण $BD = 8 \text{ cm}$ भएको समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी स.च. $ABXY$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (e) $PQ = 4.2 \text{ cm}$, $QR = 6 \text{ cm}$ र $\angle PQR = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी स.च. को रचना गर्नुहोस् जसको एउटा कोण 30° हुन्छ ।
2. (a) $BC = 6.4 \text{ cm}$, $AB = 5.6 \text{ cm}$ र $AC = 6 \text{ cm}$ भएको त्रिभुज ABC सँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज रचना गर्नुहोस्, जसको एउटा भुजा 7 cm छ ।
- (b) $LM = 4.3 \text{ cm}$, $\angle NLM = 30^\circ$ र $\angle LMN = 45^\circ$ भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle OLM$ को रचना गर्नुहोस्, जसमा $OM = 7.5 \text{ cm}$ छ ।
- (c) $PQ = 4.5 \text{ cm}$, $QR = 7 \text{ cm}$ र $PR = 6 \text{ cm}$ भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी एउटा भुजाको लम्बाइ 8 cm भएको एउटा त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।
- (d) $AB = 4.2 \text{ cm}$, $BC = 5.2 \text{ cm}$ र $CA = 3.5 \text{ cm}$ भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने अर्को त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।
- (e) $AB = 7.2 \text{ cm}$, $BC = 5.9 \text{ cm}$ र $CA = 6.1 \text{ cm}$ भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने एउटा भुजा 8 cm भएको $\triangle MBC$ को रचना गर्नुहोस् ।
3. (a) $PQ = 6.5 \text{ cm}$, $QR = 6 \text{ cm}$ र $PR = 5.5 \text{ cm}$ भएको एउटा त्रिभुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\angle TSR = 75^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $RSTI$ रचना गर्नुहोस् ।
- (b) $\triangle ABC$ मा $AC = 5 \text{ cm}$, $BC = 4.8 \text{ cm}$ र $\angle ABC = 45^\circ$ छ । उक्त त्रिभुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने र एउटा भुजा $CD = 7.5 \text{ cm}$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $CDEF$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (c) $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 3.2 \text{ cm}$ र $AC = 3.5 \text{ cm}$ भएको $\triangle ABC$ को क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी $BE = 5 \text{ cm}$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $BXYE$ को रचना गर्नुहोस् ।

- (d) $XY = 4 \text{ cm}$, $YZ = 6.8 \text{ cm}$ र $ZX = 6.5 \text{ cm}$ भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने एउटा आयतको रचना गर्नुहोस् ।
- (e) $PQ = 7.1 \text{ cm}$, $\angle RPQ = 60^\circ$ र $PR = 5.7 \text{ cm}$ भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने एउटा भुजा 7.5 cm भएको स.च को रचना गर्नुहोस् ।
4. (a) $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 4.5 \text{ cm}$ र $\angle DAB = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle AEF$ को रचना गर्नुहोस्, जसमा $FE = 7.5 \text{ cm}$ छ ।
- (b) भुजाहरू $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ र $\angle BAD = 45^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ सँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी $\triangle APQ$ को रचना गर्नुहोस्, जसमा $\angle APQ = 60^\circ$ छ ।
- (c) $PQ = 5 \text{ cm}$, विकर्ण $PR = 6 \text{ cm}$ र विकर्ण $QS = 8 \text{ cm}$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $PQRS$ सँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।
- (d) $EF = 5 \text{ cm}$, $FG = 4 \text{ cm}$ र $\angle EFG = 120^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $EFGH$ को क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने एउटा त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।
- (e) $IJ = 5 \text{ cm}$, विकर्ण $IK = 6 \text{ cm}$ र $JL = 8 \text{ cm}$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $IJKL$ सँग बराबर क्षेत्रफल हुने एउटा त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।
5. (a) भुजाहरू $PQ = QR = 5.5 \text{ cm}$, $RS = SP = 4.5 \text{ cm}$ र $\angle SPQ = 75^\circ$ भएको चतुर्भुज $PQRS$ सँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle PST$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (b) $AB = 4.5 \text{ cm}$, $BC = 5.5 \text{ cm}$, $CD = 5.7 \text{ cm}$ र $DA = 4.9 \text{ cm}$ र विकर्ण $BD = 5.9 \text{ cm}$ भएको चतुर्भुज $ABCD$ को क्षेत्रफलसँग बराबर हुने $\triangle DAE$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (c) $PQ = 5 \text{ cm}$, $QR = 7 \text{ cm}$, $RS = 4.5 \text{ cm}$, $SP = 5.4 \text{ cm}$ र $QS = 6.5 \text{ cm}$ भएको चतुर्भुज $PQRS$ को बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle QRT$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (d) समबाहु चतुर्भुज $PQRS$ को रचना गर्नुहोस्, जसमा विकर्णहरू $PR = 6 \text{ cm}$ र $QS = 8 \text{ cm}$ छन् । सो समबाहु चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle PSA$ को रचना गर्नुहोस् ।
- (e) 6 cm लम्बाइ र 4.5 cm चौडाइ भएको आयतको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने एउटा कोण 60° भएको त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

पाँच पाँच जनाको समूह निर्माण गर्नुहोस् । बाँसका सिन्का, छ्वाली वा जुस पाइपको प्रयोग गरी सबै समूहले माथिका प्रत्येक रचनाको एक एकओटा नमुना निर्माण गरी कार्डबोर्डमा टाँसी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

12.0 पुनरवलोकन (Review)

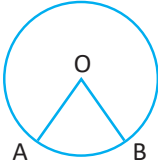
दिइएका कथनलाई प्रयोगात्मक रूपमा पुष्टि गर्नुहोस् :

- वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट कुनै जीवामा रेखित लम्बले त्यस जीवालाई समद्विभाजन गर्छ ।
- वृत्तको केन्द्रबिन्दु र त्यसको कुनै जीवाको मध्यबिन्दु जोड्ने रेखा उक्त जीवामा लम्ब हुन्छ ।
- कुनै वृत्तका दुई बराबर जीवा केन्द्रबिन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्छन् ।
- वृत्तको केन्द्रबिन्दुबाट बराबर दुरीमा रहेका जीवाहरू बराबर हुन्छन् ।

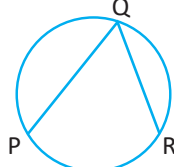
12.1 केन्द्रीय कोण र परिधि कोण (Central Angle and Inscribed Angle)

क्रियाकलाप 1

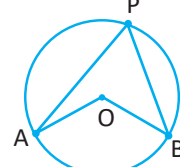
दिइएका वृत्तहरूको अवलोकन गर्नुहोस् । वृत्तको केन्द्र O छ । यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

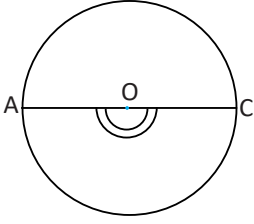
- $\angle AOB$ कहाँ बनेको छ ? यसलाई के भनिन्छ ।
- $\angle PQR$ कहाँ बनेको छ ? यसलाई के भनिन्छ ?
- $\angle AOB$ र $\angle PQR$ बिच के फरक छ ? तुलना गर्नुहोस् ।
- चित्र (ग) मा चाप APB र चाप AB लाई के के भनिन्छ ?

- दुईओटा अर्धव्यासले केन्द्रमा बनाएको कोणलाई केन्द्रीय कोण भनिन्छ । चित्रमा $\angle AOB$ लाई केन्द्रीय कोण हो ।
- वृत्तका दुईओटा जीवाहरू परिधिमा जोडिएर बनेको कोणलाई परिधिको कोण भनिन्छ । चित्रमा $\angle PQR$ लाई परिधिको कोण हो ।
- कुनै चाप अर्ध वृत्तभन्दा सानो भएमा न्यून चाप (Minor arc) र अर्ध वृत्तभन्दा ठुलो भएमा बृहत चाप (Major arc) भनिन्छ । यहाँ \widehat{APB} बृहत चाप र \widehat{AB} न्यून चाप हुन् ।

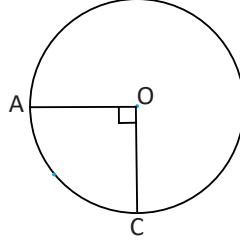
12.2 केन्द्रीय कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध (Relation between central angle and its corresponding arc)

क्रियाकलाप 2

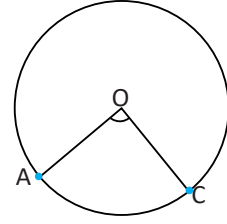
कम्पासको प्रयोग गरी केन्द्रबिन्दु 'O' भएका वृत्तरू बनाउनुहोस् । जसमा केन्द्रीय कोण र सम्मुख चापबिचको सम्बन्धका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :



चित्र नं. 1



चित्र नं. 2



चित्र नं. 3

- (क) केन्द्रीय कोण 180° हुँदा त्यसको सम्मुख चाप उक्त परिधिको कति भाग हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।
- (ख) केन्द्रीय कोण एक वृत्तको एक चौथाई हुँदा, त्यसको सम्मुख चाप उक्त परिधिको कति भाग हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।
- (ग) केन्द्रीय कोण एक वृत्तको $\frac{1}{6}$ भागमा हुँदा त्यसको सम्मुख चाप उक्त परिधिको कति भाग हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।
- (घ) के केन्द्रीय कोण र सम्मुख चापबिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध छ ?

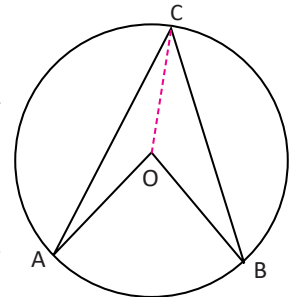
$\angle AOC \cong \widehat{AOC}$ लाई चाप AC को डिग्रीमा नाप भनी पढ्ने गरिन्छ । केन्द्रीय कोण र सम्मुख चापबिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध हुन्छ । यहाँ सङ्केत \cong अथवा \cong लाई समप्रभावी (Equal influence) भनेर पनि पढ्ने गरिन्छ ।

12.3 परिधि कोण र सम्मुख चापको सम्बन्ध (Relation between Inscribed Angle and its Corresponding Arc)

क्रियाकलाप 3

सिसाकलम र कम्पासको प्रयोग गरी केन्द्रबिन्दु 'O' भएको वृत्त खिचौं । जहाँ केन्द्रीय कोण AOB र परिधि कोण ACB छन् । O र C जोड्नुहोस् । एउटै वृत्तका अर्धव्यासहरू OA, OB र OC बराबर हुन्छन् ?

अब त्रिभुज OAC र त्रिभुज OBC कस्ता त्रिभुज हुन् ? यी त्रिभुजका कुन कुन भुजाहरू र कोणहरू बराबर हुन्छन्, छलफल गर्नुहोस् ।



अब समद्विबाहु त्रिभुज OAC मा,

$$\angle OAC + \angle OCA + \angle AOC = 180^\circ$$

अथवा, $2\angle OCA = 180^\circ - \angle AOC$ (i) [$\angle OAC = \angle OCA$]

फेरि समद्विबाहु त्रिभुज OBC मा,

$$\angle OCB + \angle OBC + \angle BOC = 180^\circ$$

अथवा, $2\angle OCB = 180^\circ - \angle BOC$ (ii) [$\angle OCB = \angle OBC$]

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा,

$$2(\angle OCA + \angle OCB) = 360^\circ - (\angle AOC + \angle BOC)$$

अथवा, $2\angle ACB = 360^\circ - \text{वृहत } \angle AOB$

अथवा, $2\angle ACB = \angle AOB$

अथवा, $2\angle ACB \cong \widehat{AB}$

परिधिको कोणको दोब्बर र सम्मुख चापबिचको सम्बन्ध समप्रभावी हुन्छ । यसलाई सङ्केतमा $2\angle ACB \cong \widehat{AB}$ ले जनाइन्छ ।

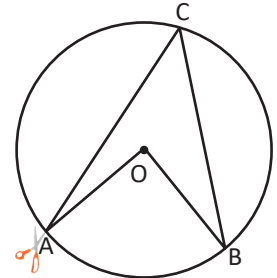
12.4 एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण र परिधि कोणको सम्बन्ध (Relation between Central Angle and Inscribed Angle)

(क) एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण र परिधिको कोणको सम्बन्ध

क्रियाकलाप 4

(अ) कागज प्रयोग गरेर

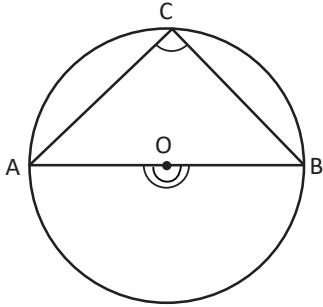
चार्ट पेपरमा चित्रमा देखाए जस्तै वृत्तमा केन्द्रीय कोण र परिधिको कोण खिच्नुहोस् । केन्द्रीय कोणलाई कैंचीले काटेर निकाल्नुहोस् । अब केन्द्रीय कोणलाई दुई बराबर भागमा हुने गरी पट्याएर परिधिको कोण नाप्नुहोस् र निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।



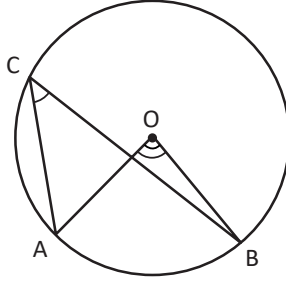
एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण परिधिको कोणको दोब्बर हुँदो रहेछ । $\angle AOB = 2\angle ACB$

(आ) प्रयोगात्मक परीक्षण

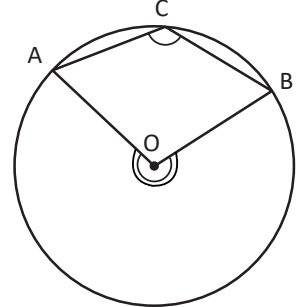
चित्रमा देखाइए जस्तै फरक फरक अर्धव्यास भएका वृत्तहरू खिच्नुहोस् ।



चित्र नं. 1



चित्र नं. 2



चित्र नं. 3

प्रत्येक वृत्तको चाप AB मा आधारित केन्द्रीय कोण AOB र परिधिको कोण ACB को नाप लिई तलको तालिकामा भरौं :

| चित्र नं. | $\angle AOB$ | $\angle ACB$ | नतिजा |
|-----------|--------------|--------------|-------|
| 1. | | | |
| 2. | | | |
| 3. | | | |

निष्कर्ष :

(इ) सैद्धान्तिक प्रमाण

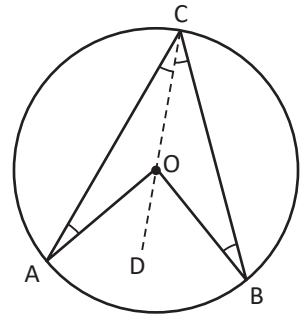
साध्य 1

एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण परिधिको कोणको दोब्बर हुन्छ ।

थाहा दिइएको : केन्द्र बिन्दु O भएको वृत्त छ । जसमा केन्द्रीय कोण $\angle AOB$ र परिधिको कोण $\angle ACB$ एउटै चाप AB मा आधारित भएका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle AOB = 2 \angle ACB$

रचना : बिन्दुहरू C र O लाई जोडी बिन्दु D सम्म लम्ब्याउनुहोस् ।



प्रमाण

| | तथ्य | कारण |
|---|--|--|
| 1. | ΔAOC मा, (i) $\angle OAC = \angle OCA$ (ii) $\angle AOC = \angle OAC + \angle OCA$ (iii) $\angle AOC = 2\angle OCA$ | (i) OA र OC वृत्तका अर्धव्यासहरू भएकाले (ii) ΔAOC मा CO लाई लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरी कोण (iii) तथ्य 1 (i) र (ii) बाट |
| 2. | ΔBOC मा $\angle BOC = 2\angle OCB$ | माथिको जस्तै गरी |
| 3. | $\angle AOC + \angle BOC = 2\angle OCA + 2\angle OCB$ | तथ्य 1 (iii) र 2 बाट |
| 4. | $\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$ | सिङ्गो टुक्रे तथ्यअनुसार |
| निष्कर्ष : एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण परिधि कोणको दोब्बर हुन्छ । | | |

प्रमाणित भयो ।

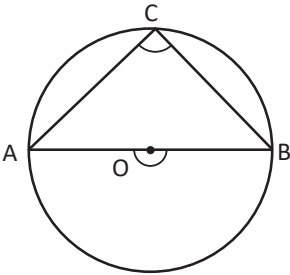
एउटै चापमा आधारित परिधि कोणको मान केन्द्रीय कोणको आधा हुन्छ । अर्थात्, केन्द्रीय कोण परिधि कोणको दुई गुणा हुन्छ, जस्तै: माथिको चित्रमा $\angle AOB = 2\angle ACB$

क्रियाकलाप 5

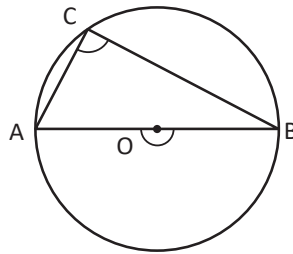
अर्धवृत्तमा बनेको परिधि कोण एक समकोण हुन्छ भनी कसरी देखाउने होला ?

(अ) प्रयोगात्मक परीक्षण

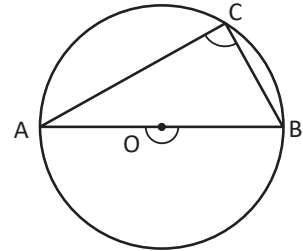
चित्रमा देखाइए जस्तै फरक फरक अर्धव्यास भएका वृत्तहरू खिच्नुहोस् । वृत्तको व्यासमा आधारित गरी परिधि कोण $\angle ACB$ छ । तलको तालिकामा $\angle ACB$ को मान राखी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।



चित्र नं. 1



चित्र नं. 2



चित्र नं. 3

प्रत्येक वृत्तको अर्धवृत्तमा बनेका परिधिको कोण $\angle ACB$ को नाप लिई तलको तालिकामा भरौं ।

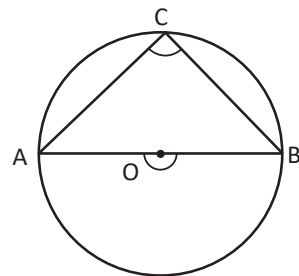
| चित्र नं. | $\angle ACB$ | परिणाम |
|------------|--------------|--------|
| 1. | | |
| 2. | | |
| 3. | | |
| निष्कर्ष : | | |

(आ) सैद्धान्तिक प्रमाण

थाहा दिइएको : केन्द्र बिन्दु O भएको वृत्त छ । जसमा AOB वृत्तको व्यास हो । $\angle ACB$ व्यासमा आधारित परिधिको कोण हो ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle ACB = 90^\circ$

प्रमाण :



| | तथ्य | कारण |
|----|--|---|
| 1. | $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ | परिधिको कोण केन्द्रीय कोणको आधा हुन्छ । |
| 2. | $\angle AOB = 180^\circ$ | $\angle AOB$ सिधाकोण भएकाले |
| 3. | $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ | तथ्य (1) र (2) बाट |

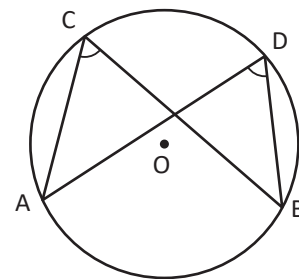
तसर्थ अर्धवृत्तमा बनेको परिधिको कोण एक समकोण हुन्छ ।

प्रमाणित भयो

(ख) एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरूबिचको सम्बन्ध

क्रियाकलाप 6

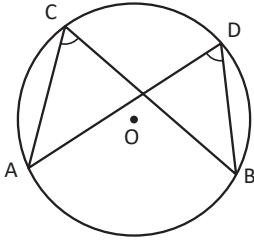
(अ) **कागजको प्रयोगबाट :** चार्ट पेपरमा चित्रमा देखाइए जस्तै गरी वृत्तमा दुईओटा परिधिका कोणहरू खिचनुहोस् । कैंचीको सहायताले एउटा परिधिको कोणलाई काटेर अर्को कोणमा खप्ट्याउनुहोस् । यसका आधारमा निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।



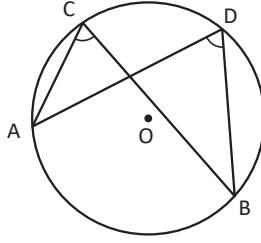
एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू बराबर हुने रहेछन् । $\angle ACB = \angle ADB$

(आ) प्रयोगात्मक परीक्षण

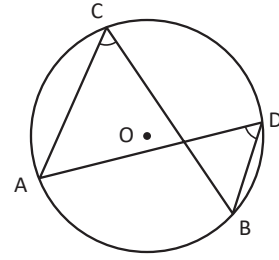
चित्रमा देखाइए जस्तै फरक फरक नाप भएका वृत्तरूमा एउटै चापमा आधारित परिधिको कोणहरू खिचनुहोस् ।



चित्र नं. 1



चित्र नं. 2



चित्र नं. 3

प्रत्येक वृत्तको चाप AB मा आधारित परिधिका कोण ACB र ADB को नाप लिई तलको तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष पनि लेख्नुहोस् :

| चित्र नं. | $\angle ACB$ | $\angle ADB$ | नतिजा |
|-----------|--------------|--------------|-------|
| 1. | | | |
| 2. | | | |
| 3. | | | |
| निष्कर्ष: | | | |

(आ) सैद्धान्तिक प्रमाण

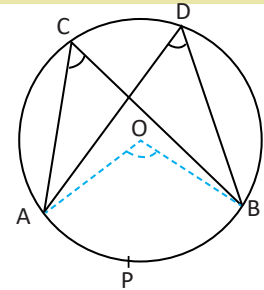
साध्य 2

एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

थाहा दिइएको : केन्द्र बिन्दु O भएको एउटा वृत्त छ । जसमा $\angle ACB$ र $\angle ADB$ चाप APB मा आधारित भएका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle ACB = \angle ADB$

रचना : वृत्तको केन्द्र O लाई बिन्दुहरू A र B सँग क्रमैसँग जोडौं ।



प्रमाण

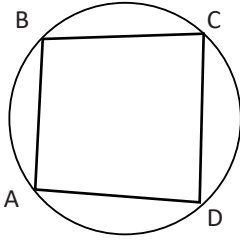
| | तथ्य | प्रमाण |
|---|--|---|
| 1. | $\angle AOB = 2\angle ACB$ | एउटै चाप APB मा परिवेष्टित परिधिको कोण |
| 2. | $\angle AOB = 2\angle ADB$ | एउटै चाप APB मा आधारित परिधिको कोण र केन्द्रीय कोण भएकाले |
| 3. | $2\angle ACB = 2\angle ADB$ अथवा, $\angle ACB = \angle ADB$ | तथ्य (1) र (2) बाट |
| तसर्थ कुनै पनि वृत्तको एउटै चापमा आधारित परिधिका कोणहरू बराबर हुन्छन् । | | |

प्रमाणित भयो ।

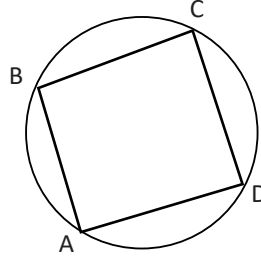
12.5 चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरूबिचको सम्बन्ध (Relation between Opposite Angles of a Cyclic Quadrilateral)

(अ) प्रयोगात्मक परीक्षण

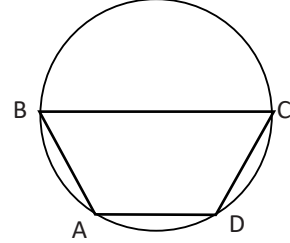
चित्रमा देखाइए जस्तै फरक फरक अर्धव्यास भएका वृत्तहरू खिच्नुहोस् । प्रत्येक वृत्तमा चक्रीय चतुर्भुज ABCD खिच्नुहोस् ।



चित्र नं. 1



चित्र नं. 2



चित्र नं. 3

वृत्तमा बनेका परिधिका कोणहरूको नाप तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष पनि लेख्नुहोस् :

| चित्र नं. | $\angle DAB$ | $\angle ABC$ | $\angle BCD$ | $\angle ADC$ | $\angle DAB + \angle BCD$ | $\angle ABC + \angle ADC$ | नतिजा |
|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------------------|---------------------------|-------|
| 1. | | | | | | | |
| 2. | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | |
| निष्कर्ष : | | | | | | | |

(आ) सैद्धान्तिक प्रमाण

साध्य 3

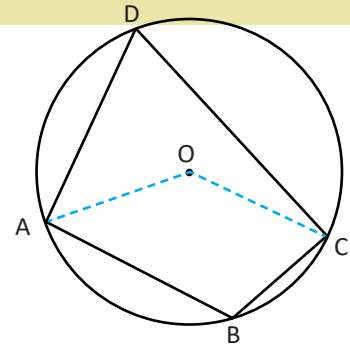
चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।

थाहा दिइएको : केन्द्र बिन्दु O भएको एउटा वृत्त छ । ABCD चक्रीय चतुर्भुज हो ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$

रचना : वृत्तको केन्द्र O लाई बिन्दुहरू A र C सँग क्रमैसँग जोडौं ।



प्रमाण

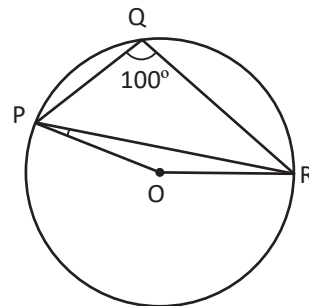
| | तथ्य | प्रमाण |
|----|------------------------------------|--|
| 1. | अधिककोण $\angle AOC = 2\angle ADC$ | एउटै चाप ABC मा आधारित केन्द्रीय कोण र परिधिको कोण |

| | | |
|--|---|---|
| 2. | बृहत्कोण $\angle AOC = 2\angle ABC$ | एउटै चाप ADC मा आधारित केन्द्रीय कोण र परिधिको कोण |
| 3. | $2\angle ADC + 2\angle ABC = \text{अधिककोण AOC} + \text{बृहत्कोण AOC}$ अथवा, $2(\angle ADC + \angle ABC) = 360^\circ$ अथवा, $\angle ADC + \angle ABC = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ $\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ | तथ्य (1) र (2) बाट बिन्दु O को वरिपरी बनेको कोणको जोड 360° हुन्छ। |
| 4. | यसै गरी $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$ | माथिको जस्तै गरी |
| तसर्थ चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुन्छन्। | | |

प्रमाणित भयो।

उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा $\angle PQR = 100^\circ$ र O केन्द्रबिन्दु भएको वृत्तको परिधिमा बिन्दुहरू P, Q र R छन् भने $\angle OPR$ को मान कति हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस्।



समाधान

चित्रअनुसार,

$$\text{बृहत् कोण } \angle POR = 2 \times \angle PQR = 2 \times 100^\circ = 200^\circ$$

[\therefore चाप PR मा आधारित केन्द्रीय र परिधि कोणहरू]

बृहत् कोण $\angle POR + \text{अधिककोण } \angle POR = 360^\circ$ [\therefore बिन्दु O को वरिपरी बनेका कोणहरू]

$$200^\circ + \angle POR = 360^\circ$$

$$\angle POR = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$$

फेरि $\triangle POR$ समद्विबाहु त्रिभुज हो। तसर्थ, $\angle OPR = \angle ORP$

$$\angle OPR + \angle ORP + \angle POR = 180^\circ \quad [\therefore \text{त्रिभुजका तीन कोणहरूको योगफल}]$$

$$\text{अथवा, } \angle OPR + \angle OPR + 160^\circ = 180^\circ \quad [\therefore \angle OPR = \angle ORP]$$

$$\text{अथवा, } 2\angle OPR = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

$$\text{अथवा, } \angle OPR = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

उदाहरण 2

सँगैको चित्रमा $\angle ABC = 74^\circ$ र $\angle ACB = 30^\circ$ भए $\angle BDC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

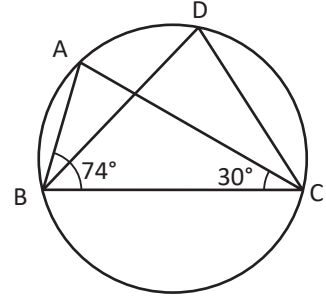
समाधान

यहाँ त्रिभुज ABC मा $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

$$\text{अथवा, } 74^\circ + 30^\circ + \angle BAC = 180^\circ$$

$$\text{अथवा, } 104^\circ + \angle BAC = 180^\circ$$

$$\text{अथवा, } \angle BAC = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$$



फेरि $\angle BAC = \angle BDC = 76^\circ$ [\because एउटै चाप BC मा आधारित परिधिमा कोणहरू]

$$\therefore \angle BDC = 76^\circ$$

उदाहरण 3

सँगैको चित्रमा A, B, C र D वृत्तका चार बिन्दुहरू हुन् । जीवाहरू AC र BD बिन्दु E मा प्रतिच्छेदित भएका छन् । यदि $\angle BEC = 130^\circ$ र $\angle ECD = 20^\circ$ भए $\angle BAC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ $\angle BEC = 130^\circ$ र $\angle ECD = 20^\circ$

$$\angle BEC + \angle CED = 180^\circ \quad [\text{सिधा कोण}]$$

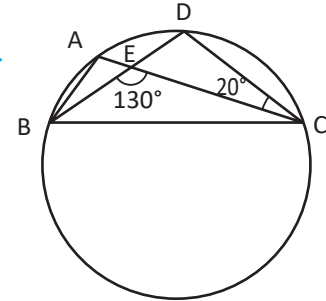
$$\text{अथवा, } \angle CED = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

फेरि $\angle EDC + \angle CED + \angle ECD = 180^\circ$ [त्रिभुजका तीन कोणहरू]

$$\text{अथवा, } \angle EDC = 180^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 110^\circ$$

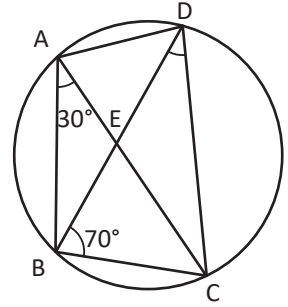
$$\text{अथवा, } \angle EDC = \angle BAC \quad [\text{एउटै चाप BC मा आधारित परिधि कोणहरू}]$$

$$\text{अथवा, } \angle BAC = 110^\circ$$



उदाहरण 4

चक्रीय चतुर्भुज ABCD मा विकर्णहरू AC र BD बिन्दु E मा काटिएका छन्। यदि $\angle DBC = 70^\circ$ र $\angle BAC = 30^\circ$ भए $\angle BCD$ को मान पत्ता लगाउनुहोस्। साथै, यदि $AB = BC$ भए $\angle ECD$ को मान कति होला ?



समाधान

यहाँ चक्रीय चतुर्भुज ABCD मा विकर्णहरू AC र BD बिन्दु E मा काटिएका छन्।

$$\angle DAC = \angle DBC = 70^\circ \quad [\text{एउटै चाप CD मा आधारित परिधिकोणहरू}]$$

$$\angle DAB = \angle DAC + \angle BAC = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ$$

फेरि $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$ [चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू]

$$\text{अथवा, } \angle BCD + 100^\circ = 180^\circ$$

$$\text{अथवा, } \angle BCD + 100^\circ = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

फेरि $AB = BC$ भएकाले $\angle BAC = \angle ACB = 30^\circ$ हुन्छ।

$$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 80^\circ$$

$$\text{अथवा, } 30^\circ + \angle ACD = 80^\circ$$

$$\text{अथवा, } \angle ACD = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$$

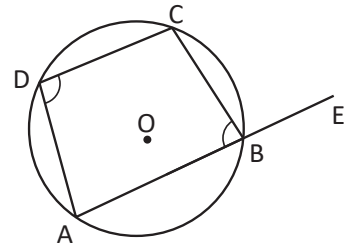
$$\therefore \angle ECD = 50^\circ$$

उदाहरण 5

दायाँको चित्रमा ABCD चक्रीय चतुर्भुज हो। AB लाई सिधा E सम्म बढाइएको छ भने $\angle ADC = \angle CBE$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

थाहा दिइएको : केन्द्र बिन्दु भएको वृत्तमा चक्रीय चतुर्भुज ABCD छ। चक्रीय चतुर्भुजको AB भुजालाई बिन्दु E सम्म लम्ब्याइएको छ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle ADC = \angle CBE$



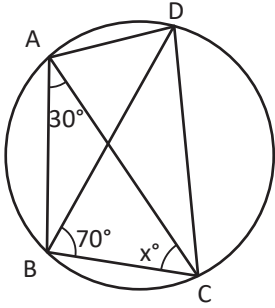
प्रमाण

| | तथ्य | कारण |
|----|--|--|
| 1. | $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ | चक्रीय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरूको यो गुण |
| 2. | $\angle ABC + \angle CBE = 180^\circ$ | सरलकोण भएकाले |
| 3. | $\angle ADC + \angle ABC = \angle ABC + \angle CBE$ अथवा, $\angle ADC = \angle CBE$ | तथ्य (1) र (2) बाट |

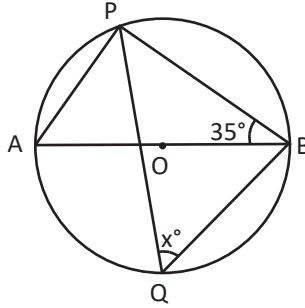
प्रमाणित भयो।

अभ्यास 12

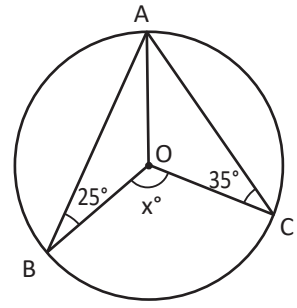
1. तलका वृत्तरूमा केन्द्रबिन्दु O छ भने x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



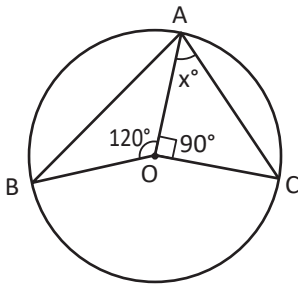
(क)



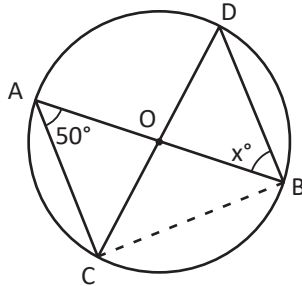
(ख)



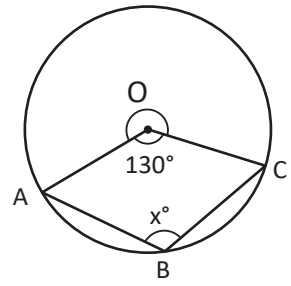
(ग)



(घ)

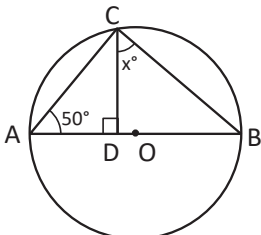


(ङ)

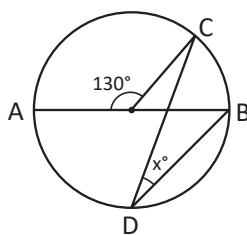


(च)

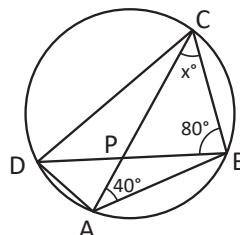
2. तलका चित्रहरूमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



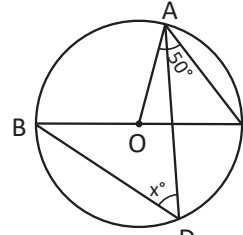
(क)



(ख)

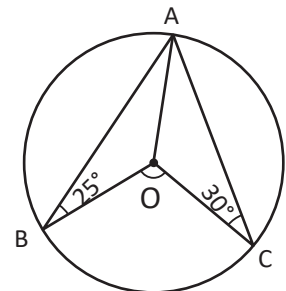


(ग)

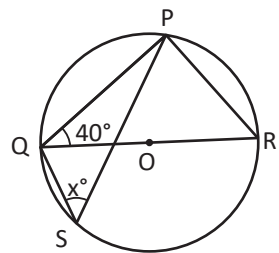


(घ)

3. (क) सँगैका चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु हो । $\angle OBA = 25^\circ$ र $\angle OCA = 30^\circ$ भए $\angle BOC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



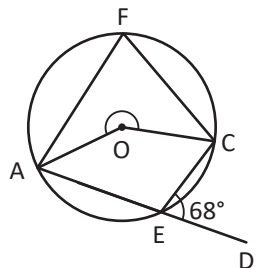
- (ख) सँगैका चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु हो । यदि $\angle PQR = 40^\circ$ र $\angle PSQ = x^\circ$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



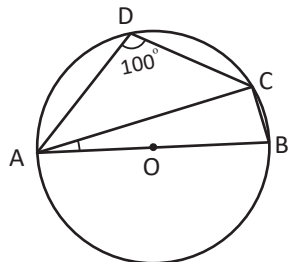
- (ग) दिइएको चित्रमा, O वृत्तको केन्द्र बिन्दु हो । $FAEC$ एउटा चक्रीय चतुर्भुज हो, यदि $\angle CED = 68^\circ$ छ भने

(अ) $\angle AFC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

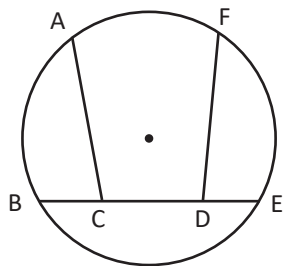
(आ) बृहत् कोण $\angle AOC$



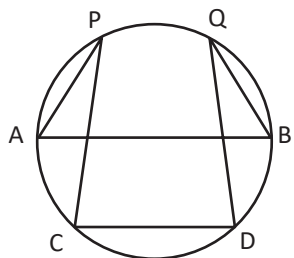
- (घ) दिइएको चित्रमा AOB वृत्तको व्यास हो । यदि $\angle ADC = 100^\circ$ भए $\angle BAC$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



- 4.(क) सँगैको चित्रमा $BC = DE$ र $\widehat{AB} = \widehat{FE}$ भए $\angle ACB = \angle FDE$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

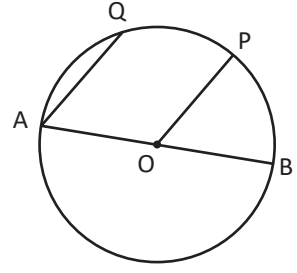


- (ख) दिइएको चित्रमा यदि $\angle APC = \angle BQD$ छ भने $AB \parallel CD$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



(ग) सँगैको चित्रमा O वृत्तको केन्द्र हो ।

यदि चाप $PQ =$ चाप PB भए $AQ \parallel OP$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

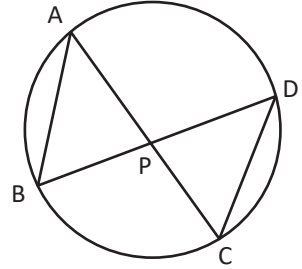


(घ) दिइएको चित्रमा जीवा AC र BD परस्परमा बिन्दु P मा काटिएका छन् । यदि $PB = PC$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।

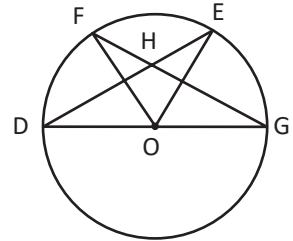
(अ) जीवा $AB =$ जीवा DC

(आ) जीवा $AC =$ जीवा BD

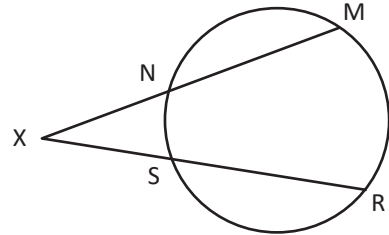
(इ) चाप $ABC =$ चाप BCD



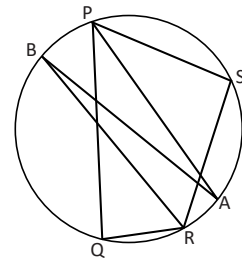
5. चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु हो । यदि जीवाहरू DE र FG बिन्दु H मा प्रतिच्छेदन भएका छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $\angle DOF + \angle EOG = 2\angle EHG$



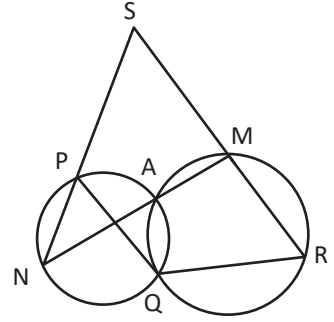
6. दिइएको चित्रमा वृत्तका जीवाहरू MN र RS बाह्य बिन्दु X मा काटिएका छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $\angle MXR = \frac{1}{2}(\widehat{MR} - \widehat{NS})$



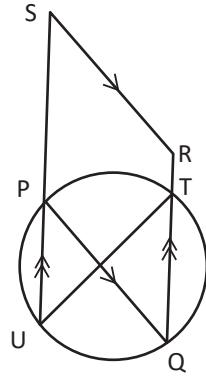
7. PQRS एउटा चक्रीय चतुर्भुज हो । यदि $\angle QPS$ र $\angle QRS$ वा अर्धकहरूले वृत्तलाई क्रमशः बिन्दुहरू A र B मा भेट्छन् भने AB वृत्तको व्यास हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



8. दिइएको चित्रमा NPS, MAN र RMS सरल रेखाहरू हुन् भने PQRS एउटा चक्रीय चतुर्भुज हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



9. दिइएको चित्रमा PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज भए UTRS एउटा चक्रीय चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



प्रयोगात्मक कार्य तथा परियोजना कार्य

- केन्द्रीय कोण र परिधि कोणको सम्बन्ध र तिनीहरूसँग सम्बन्धित चाप तथा जीवाहरूको सम्बन्ध प्रस्तुत गर्ने गरी कागजका मोडेलहरू बनाउनुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- केन्द्रहरू क्रमशः X र Y भएका तीन जोडा बराबर वृत्तहरू ABP र CDQ खिच्नुहोस् । बराबर चापहरू AB र CD बनाई जीवाहरू AB र CD जोड्नुहोस् । AB र CD नाप्नुहोस् र आएको नतिजालाई तालिकामा भर्नुहोस् ।

के जीवा $AB =$ जीवा CD छ ?

के जीवा AB र CD ले केन्द्रमा बनाएका कोणहरू बराबर छन् ?

के जीवा AB ले वृत्तको परिधिमा बनाएको कोण केन्द्रीय कोणको आधा छ । यस कार्यका लागि मसिनो धागा/तार र ट्रेसिङ पेपरको प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

उत्तर

- (क) 80° (ख) 55° (ग) 120° (घ) 75° (ङ) 50° (च) 115°
- (क) 50° (ख) 25° (ग) 60° (घ) 50°
- (क) 110° (ख) 50° (ग) (अ) 68° (आ) 224° (घ) 10°

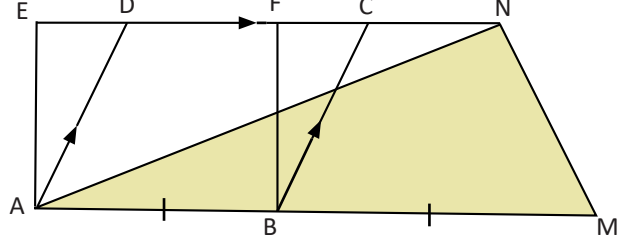
4 देखि 9 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

1. दिइएको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुज ABCD र एउटा आयत ABFE हो,

(क) समानान्तर चतुर्भुज ABCD र आयत ABFE को क्षेत्रफलमा के सम्बन्ध हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) दिइएको चित्रमा $AB = BM$ छ भने

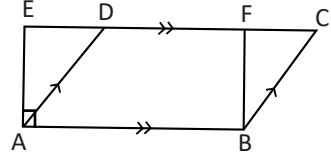
समानान्तर चतुर्भुज ABCD र त्रिभुज AMN बिचको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।



2. एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखाहरू AB र EC का बिचमा एउटा समानान्तर चतुर्भुज ABCD र एउटा आयत ABFE रहेको छ ।

(क) समानान्तर चतुर्भुज ABCD र आयत ABFE को क्षेत्रफलबिचमा के सम्बन्ध हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) यदि आयत ABFE को क्षेत्रफल 35 cm^2 भए समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



(ग) भुजा $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ र $\angle ABC = 120^\circ$ हुने समानान्तर चतुर्भुज ABCD को रचना गरी उक्त समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने आयत ABFE को रचना गर्नुहोस् ।

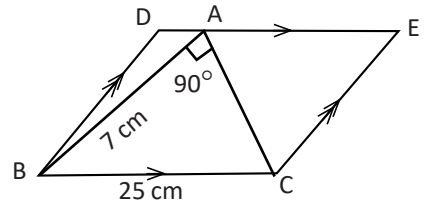
(घ) के त्रिभुज AED र त्रिभुज BFC अनुरूप हुन्छन्, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

3. एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरू BC र DE का बिचमा एउटा समानान्तर चतुर्भुज BCED र त्रिभुज ABC बनेको छ । जहाँ $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 7 \text{ cm}$ र $BC = 25 \text{ cm}$ छ ।

(क) AC को नाप कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) समानान्तर चतुर्भुज BCED को क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

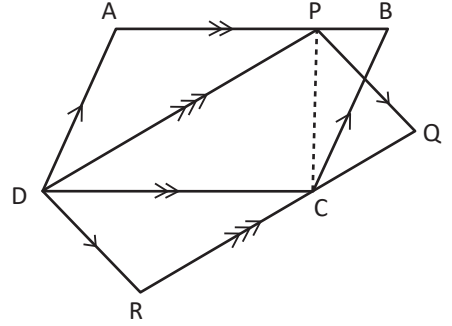
(ग) समानान्तर चतुर्भुज BCED र त्रिभुज ABC को क्षेत्रफलबिचको सम्बन्ध सैद्धान्तिक रूपमा पुष्टि गर्नुहोस् ।



(घ) त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस्, जहाँ $AC = 5 \text{ cm}$, $AB = 4 \text{ cm}$ र $\angle BAC = 45^\circ$ छ । उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी बन्ने समानान्तर चतुर्भुज ADMN को रचना गर्नुहोस् ।

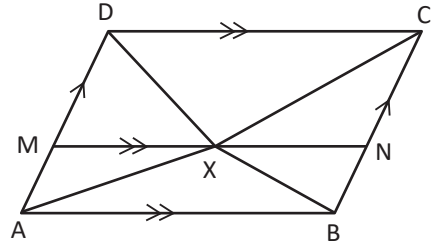
4. दिइएको चित्रमा ABCD र PQRD दुईओटा समानान्तर चतुर्भुजहरू हुन् ।

- (क) स.च. ABCD र PQRD को सम्बन्ध पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) यदि स.च. ABCD को आधार र उचाइ क्रमशः 8 cm र 7 cm भए स.च. PQRD को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



5. दिइएको चित्रमा ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो भने X उक्त स.च.को भिन्न पर्ने एउटा बिन्दु हो । यदि $MN \parallel AB$ छ भने,

- (क) त्रिभुज XCD र AXB को क्षेत्रफलको योगफल स.च. ABCD को आधा हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।
 (ख) त्रिभुज ADX र त्रिभुज BCX को क्षेत्रफल स.च. ABCD को आधा हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



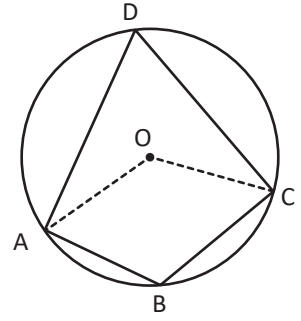
6. (क) $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ र $\angle ABC = 60^\circ$ भएको एउटा समानान्तर चतुर्भुज ABCD खिचनुहोस् । उक्त स.च. सँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज PBE जसको एउटा भुजा $PB = 5.6 \text{ cm}$ को रचना गर्नुहोस् ।
 (ख) प्रश्न (क) अनुसार समानान्तर चतुर्भुज ABCD को उचाइ पत्ता लगाई त्रिभुज PBE को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 7. (क) $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ र $\angle ABC = 120^\circ$ हुने समानान्तर चतुर्भुज ABCD को रचना गरी उक्त समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने आयत ABFE को रचना गर्नुहोस् ।
 (ख) प्रश्न नं. (क) अनुसार बनेको आयत ABFE को भुजा BF पत्ता लगाई समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्तमा एउटै चाप BC मा आधारित केन्द्रीय कोण $\angle BOC$ र परिधिको कोण $\angle BDC$ छन् भने तलका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् :

- (क) $\angle BOC$ र $\angle BDC$ विचको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।
 (ख) केन्द्रीय कोण $\angle BOC$ र परिधिको कोण $\angle BDC$ विचको सम्बन्ध प्रयोगात्मक रूपमा पुष्टि गर्नुहोस् ।
 (ग) केन्द्रीय कोणको नाप $(7x)^\circ$ र परिधिको कोणको नाप $(3x + 5)^\circ$ भए x को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

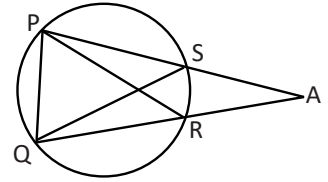
9. दिइएको चित्रमा ABCD एउटा चक्रीय चतुर्भुज हो भने,

- (क) $\angle ABC$ र $\angle ADC$ को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।
 (ख) $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।
 (ग) यदि $\angle ABC = 120^\circ$ भए अधिक $\angle AOC$ को मान कति होला ?



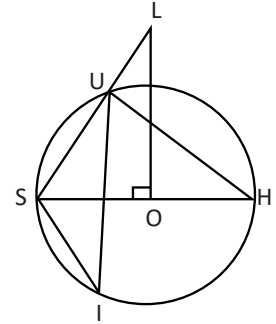
10. चित्रमा देखाइएको केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्तमा P, Q, R र S परिधिका बिन्दुहरू हुन् । $AP = AQ$ छ ।

- (क) चाप PQ मा आधारित रहेर बनेका परिधिका कोणहरूको नाम लेख्नुहोस् ।
 (ख) $\angle PSQ = 60^\circ$ भए $\angle PRQ$ को नाप कति हुन्छ ?
 (ग) प्रमाणित गर्नुहोस् : $PR = QS$



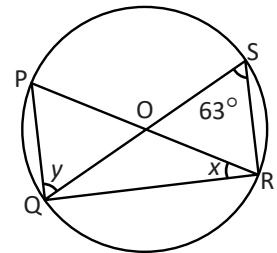
11. चित्रमा देखाइएको केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्तमा SH व्यास हो । S, I, H र U परिधिका बिन्दुहरू हुन् भने L कुनै एउटा बाह्य बिन्दु छ । जहाँ $LO \perp SH$ छ ।

- (क) $\angle SUH$ को नाप कति हुन्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।
 (ख) प्रमाणित गर्नुहोस् : $\angle SIU = \angle OLS$
 (ग) यदि $\angle USH = 50^\circ$ भए $\angle SIU$ को नाप कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



12. चित्रमा देखाइएको केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्तमा $\angle PQS = y$, $\angle QSR = 63^\circ$ र $\angle PRQ = x$ छ ।

- (क) $\angle PQR$ को नाप कति हुन्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।
 (ख) $\angle POS$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) प्रमाणित गर्नुहोस् : $x + y = 90^\circ$
 (घ) प्रमाणित गर्नुहोस् : $\triangle QOR$ समद्विबाहु त्रिभुज हो ।



उत्तर

उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

13.0 पुनरवलोकन (Review)

कक्षा 10 का 27 जना विद्यार्थीले दोस्रो त्रैमासिक परीक्षामा गणित विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क तल दिइएको छ। यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

25, 15, 30, 22, 27, 12, 25, 30, 22, 24, 15, 23, 19, 27, 28, 17, 19, 22, 25, 15, 14, 13, 28, 26, 18, 20, 22

- गणित विषयको औसत प्राप्ताङ्क कति रहेछ ?
- कति जना विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क औसत प्राप्ताङ्कभन्दा कम र बढी रहेछ ?
- माथि दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मध्यिका, पहिलो चतुर्थांश तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस्।
- सबैभन्दा धेरै विद्यार्थीले पाएको एउटै प्राप्ताङ्क कुन हो ? कति जनाले प्राप्त गरेका छन् ? यसलाई के भनिन्छ ?

13.1 मध्यक (Mean)

क्रियाकलाप 1

एउटा सामुदायिक विद्यालयका कक्षा 10 का विद्यार्थीमा "विद्यालयमा खाजा खर्चबापत प्रत्येक दिन कति रुपियाँ ल्याउनुहुन्छ ?" भनी गरिएको सर्वेक्षणमा देहायबमोजिमको नतिजा प्राप्त भयो :

रु. 25 ल्याउने 3 जना, रु. 30 ल्याउने 6 जना, रु. 35 ल्याउने 7 जना,
रु. 40 ल्याउने 4 जना, रु. 45 ल्याउने 4 जना र रु. 50 ल्याउने 1 रहेछ।

- माथिको तथ्याङ्कलाई तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस्।
- कक्षा 10 का विद्यार्थीको एक दिनको औसत खाजा खर्च पत्ता लगाउनुहोस्।

माथिको तथ्याङ्कबाट औसत मान (मध्यक) पत्ता लगाउनका लागि निम्नलिखित सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

$$\begin{aligned}\text{मध्यक } \bar{X} &= \frac{(f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n)}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} \\ &= \frac{\sum fx}{\sum f} \\ &= \frac{\sum fx}{n}\end{aligned}$$

क्रियाकलाप 2

कोरा तथ्याङ्कको विस्तार धेरै भयो भने त यसको तालिका ठुलो पो हुने रहेछ । त्यस्तो अवस्थामा मध्यक कसरी पत्ता लगाउने होला ?



यदि तपाईंले भने जस्तो तथ्याङ्क भएमा यसलाई अविच्छिन्न श्रेणी बनाई मध्यक निकाल्न सकिन्छ ।



जस्तै: कुनै विद्यालयका कक्षा 9 का 40 जना विद्यार्थीको गणित विषयको प्राप्ताङ्क निम्नानुसार छ ।
25, 10, 31, 22, 37, 42, 45, 37, 32, 34, 45, 40, 29, 27, 28, 17, 19, 22, 25, 33
15, 14, 13, 28, 36, 38, 41, 42, 39, 25, 24, 31, 21, 22, 25, 26, 35, 36, 39, 49.

माथिको तथ्याङ्कलाई अविच्छिन्न श्रेणीमा राखेर मध्यक निकाल्न सकिन्छ ।

(क) सबैभन्दा सानो प्राप्ताङ्क 10 र सबैभन्दा ठुलो प्राप्ताङ्क 49 छ । यसलाई 10 को वर्गान्तरमा निम्नानुसार वर्गीकृत तथ्याङ्कको तालिका बनाउन सकिन्छ ।

कक्षा 9 का विद्यार्थीको गणित विषयको प्राप्ताङ्क विवरण

| प्राप्ताङ्क (X) | मिलान चिह्न | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) |
|--------------------------|-------------|------------------------|
| 10 - 20 | | 6 |
| 20 - 30 | | 14 |
| 30 - 40 | | 13 |
| 40 - 50 | | 7 |
| जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या | | 40 |

वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यक पत्ता लगाउनका लागि सर्वप्रथम प्रत्येक वर्गान्तरको मध्यमान निकाल्नु पर्छ ।

$$\text{मध्यमान (m)} = \frac{\text{वर्गान्तरको तल्लो सीमा} + \text{वर्गान्तरको माथिल्लो सीमा}}{2}$$

त्यसपछि खण्डित श्रेणीका जस्तै x को ठाउँमा m राखेर मध्यक निकालिन्छ ।

कक्षा 9 का विद्यार्थीको गणित विषयको प्राप्ताङ्क विवरण

| प्राप्ताङ्क (X) | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | मध्यमान (m) | (fm) |
|-----------------|------------------------|------------------------|--------------------|
| 10-20 | 6 | $\frac{10+20}{2} = 15$ | 90 |
| 20-30 | 14 | $\frac{20+30}{2} = 25$ | 350 |
| 30-40 | 13 | $\frac{30+40}{2} = 35$ | 455 |
| 40-50 | 7 | $\frac{40+50}{2} = 45$ | 315 |
| | N = 40 | | $\Sigma fm = 1210$ |

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fm}{N} = \frac{1210}{40} = 30.25$$

माथिको तालिकालाई बारम्बारता तालिका भनिन्छ । प्रत्येक वर्गान्तरको विद्यार्थी सङ्ख्यालाई उक्त वर्गान्तरको बारम्बारता भनिन्छ । यसरी मध्यक पत्ता लगाउने विधिलाई प्रत्यक्ष विधि (Direct method) भनिन्छ ।

वैकल्पिक तरिका

कक्षा 9 का विद्यार्थीको गणित विषयको प्राप्ताङ्क विवरण

| प्राप्ताङ्क (X) | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | मध्यमान (m) | $d = m - A$ | fd |
|-----------------|------------------------|------------------------|-----------------|-------------------|
| 10 - 20 | 6 | $\frac{10+20}{2} = 15$ | $15 - 25 = -10$ | - 60 |
| 20 - 30 | 14 | $\frac{20+30}{2} = 25$ | $25 - 25 = 0$ | 0 |
| 30 - 40 | 13 | $\frac{30+40}{2} = 35$ | $35 - 25 = 10$ | 130 |
| 40 - 50 | 7 | $\frac{40+50}{2} = 45$ | $45 - 25 = 20$ | 140 |
| | N = 40 | | | $\Sigma fd = 210$ |

यहाँ कल्पित मध्यक (A) = 25 मानौं ।

मध्यमान र कल्पित मध्यकविचको भिन्नता (Deviation from assumed mean) = d

मध्यक $\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$ हुन्छ ।

$$= 25 + \frac{1210}{40}$$

$$= 25 + 5.25 = 30.25$$

कल्पित मध्यक (अनुमानित मध्यक) मानेर पनि तथ्याङ्कको वास्तविक मध्यक निकाल्न सकिन्छ। तालिकामा भएको कुनै मध्यमान वा कुनै सङ्ख्यालाई कल्पित मध्यक मानेर वास्तविक मध्यक पत्ता लगाइन्छ। यसका लागि कल्पित मध्यक र मध्यमानविचको भिन्नता (d) निकाल्नु पर्छ। सूत्र मध्यक (\bar{X}) = $A + \frac{\sum fd}{N}$ यस विधिलाई छोटकरी विधि (Shortcut Method) भनिन्छ।

उदाहरण 1

यदि $\sum fm = 2700$ र $N = 50$ भए मध्यक \bar{X} पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $\sum fm = 2700$

$N = 50$

मध्यक $\bar{X} = ?$

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, } \bar{X} &= \frac{\sum fm}{N} \\ &= \frac{2700}{50} \\ &= 54 \end{aligned}$$

अतः मध्यक (\bar{X}) = 54

उदाहरण 2

गणेश माध्यामिक विद्यालयका 100 जना विद्यार्थीको तौल तलको तालिकामा दिइएको छ। उक्त तथ्याङ्कबाट विद्यार्थीको मध्यक तौल पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| तौल (KG) | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 | 50 – 60 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 18 | 27 | 20 | 17 | 6 |

समाधान

यहाँ विद्यार्थीको तौल विवरण

| तौल (Kg) (X) | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | मध्यमान (m) | fm |
|--------------|------------------------|------------------------|------------------|
| 10 – 20 | 18 | $\frac{10+20}{2} = 15$ | 270 |
| 20 – 30 | 27 | $\frac{20+30}{2} = 25$ | 675 |
| 30 – 40 | 20 | $\frac{30+40}{2} = 35$ | 700 |
| 40 – 50 | 17 | $\frac{40+50}{2} = 45$ | 765 |
| 50 – 60 | 6 | $\frac{50+60}{2} = 55$ | 330 |
| | $\sum f = N = 88$ | | $\sum fm = 2740$ |

हामीलाई थाहा छ, मध्यक $\bar{X} = \frac{\sum fm}{N} = \frac{2740}{88} = 31.14$

अतः मध्यक (\bar{X}) = 31.14

वैकल्पिक तरिका

यहाँ मानौं, कल्पित मध्यक (A) = 35

विद्यार्थीको तौल विवरण

| तौल (Kg) (X) | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | मध्यमान (m) | d = m-35 | fd |
|--------------|------------------------|-------------|----------|------------------|
| 10 – 20 | 18 | 15 | -20 | -360 |
| 20 – 30 | 27 | 25 | -10 | -270 |
| 30 – 40 | 20 | 35 | 0 | 0 |
| 40 – 50 | 17 | 45 | 10 | 170 |
| 50 – 60 | 6 | 55 | 20 | 120 |
| | N = 88 | | | $\sum fd = -340$ |

हामीलाई थाहा छ, मध्यक (\bar{X}) = $A + \frac{\sum fd}{N}$
 $= 35 + \frac{-340}{88}$
 $= 35 - 3.86 = 31.14$

अतः विद्यार्थीको औसत तौल (\bar{X}) = 31.14

उदाहरण 3

कुनै तथ्याङ्कको कल्पित मध्यक (A) = 40, $\sum fd = 20$ र $N = 10$ भए मध्यक \bar{X} पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $A = 40$,

$$\sum fd = 20$$

$$N = 10$$

$$(\bar{X}) = ?$$

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, मध्यक } (\bar{X}) &= A + \frac{\sum fd}{N} \\ &= 40 + \frac{20}{10} \\ &= 40 + 2 \\ &= 42 \end{aligned}$$

अतः मध्यक $(\bar{X}) = 42$

उदाहरण 4

जनजागृति टोलका मानिसको उमेरका आधारमा तयार गरिएको तथ्याङ्क तालिकामा दिइएको छ । उक्त तालिकाका आधारमा औसत तौल (मध्यक) पत्ता लगाउनुहोस् ।

| उमेर (वर्ष) | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|-----------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| मानिसको सङ्ख्या | 10 | 18 | 25 | 20 | 12 | 5 |

समाधान

मानौं, कल्पित मध्यक $A = 25$ र वर्गान्तरको अन्तर $h = 10$,

जनजागृति टोलका मानिसको तौल विवरण

| उमेर (वर्ष) (X) | मानिसको सङ्ख्या (f) | मध्यमान (m) | $d = m - 25$ | fd |
|--------------------|------------------------|----------------|--------------|-----------------|
| 0-10 | 10 | 5 | -20 | -200 |
| 10-20 | 18 | 15 | -10 | -180 |
| 20-30 | 25 | 25 | 0 | 0 |
| 30-40 | 20 | 35 | 10 | 200 |
| 40-50 | 12 | 45 | 20 | 240 |
| 50-60 | 5 | 55 | 30 | 150 |
| | N = 90 | | | $\sum fd = 210$ |

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, मध्यक } (\bar{X}) &= A + \frac{\sum fd}{N} \\ &= 25 + \frac{210}{90} \\ &= 25 + 2.33 = 27.33 \end{aligned}$$

अतः मानिसको औसत उमेर $(\bar{X}) = 27.33$ वर्ष

उदाहरण 5

शान्ति मा.वि. का कक्षा 11 र कक्षा 12 का विद्यार्थीको उचाइका आधारमा तयार गरिएको तथ्याङ्क तालिकामा दिइएको छ। यदि विद्यार्थीको औसत उचाइ $\bar{X} = 157.75 \text{ cm}$ भए p को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

| उचाइ (cm) | 140-145 | 145-150 | 150-155 | 155-160 | 160-165 | 165-170 | 170-175 |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 2 | 5 | 8 | p | 7 | 5 | 3 |

समाधान

यहाँ अङ्कगणितीय मध्यक पत्ता लगाउँदा,

शान्ति मा.वि. का कक्षा 11 र कक्षा 12 का विद्यार्थीको उचाइ विवरण

| उचाइ (X) | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | मध्यमान (m) | fm |
|-----------|------------------------|-------------|----------------------------|
| 140 - 145 | 2 | 142.5 | 285 |
| 145 - 150 | 5 | 147.5 | 737.5 |
| 150 - 155 | 8 | 152.5 | 1220 |
| 155 - 160 | p | 157.5 | 157.5p |
| 160 - 165 | 7 | 162.5 | 1137.5 |
| 165 - 170 | 5 | 167.5 | 837.5 |
| 170 - 175 | 3 | 172.5 | 517.5 |
| | N = 30 + p | | $\sum fm = 4735 + 157.5 p$ |

हामीलाई थाहा छ, मध्यक (\bar{X}) = $\frac{\sum fm}{N}$

$$157.75 = \frac{4735 + 157.5p}{30 + p}$$

$$\text{अथवा, } 4732.5 + 157.75p = 4735 + 157.5p$$

$$\text{अथवा, } 157.75p - 157.50p = 4735 - 4732.5$$

$$\text{अथवा, } 0.25 p = 2.5$$

$$\text{अथवा, } p = 10$$

अतः (155 – 160) cm उचाइ हुने विद्यार्थी सङ्ख्या = 10 जना

उदाहरण 6

बालाजु पार्कमा बिहान 7 बजेदेखि 8 बजेसम्म प्रवेश गर्ने उमेरअनुसार मानिसको सङ्ख्या तल दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कलाई 10 वर्गान्तरको बारम्बारता तालिका निर्माण गरी पार्क आउने मानिसको औसत उमेर (\bar{X}) पत्ता लगाउनुहोस् :

7, 22, 32, 47, 59, 16, 36, 17, 23, 39, 49, 31, 21, 24, 41, 12, 49, 21, 9, 8, 51, 36, 35, 18.

समाधान

यहाँ बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

| उमेर (X) वर्ष | मिलन चिह्न | बारम्बारता (f) | मध्यमान (m) | fm |
|-------------------|------------|--------------------|-----------------|-----------------|
| 0-10 | | 3 | 5 | 15 |
| 10-20 | | 4 | 15 | 60 |
| 20-30 | | 5 | 25 | 125 |
| 30-40 | | 6 | 35 | 210 |
| 40-50 | | 4 | 45 | 180 |
| 50-60 | | 2 | 55 | 110 |
| | | $N = 24$ | | $\sum fm = 700$ |

हामीलाई थाहा छ, मध्यक (\bar{X}) = $\frac{\sum fm}{N}$

$$= \frac{700}{24}$$

$$= 29.17$$

$$(\bar{X}) = 29.17$$

अतः मानिसको औसत उमेर = 29.17 वर्ष

अभ्यास 13.1

1. तलका अवस्थामा मध्यक पत्ता लगानुहोस् :

(अ) 35, 36, 42, 45, 48, 52, 58, 60

(आ) 13.5, 14.2, 15.8, 15.2, 16.9, 16.5, 17.4, 19.3, 15.3, 15.9

(इ)

| | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|----|
| X | 5 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| f | 4 | 5 | 8 | 10 | 2 | 2 |

(ई) राष्ट्रिय लिग फुटबलमा खेलाडीले गरेको गोलको विवरण

| | | | | | | |
|----------------|----|----|----|----|----|----|
| गोल | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| खेलाडी सङ्ख्या | 2 | 4 | 6 | 12 | 10 | 6 |

2. तलका तथ्याङ्कबाट प्रत्यक्ष विधि र छोटकरी विधिबाट मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् :

(अ) एउटा बसमा यात्रा गर्ने मानिसको उमेर विवरण

| | | | | | |
|-----------------|------|-------|-------|-------|-------|
| उमेर (वर्ष) | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
| मानिसको सङ्ख्या | 5 | 9 | 15 | 7 | 4 |

(आ) कक्षा 10 अध्ययन गर्ने विद्यार्थीको विज्ञान विषयको प्राप्ताङ्क विवरण

| | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| प्राप्ताङ्क | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 1 | 4 | 10 | 8 | 7 | 5 |

(इ) कामदारहरूको दैनिक ज्याला विवरण

| | | | | | |
|----------------|---------|---------|---------|----------|-----------|
| ज्याला (रु.) | 200-400 | 400-600 | 600-800 | 800-1000 | 1000-1200 |
| कामदार सङ्ख्या | 3 | 7 | 10 | 6 | 4 |

(ई) कक्षा 10 अध्ययन गर्ने विद्यार्थीको गणित विषयको प्राप्ताङ्क विवरण

| | | | | | | |
|--------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| प्राप्ताङ्क | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 7 | 5 | 6 | 12 | 8 | 2 |

3. तलका तथ्याङ्कबाट थाहा नभएको मान पत्ता लगानुहोस् :

(अ) $\bar{X} = 49$, $\sum fm = 980$, $N = ?$

(आ) $\bar{X} = 102.25$, $N = 8$, $\sum fm = ?$

(इ) $A = 100$, $\bar{x} = 90$, $\sum fd = ?$, $N = 10$

(ई) $\bar{X} = 41.75$, $\sum fd = 270$, $N = 40$, $A = ?$

4. (अ) दिइएको अवस्थामा मध्यक \bar{X} को मान 32.5 भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | |
|--------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| प्राप्ताङ्क | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 5 | 10 | k | 35 | 15 | 10 |

- (आ) दिइएको अवस्थामा मध्यक \bar{X} को मान 46.2 भए p को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | |
|---|------|-------|-------|-------|--------|
| X | 0-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 | 80-100 |
| f | 35 | 400 | 350 | p | 65 |

- (इ) दिइएको अवस्थामा मध्यक \bar{X} को मान 36.4 भए y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| उमेर (वर्ष) | 16-24 | 24-32 | 32-40 | 40-48 | 48-56 | 56-64 |
| कामदार सङ्ख्या | 6 | 8 | y | 8 | 4 | 2 |

- (ई) दिइएको अवस्थामा दैनिक खर्चको मध्यक \bar{X} को मान रु. $264\frac{2}{3}$ भए, थाहा नभएको बारम्बारताको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | |
|--------------------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| दैनिक खर्च (रु.) | 0-100 | 100-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500-600 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 20 | 30 | ? | 20 | 18 | 12 |

5. दिइएको कोरा तथाङ्कलाई बारम्बारता तालिका निर्माण गरी मध्यक \bar{x} पत्ता लगाउनुहोस् :

- (अ) 15, 51, 32, 12, 32, 33, 23, 43, 35, 46, 57, 19, 59, 25, 20, 38, 16, 45, 39, 40 (10 वर्गान्तर)
- (आ) 25, 15, 24, 42, 22, 35, 34, 41, 33, 38, 54, 50, 36, 40, 27, 18, 35, 16, 51, 31, 23, 9, 16, 23, 31, 51, 7, 30, 17, 40, 60, 32, 50, 10, 23, 12, 21, 28, 37, 20, 58, 39, 10, 41, 13 (5 वर्गान्तर)

6. (अ) दिइएका तालिकाबाट मध्यक \bar{X} पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| प्राप्ताङ्क | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| बारम्बारता | 8 | 10 | 14 | 10 | 8 | 10 |

- (आ)
- | | | | | | | |
|----------------|------|--------|---------|---------|---------|---------|
| दैनिक खर्च रु. | 0-50 | 50-100 | 100-150 | 150-200 | 200-250 | 250-300 |
| कामदार सङ्ख्या | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |

आफ्नो समुदायका 50 जना मानिसको उमेर सोधेर उपयुक्त वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् । उक्त बारम्बारता तालिकालाई हिस्टोग्राममा प्रस्तुत गर्नुहोस् । प्रत्यक्ष विधि र छोटकरी विधिबाट मध्यक पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (अ) 47 (आ) 16 (इ) 10.32 (ई) 15.05
2. (अ) 24 वर्ष (आ) 43.86 (इ) रु. 706.67 (ई) 28.75
3. (अ) 20 (आ) 818 (इ) -100 (ई) 35
4. (अ) 25 (आ) 150 (इ) 12 (ई) 50
5. (अ) 34.5 (आ) 31.29 6. (अ) 30 (आ) रु. 155.77 (इ) 34.5

13.2 मध्यिका (Median)

क्रियाकलाप 3

जनता माध्यमिक विद्यालयका कक्षा 10 का विद्यार्थीले गणित विषयको एकाई परीक्षामा पाएको प्राप्त ताङ्क तल दिइएको छ :

21, 23, 28, 14, 10, 18, 19, 29, 27, 25, 19, 17, 18, 20, 21, 17, 15, 16,

28, 23, 24, 17, 16, 19, 14, 24, 23, 27, 14, 15, 21, 24, 26, 24, 18

माथिको तथ्याङ्कका आधारमा सोधिएका प्रश्नको समाधान गरी मिले नमिलेको जाँच साथीलाई देखाउनुहोस् ।

- (क) विद्यार्थीको औसत प्राप्ताङ्क कति रहेछ ?
- (ख) विद्यार्थीको प्राप्ताङ्कको मध्यिका मान वैयक्तिक श्रेणी र खण्डित श्रेणी बनाई पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) के फरक श्रेणीबाट प्राप्त मध्यिका मान पनि फरक आउँछ ?

दिइएको तथ्याङ्कलाई ठिक दुई भागमा विभाजन गर्ने तथ्याङ्कीय मान मध्यिका (Median) हो ।

उदाहरण 1

कक्षा 8 का विद्यार्थीले गणित विषयमा पाएको प्राप्ताङ्क तालिकामा दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | |
|--------------------|----|----|----|----|----|----|
| प्राप्ताङ्क | 17 | 18 | 22 | 26 | 30 | 32 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 3 | 4 | 8 | 10 | 7 | 5 |

समाधान

यहाँ,

कक्षा 8 का विद्यार्थीले गणित विषयमा पाएको प्राप्ताङ्क विवरण

| प्राप्ताङ्क (X) | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | सञ्चित बारम्बारता (cf) |
|-----------------|------------------------|------------------------|
| 17 | 3 | 3 |
| 18 | 4 | 7 |
| 22 | 8 | 15 |
| 26 | 10 | 25 |
| 30 | 7 | 32 |
| 32 | 5 | 37 |
| | N = 37 | |

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned}\text{मध्यिका पर्ने स्थान} &= \frac{N+1}{2} \text{ औं पद} \\ &= \frac{37+1}{2} \text{ औं पद} \\ &= 19 \text{ औं पद}\end{aligned}$$

माथिको तालिकाबाट 19 भन्दा ठिक ठुलो सञ्चित बारम्बारता 25 हो र 25 को प्राप्ताङ्क मान 26 भएकाले, कक्षा 8 का विद्यार्थीको प्राप्ताङ्कको मध्यिका = 26 हो ।

क्रियाकलाप 4

खण्डित श्रेणीको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउन त सक्थौं । अब निरन्तर श्रेणीमा तथ्याङ्क दिएमा कसरी मध्यिका पत्ता लगाउने होला ? छलफल गरौं ।

निरन्तर श्रेणीको तथ्याङ्कबाट मध्यिका (Median of Continuous Series of Data)

जस्तै :

| प्राप्ताङ्क (X) | 0-8 | 8-16 | 16-24 | 24-32 | 32-40 | 40-48 | 48-56 |
|------------------------|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | 6 | 10 | 16 | 18 | 12 | 10 | 8 |

निरन्तर श्रेणीको तथ्याङ्कको मध्यिका निम्नलिखित चरणहरूमा पत्ता लगाउन सकिन्छ :

- भन्दा सानो सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउने । (प्रत्येक वर्गान्तरको माथिल्लो बिन्दुभन्दा कम)
- मध्यिका पर्ने स्थान पहिचान गर्ने । मध्यिका पर्ने स्थान = $\frac{N}{2}$ औं पद
- मध्यिका पर्ने वर्गान्तर पत्ता लगाउने । मध्यिका पर्ने स्थान भएको वर्गान्तर नै मध्यिका पर्ने वर्गान्तर हो ।

(घ) तलको सूत्र प्रयोग गरी मध्यिकाको मान पत्ता लगाउने

$$\text{मध्यिका (M}_d) = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$$

जहाँ, L = मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा

N = जम्मा तथ्याङ्कको सङ्ख्या

cf = मध्यिका पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता

f = मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता

h = मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको अन्तर

यहाँ मध्यिकाका लागि तालिका निर्माण गर्दा,

| प्राप्ताङ्क (X) | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता | सञ्चित बारम्बारता (cf) |
|-----------------|------------------------|----------------------------------|------------------------|
| 0 - 8 | 6 | 8 भन्दा कम = 6 | 6 |
| 8 - 16 | 10 | 16 भन्दा कम = 6+10 | 16 |
| 16 - 24 | 16 | 24 भन्दा कम = 6+10+16 | 32 |
| 24 - 32 | 18 | 32 भन्दा कम = 6+10+16+18 | 50 |
| 32 - 40 | 12 | 40 भन्दा कम = 6+10+16+18+12 | 62 |
| 40 - 48 | 10 | 48 भन्दा कम = 6+10+16+18+12+10 | 72 |
| 48 - 56 | 8 | 56 भन्दा कम = 6+10+16+18+12+10+8 | 80 |
| | N = 80 | | |

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या (N) = 80

मध्यिका पर्ने स्थान = $\frac{N}{2}$ औं पद = $\frac{80}{2}$ औं पद = 40 औं पद रहेको वर्गान्तर

40 औं पद भएको वर्गान्तर (24-32) हो ।

अब मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 24

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = 32

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 18

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = 32 - 24 = 8

$$\begin{aligned}
 \text{हामीलाई थाहा छ, मध्यिका (M}_d\text{)} &= L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h \\
 &= 24 + \frac{40 - 32}{18} \times 8 \\
 &= 24 + \frac{64}{18} \\
 &= 24 + 3.56 \\
 &= 27.56
 \end{aligned}$$

उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| आम्दानी (हजारमा) | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
| कामदार सङ्ख्या | 16 | 12 | 10 | 16 | 18 | 12 |

समाधान

विद्यार्थीको तौल विवरण

| आम्दानी (हजारमा) (X) | कामदार सङ्ख्या (f) | भन्दा कम बारम्बारता | सञ्चित बारम्बारता (cf) |
|-------------------------|-----------------------|---------------------------------|---------------------------|
| 20 - 30 | 16 | 30 भन्दा कम = 16 | 16 |
| 30 - 40 | 12 | 40 भन्दा कम = 16+12 | 28 |
| 40 - 50 | 10 | 50 भन्दा कम = 16 +12+10 | 38 |
| 50 - 60 | 16 | 60 भन्दा कम = 16+12+10+16 | 54 |
| 60 - 70 | 18 | 70 भन्दा कम = 16+12+10+16+18 | 72 |
| 70 - 80 | 12 | 80 भन्दा कम = 16+12+10+16+18+12 | 84 |
| | N = 84 | | |

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या (N) = 84

मध्यिका पर्ने स्थान = $\frac{N}{2}$ औं पद = $\frac{84}{2}$ औं पद = 42 औं पद

42 औं पद भएको वर्गान्तर (50-60) हो ।

अब मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 50

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = 38

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 16

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = 60 - 50 = 10

$$\begin{aligned}
\text{हामीलाई थाहा छ, मध्यिका (M}_d\text{)} &= L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h \\
&= 50 + \frac{42 - 38}{16} \times 10 \\
&= 50 + \frac{40}{16} \\
&= 50 + 2.5 \\
&= 52.5
\end{aligned}$$

उदाहरण 3

गाउँमा सार्वजनिक कार्यमा जन श्रमदान गर्नेको आधारमा तयार गरिएको तालिका तल दिइएको छ । उक्त जन श्रमदानको मध्यिका तलको बारम्बारता तालिकाको मध्यिका मान 93.6 भए छुटेको बारम्बारता y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | |
|----------------|------|-------|-------|--------|---------|---------|
| घण्टा | 0-30 | 30-60 | 60-90 | 90-120 | 120-150 | 150-180 |
| कामदार सङ्ख्या | 5 | y | 22 | 25 | 14 | 4 |

समाधान

बारम्बारता पत्ता लगाउने तालिका

| घण्टा (X) | कामदार सङ्ख्या (f) | भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता (cf) |
|--------------|---------------------------|--|
| 0-30 | 5 | 5 |
| 30-60 | y | $5 + y$ |
| 60-90 | 22 | $27 + y$ |
| 90-120 | 25 | $52 + y$ |
| 120-150 | 14 | $66 + y$ |
| 150-180 | 4 | $70 + y$ |
| | $N = (70 + y)$ | |

जम्मा कामदार सङ्ख्या $N = 70 + y$

मध्यिका (M_d) = 93.6

मध्यिका परेको वर्गान्तर (90-120) हुन्छ ।

अब मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 90

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = $27 + y$

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 25

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = $120 - 90 = 30$

$$\text{हामीलाई थाहा छ, मध्यिका (M_d) = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$$

$$\text{अथवा, } 93.6 = 90 + \frac{\frac{70+y}{2} - (27+y)}{25} \times 30$$

$$\text{अथवा, } 93.6 - 90 = \frac{70+y-2(27+y)}{2 \times 25} \times 30$$

$$\text{अथवा, } 3.6 = \frac{70+y-54-2y}{50} \times 30$$

$$\text{अथवा, } 3.6 = \frac{(16-y) \times 3}{5}$$

$$\text{अथवा, } 3.6 \times 5 = 48 - 3y$$

$$\text{अथवा, } 3y = 48 - 18$$

$$\text{अथवा, } 3y = 30$$

$$\text{अथवा, } y = 10$$

∴ छुटेको बारम्बारता (y) = 10

क्रियाकलाप 5

एउटा बगैँचामा भएका रुखहरूको उचाइका आधारमा तयार गरिएको बारम्बारता तालिका दिइएको छ :

| उचाइ (ft) | 4-6 | 7-9 | 10-12 | 13-15 | 16-18 | 19- 21 | 22-24 |
|---------------|-----|-----|-------|-------|-------|--------|-------|
| रुखका सङ्ख्या | 2 | 3 | 10 | 7 | 4 | 3 | 2 |

(क) माथिको तथ्याङ्कलाई कसरी निरन्तर श्रेणीमा बनाउने होला ?

(ख) माथिको तथ्याङ्कको मध्यिका कति हुन्छ होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ दिइएको तथ्याङ्कमा वर्गान्तरहरू निरन्तर छैनन् तसर्थ वर्गान्तरलाई निरन्तर बनाउनका लागि सुधार तत्व (correction factor) निम्नानुसार पत्ता लगाउनु पर्छ :

$$\begin{aligned} \text{Correction factor} &= \frac{\text{दोस्रो वर्गान्तरको तल्लो मान} - \text{पहिलो वर्गान्तरको माथिल्लो मान}}{2} \\ &= \frac{7-6}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

उक्त correction factors लाई प्रत्येक वर्गान्तरको तल्लो मानबाट घटाउने र माथिल्लो मानमा जोडेर वर्गान्तररीत श्रेणीलाई निरन्तर वर्गान्तररीत श्रेणी बनाउने :

जस्तै: वर्गान्तर 4 – 6 मा,

तल्लो मान 4 – 0.5 = 3.5 र

माथिल्लो मान 6 + 0.5 = 6.5 गरी वर्गान्तर 3.5 – 6.5 बनाउनु पर्छ ।

मध्यिका पत्ता लगाउनका लागि तालिका

| उचाइ (ft) (X) | रुखका सङ्ख्या (f) | भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता (cf) |
|------------------|----------------------|------------------------------------|
| 3.5 - 6.5 | 2 | 2 |
| 6.5 - 9.5 | 3 | 5 |
| 9.5 - 12.5 | 10 | 15 |
| 12.5 - 15.5 | 7 | 22 |
| 15.5 - 18.5 | 4 | 26 |
| 18.5 - 21.5 | 3 | 29 |
| 21.5 - 24.5 | 2 | 31 |
| | N = 31 | |

अब मध्यिका पर्ने स्थान = $\frac{N}{2}$ औं पद
 $= \frac{31}{2} = 15.5$ औं पद

15.5 औं पद भएको वर्गान्तर (12.5 - 15.5) हुन्छ ।

अब मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 12.5

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = 15

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 7

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = 15.5 - 12.5 = 3

हामीलाई थाहा छ, मध्यिका (M_d) = $L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$

$$= 12.5 + \frac{15.5 - 15}{7} \times 3$$

$$= 12.5 + \frac{0.5 \times 3}{7}$$

$$= 12.5 + \frac{1.5}{7}$$

$$= 12.5 + 0.21 = 12.71$$

∴ रुखका मध्यिका उचाइ = 12.71 ft

उदाहरण 5

तलका तथ्याङ्कबाट 10 वर्गान्तरको बारम्बारता तालिका निर्माण गरी मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :
21, 9, 34, 42, 17, 54, 13, 38, 23, 39, 49, 29, 38, 44, 21, 42, 19, 7, 29, 8, 55, 36, 39, 13.

समाधान

बारम्बारता तालिका

| वर्गान्तर (X) | मिलान चिह्न | बारम्बारता (f) | भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता (cf) |
|---------------|-------------|----------------|---------------------------------|
| 0 - 10 | | 3 | 3 |
| 10 - 20 | | 4 | 3+4=7 |
| 20 - 30 | | 5 | 7+5=12 |
| 30 - 40 | | 6 | 12+6=18 |
| 40 - 50 | | 4 | 18+4=22 |
| 50 - 60 | | 2 | 22+2=24 |
| | | N = 24 | |

अब मध्यिका पर्ने स्थान = $\frac{N}{2}$ औं पद

$$= \frac{24}{2} = 12 \text{ औं पद}$$

12 औं पद भएको वर्गान्तर (20 - 30) हुन्छ ।

अब मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 20

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = 7

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 5

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = 30 - 20 = 10

हामीलाई थाहा छ, मध्यिका (M_d) = $L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$

$$= 20 + \frac{12-7}{5} \times 10$$

$$= 20 + 10$$

$$= 30$$

नोट : यसको वास्तविक वर्गान्तर 30 - 40 रहेछ ।

अभ्यास 13.2

1. दिइएका तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 2.5, 4.5, 3.6, 4.9, 5.4, 2.9, 3.1, 4.2, 4.6, 2.2, 1.5

(ख) 100, 105, 104, 197, 97, 108, 120, 148, 144, 190, 148, 22, 169, 171, 92, 100

(ग)

| | | | | | | | | |
|--------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| प्राप्ताङ्क | 18 | 25 | 28 | 29 | 34 | 40 | 44 | 46 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 3 | 6 | 5 | 7 | 8 | 12 | 5 | 4 |

(घ)

| | | | | | | | |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| उचाइ (cm) | 102 | 105 | 125 | 140 | 170 | 190 | 200 |
| विरुवाको सङ्ख्या | 10 | 18 | 22 | 25 | 15 | 12 | 8 |

2. दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

| | | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| तौल (Kg) | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 3 | 5 | 7 | 11 | 10 | 3 | 1 |

(ख)

| | | | | | | | |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| उचाइ (cm) | 140-145 | 145-150 | 150-155 | 155-160 | 160-165 | 165-170 | 170-175 |
| बारम्बारता | 2 | 5 | 8 | 10 | 7 | 5 | 3 |

(ग)

| | | | | | | |
|----------------------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------------|
| खर्च (प्रति दिन रु.) | 100 भन्दा कम | 100-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500 भन्दा बढी |
| बारम्बारता | 22 | 34 | 52 | 20 | 19 | 13 |

(घ)

| | | | | | |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| प्राप्ताङ्क | 20 भन्दा कम | 40 भन्दा कम | 60 भन्दा कम | 80 भन्दा कम | 100 भन्दा कम |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 21 | 44 | 66 | 79 | 90 |

3. तलका तथ्याङ्कबाट छुटेको बारम्बारता पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) मध्यिका = 35

| | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| प्राप्ताङ्क | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 | 40-45 | 45-50 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 2 | 5 | 8 | k | 4 | 5 |

(ख) मध्यिका = रु. 132.5

| | | | | | | |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ज्याला (Rs.) | 100-110 | 110-120 | 120-130 | 130-140 | 140-150 | 150-160 |
| कामदार सङ्ख्या | 5 | 6 | p | 4 | 7 | 5 |

(ग) मध्यिका = $39\frac{5}{6}$ वर्ष

| | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| उमेर (yr) | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 | 40-45 | 45-50 | 50-55 | 55-60 |
| मानिस सङ्ख्या | 50 | 70 | 100 | 300 | ? | 220 | 70 | 60 |

4. तलका तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

| | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| प्राप्ताङ्क | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 2 | 3 | 6 | 5 | 4 |

(ख)

| | | | | | |
|--------------------|------|------|------|------|-------|
| प्राप्ताङ्क | < 20 | < 40 | < 50 | < 80 | < 100 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 9 | 23 | 43 | 55 | 60 |

(ग)

| | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| आम्दानी (Rs) | < 600 | < 700 | < 800 | < 900 | < 1000 |
| कामदार सङ्ख्या | 30 | 98 | 152 | 177 | 200 |

(घ)

| | | | | | |
|--------------|-----|-------|-------|-------|-------|
| तापक्रम (°C) | 0-9 | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 |
| दिन सङ्ख्या | 8 | 10 | 20 | 15 | 7 |

5. (क) एउटा कक्षा परीक्षामा 30 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्क निम्नानुसार रहेका छन् :

22, 56, 62, 37, 48, 30, 58, 42, 29, 39, 37, 50, 38, 41, 32, 20, 28, 16, 43, 18, 40, 52, 44, 27, 35, 45, 36, 49, 55, 40

माथिको तथ्याङ्कबाट 10 वर्गान्तरको बारम्बारता तालिका निर्माण गरी मध्यक र मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) कक्षा 10 का 40 जना विद्यार्थीको उचाइलाई से.मि. मा निम्नानुसार दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कबाट 5 वर्गान्तरको बारम्बारता तालिका निर्माण गरी मध्यक र मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

142, 145, 151, 157, 159, 160, 165, 162, 156, 158, 155, 141, 147, 149, 148, 159, 154, 155, 166, 168, 169, 172, 174, 173, 176, 161, 164, 163, 149, 150, 154, 153, 152, 164, 158, 159, 162, 157, 156, 155

परियोजना कार्य

तपाईंको समुदायमा 40 जना मानिसको उमेर सोध्नुहोस् । प्राप्त तथ्याङ्कलाई दशको वर्गान्तर तालिकामा प्रस्तुत गरी मध्यिका उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

1. (क) 3.6 (ख) 114 (ग) 34 (घ) 140
2. (क) 64.545 kg (ख) 157.50 cm (ग) रु. 246.15 (घ) 40.9
3. (क) 6 (ख) 3 (ग) 150
4. (क) 78.33 (ख) 47 (ग) 703.70 (घ) 25.5°C
5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

13.3 रित वा बहुलक (mode)

क्रियाकलाप 7

एउटा सहरको 20 दिनको तापक्रम (°F) निम्नानुसार रहेछ भने उक्त तापक्रममा सबैभन्दा धेरै दोहोरिएको तापक्रम कति रहेछ पत्ता लगाउनुहोस् :

70, 76, 76, 74, 70, 70, 72, 74, 78, 80, 74, 74, 78, 76, 78, 76, 74, 78, 80, 76

यसरी सबैभन्दा धेरै पटक दोहोरिएको मानलाई उक्त तथ्याङ्कको बहुलक वा रित (Mode) भनिन्छ । यहाँ 76 सबैभन्दा बढी दोहोरिएकाले रित 76 भयो ।

क्रियाकलाप 8

वर्गीकृत तथ्याङ्कको रित (Mode form continuous series)

वर्गीकृत तथ्याङ्कको रित निम्नलिखित चरणहरूमा पत्ता लगाउन सकिन्छ :

- (क) धेरै पटक दोहोरिएको मान रित भएकाले सर्वप्रथम सबभन्दा ठुलो बारम्बारता भएको वर्गान्तर पत्ता लगाउने :
- (ख) रित पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता f_1 , रित पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको बारम्बारता f_0 , रित पर्ने वर्गान्तरभन्दा पछिल्लो वर्गान्तरको बारम्बारता f_2 पत्ता लगाउने :
- (ग) रित पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) पत्ता लगाउने
- (घ) तलको सूत्र प्रयोग गरी रितको मान पत्ता लगाउने :

$$\text{रित (Mode)} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

जहाँ, L = रित पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा ।

f_1 = रित पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता

f_0 = रित पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको बारम्बारता

f_2 = रित पर्ने वर्गान्तरभन्दा पछिल्लो वर्गान्तरको बारम्बारता

h = रित पर्ने वर्गान्तरको अन्तर

उदाहरण 1

तलको आँकडाबाट बहुलक वा रीत पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| तौल (kg) | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 3 | 5 | 7 | 11 | 10 | 3 | 1 |

समाधान

| | | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| तौल (Kg) | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 3 | 5 | 7 | 11 | 10 | 3 | 1 |

यहाँ सबैभन्दा धेरै बारम्बारता 11 छ । उक्त बारम्बारताको वर्गान्तर 60-70 हो ।

रित पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 60

रित पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f_1) = 11

रित पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको बारम्बारता (f_0) = 7

रित पर्ने वर्गान्तरभन्दा पछिल्लो वर्गान्तरको बारम्बारता (f_2) = 10

रित पर्ने वर्गान्तरको अन्तर $h = 70 - 60 = 10$

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, रित (mode)} &= L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h \\ &= 60 + \frac{11 - 7}{2 \times 11 - 7 - 10} \times 10 \\ &= 60 + \frac{4}{5} \times 10 \\ &= 60 + 8 = 68 \end{aligned}$$

अतः बहुलक (रित) = 68 kg

अभ्यास 13.3

1. तलका तथ्याङ्कको रीत (Mode) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 29 cm, 34 cm, 29 cm, 26 cm, 55 cm, 34 cm, 35 cm, 40 cm, 34 cm, 56 cm

(ख) 99 kg, 135 kg, 182 kg, 49 kg, 189 kg, 196 kg, 78 kg, 192 kg, 182 kg

2. दिइएका बारम्बारता तालिकाहरूबाट रीत पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)

| | | | | | | | | | |
|--------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| प्राप्ताङ्क | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 2 | 6 | 7 | 9 | 11 | 5 | 15 | 2 | 3 |

(ख)

| | | | | | | | | |
|----------------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ज्याला (रु.) | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 225 |
| कामदार सङ्ख्या | 8 | 12 | 17 | 29 | 30 | 27 | 20 | 11 |

3. दिइएका बारम्बारता तालिकाहरूबाट रीत (Mode) पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | | |
|-----|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (क) | प्राप्ताङ्क | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 | 40-45 | 45-50 |
| | विद्यार्थी सङ्ख्या | 2 | 5 | 8 | 6 | 4 | 5 |

| | | | | | | | |
|-----|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| (ख) | ज्याला (रु.) | 100-110 | 110-120 | 120-130 | 130-140 | 140-150 | 150-160 |
| | कामदार सङ्ख्या | 5 | 6 | 4 | 7 | 5 | 4 |

| | | | | | | | | | |
|-----|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (ग) | उमेर (वर्षमा) | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 | 40-45 | 45-50 | 50-55 | 55-60 |
| | मानिस सङ्ख्या | 50 | 70 | 100 | 300 | 220 | 150 | 70 | 60 |

उत्तर

- (क) 34 cm (ख) 182 kg
- (क) 35 (ख) रु.150
- (क) 33 (ख) रु. 136 (ग) 38.57 वर्ष

13.4 चतुर्थांशहरू (Quartiles)

क्रियाकलाप 10

तल दिइएको तथ्याङ्क जनता माध्यमिक विद्यालयका कक्षा 10 का विद्यार्थीले गणित विषयको पहिलो त्रैमासिक परीक्षामा पाएको प्राप्ताङ्क हो ।

21, 23, 28, 14, 10, 18, 19, 29, 27, 25, 19, 17, 18, 20, 21, 17, 15, 16,

28, 23, 24, 17, 16, 19, 14, 24, 23, 27, 14, 15, 21, 24, 26, 24, 18

माथिको तथ्याङ्कबाट विद्यार्थीको प्राप्ताङ्कको पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश मान वैयक्तिक श्रेणी र खण्डित श्रेणी बनाई पत्ता लगाउनुहोस् । के फरक श्रेणीबाट प्राप्त पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश मान पनि फरक आउँछ ? दुई दुई जनाको समूहमा छलफल गर्नुहोस् र निश्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

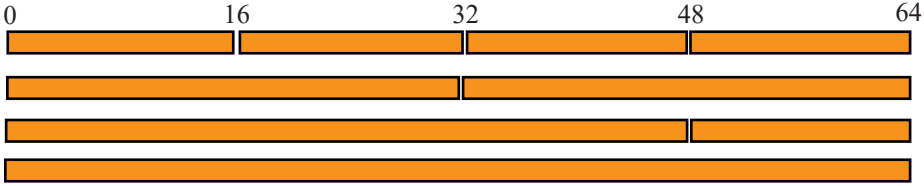
क्रियाकलाप 11

निरन्तर श्रेणीमा दिइएको तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश कसरी पत्ता लगाउने होला ? तलको क्रियाकलापहरू समूहमा गर्नुहोस् :

- (क) कुनै चारओटा 64 cm लम्बाइको लट्ठी लिनुहोस् ।

- (ख) पहिलोलाई बराबर 4 भागमा बाँड्नुहोस् र प्रत्येक टुक्राको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
16 ले 64 लाई बराबर 4 भागमा बाँड्छ । यो पहिलो चतुर्थांश हो ।
- (ग) दोस्रोलाई बराबर 2 भागमा बाँड्नुहोस् र प्रत्येक टुक्राको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) तेस्रोलाई बराबर 4 भाग लगाई 3 भाग एकातिर र अर्को एक भाग अर्कोतिर गरी दुई भाग लगाउनुहोस् ।

यसलाई निम्नानुसार चित्रमा देखाउन सकिन्छ :



माथिको चित्रमा हेर्दा 4 बराबर टुक्रामा विभाजन गर्दा 16 cm का टुक्राहरू बन्छन् ।
बराबर 2 भागमा बाँड्दा 32 cm का टुक्राहरू बन्छन् । यसलाई मध्यिका पनि भनिन्छ ।
त्यस्तै 4 बराबर टुक्रामध्ये 3 बराबर टुक्राहरू जोड्दा जम्मा लम्बाइ 48 cm हुन्छ ।
16 पहिलो चतुर्थांश (Q_1), 32 दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) र 48 तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) हो ।

वर्गीकृत श्रेणीका लागि

- (क) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता पत्ता लगाउने
- (ख) सूत्र $Q_1 = \frac{N}{4}$ औं पद र $Q_3 = \frac{3N}{4}$ औं पत्ता लगाउने
- (ग) सञ्चित बारम्बारतामा Q_1 का लागि $\frac{N}{4}$ सँग बराबर वा भन्दा ठुलो सञ्चित बारम्बारताको भएको वर्गान्तर मा र Q_3 का लागि $\frac{3N}{4}$ भन्दा ठिक माथिको सञ्चित बारम्बारता भएको वर्गान्तरमा हेर्ने :
- (घ) त्यसपछि निम्नानुसारको सूत्रहरू प्रयोग गर्ने :

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times h$$

जहाँ,

$L = Q_1$ पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा

$N =$ जम्मा तथ्याङ्कको सङ्ख्या

$cf = \frac{N}{4}$ सँग बराबर वा सोभन्दा माथिको सञ्चित बारम्बारता

$f = Q_1$ पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता

$h = Q_1$ पर्ने वर्गान्तरको अन्तर

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times h$$

जहाँ $L = Q_3$ पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा

$N =$ जम्मा तथ्याङ्कको सङ्ख्या

$cf = \frac{3N}{4}$ सँग बराबर वा सोभन्दा माथिको सञ्चित बारम्बारता

$f = Q_3$ पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता

$h = Q_3$ पर्ने वर्गान्तरको अन्तर

उदाहरण 1

तलको तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश (Q_1) र तेस्रो (Q_3) पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | | | |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| कामदारको उमेर | 20 | 25 | 28 | 30 | 32 | 35 | 42 | 46 |
| कामदार सङ्ख्या | 2 | 8 | 12 | 10 | 14 | 7 | 5 | 1 |

समाधान

कामदारको उमेर विवरण

| कामदारको उमेर वर्षमा (X) | कामदार सङ्ख्या (f) | cf |
|--------------------------|--------------------|----|
| 20 | 2 | 2 |
| 25 | 8 | 10 |
| 28 | 12 | 22 |
| 30 | 10 | 32 |
| 32 | 14 | 46 |
| 35 | 7 | 53 |
| 42 | 5 | 58 |
| 46 | 1 | 59 |
| | N = 59 | |

$$\begin{aligned} \text{यहाँ पहिलो चतुर्थांश पर्ने स्थान} &= \frac{N+1}{4} \text{ औं पद} \\ &= \frac{59+1}{4} \text{ औं पद} \\ &= \frac{60}{4} = 15 \text{ औं पद} \end{aligned}$$

15 औं पदको मान 28 भएकाले पहिलो चतुर्थांश (Q_1) = 28 वर्ष

$$\begin{aligned} \text{फेरि तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान} &= \frac{3(N+1)}{4} \text{ औं पद} \\ &= \frac{3(59+1)}{4} \text{ औं पद} = \frac{180}{4} = 45 \text{ औं पद} \end{aligned}$$

45 औं पदको मान 32 भएकाले तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) = 32 वर्ष

उदाहरण 2

तल कक्षा 7 का विद्यार्थीले गणित विषयको कक्षा परीक्षामा पाएको प्राप्ताङ्क दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश (Q_1) र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | | |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| प्राप्ताङ्क (X) | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | 2 | 8 | 15 | 14 | 10 | 8 | 3 |

समाधान

विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क विवरण

| प्राप्ताङ्क (X) | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | सञ्चित बारम्बारता (cf) |
|-----------------|------------------------|------------------------|
| 10-20 | 2 | 2 |
| 20-30 | 8 | 10 |
| 30-40 | 15 | 25 |
| 40-50 | 14 | 39 |
| 50-60 | 10 | 49 |
| 60-70 | 8 | 57 |
| 70-80 | 3 | 60 |

यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या $N = 60$

पहिलो चतुर्थांश पर्ने स्थान $= \frac{N}{4}$ औ पद $= \frac{60}{4}$ औ पद $= 15$ औ पद पर्ने वर्गान्तर

15 औ पद भएको वर्गान्तर (30-40) हो ।

अब पहिलो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 30

पहिलो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = 10

पहिलो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 15

पहिलो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = $40 - 30 = 10$

हामीलाई थाहा छ, पहिलो चतुर्थांश (Q_1) = $L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times h$

$$= 30 + \frac{15 - 10}{15} \times 10$$

$$= 30 + \frac{50}{15}$$

$$= 30 + 3.34 = 33.34$$

फेरि तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान $= \frac{3N}{4}$ औ पद $= \frac{3 \times 60}{4}$ औ पद $= 45$ औ पद पर्ने वर्गान्तर

45 औ पद भएको वर्गान्तर (50-60) हो ।

अब तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 50

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = 39

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 10

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = 60 - 50 = 10

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, तेस्रो चतुर्थांश (Q}_3\text{)} &= L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times h \\ &= 50 + \frac{45 - 39}{10} \times 10 \\ &= 50 + \frac{60}{10} \\ &= 50 + 6 \\ &= 56 \end{aligned}$$

अतः पहिलो चतुर्थांश (Q₁) = 33.34 र तेस्रो चतुर्थांश (Q₃) = 56 हुन् ।

उदाहरण 3

तल तालिकामा कामदारको आमदानी दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कबाट Q₁, Q₂ र Q₃ को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

| आमदानी (रु. हजारमा) | 0-5 | 5-10 | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 | 30-35 |
|---------------------|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| कामदार सङ्ख्या | 10 | 15 | 40 | 55 | 30 | 25 | 5 |

समाधान

कामदारको आमदानी विवरण

| आमदानी (रु. हजारमा) (X) | कामदार सङ्ख्या (f) | भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता (cf) |
|-------------------------|--------------------|---------------------------------|
| 0 - 5 | 10 | 10 |
| 5 - 10 | 15 | 25 |
| 10 - 15 | 40 | 65 |
| 15 - 20 | 55 | 120 |
| 20 - 25 | 30 | 150 |
| 25 - 30 | 25 | 175 |
| 30 - 35 | 5 | 180 |

यहाँ जम्मा कामदार सङ्ख्या (N) = 180

पहिलो चतुर्थांश पर्ने स्थान = $\frac{N}{4}$ औं पद = $\frac{180}{4}$ औं पद = 45 औं पद पर्ने वर्गान्तर

45 औं पद भएको वर्गान्तर (10-15) हो ।

अब पहिलो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 10

पहिलो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता $cf = 25$

पहिलो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 40

पहिलो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = $15 - 10 = 5$

$$\begin{aligned}\text{हामीलाई थाहा छ, पहिलो चतुर्थांश (Q}_1\text{)} &= L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times h \\ &= 10 + \frac{45 - 25}{40} \times 5 \\ &= 10 + \frac{100}{40} \\ &= 10 + 2.5 = 12.5 \text{ (अथवा रु. 12,500)}\end{aligned}$$

फेरि मध्यिका पर्ने स्थान = $\frac{N}{2}$ औं पद = $\frac{180}{2}$ औं पद = 90 औं पद वर्गान्तर

90 औं पद भएको वर्गान्तर (15-20) हो ।

अब मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 15

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = 65

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 55

मध्यिका पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = $20 - 15 = 5$

$$\begin{aligned}\text{हामीलाई थाहा छ, मध्यिका (Q}_2\text{)} &= L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h \\ &= 15 + \frac{90 - 65}{55} \times 5 \\ &= 15 + \frac{25}{11} \\ &= 15 + 2.27 = 17.273 = \text{(अथवा रु. 17,273)}\end{aligned}$$

अब तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान = $\frac{3N}{4}$ औं पद = $\frac{3 \times 180}{4}$ औं पद = 135 औं पद पर्ने वर्गान्तर

135 औं पद भएको वर्गान्तर (20 - 25) हो ।

अब तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 20

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = 120

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 30

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = $25 - 20 = 5$

$$\begin{aligned}
\text{हामीलाई थाहा छ, तेस्रो चतुर्थांश (Q}_3\text{)} &= L + \frac{3N - cf}{f} \times h \\
&= 20 + \frac{135 - 120}{30} \times 5 \\
&= 20 + \frac{15}{6} = 20 + 2.5 \\
&= 22.5 = (\text{अथवा रु. } 22,500)
\end{aligned}$$

अतः पहिलो चतुर्थांश (Q₁) = रु. 12,500, मध्यिका (Q₂) = रु. 17,273 र तेस्रो (Q₃) = रु. 22,500 हुन् ।

उदाहरण 4

विद्यार्थीको एक हप्तासम्म खाजा खर्चबापतको रकम र विद्यार्थी सङ्ख्या तल तालिकामा दिइएको छ । तथ्याङ्कको माथिल्लो चतुर्थांशको मान 460 भए, p को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| खर्च (रु. मा) | 100-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500-600 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 15 | 18 | P | 20 | 17 |

समाधान

विद्यार्थी खर्च विवरण

| खर्च रु. (X) | विद्यार्थी सङ्ख्या (f) | भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता (cf) |
|--------------|------------------------|---------------------------------|
| 100 - 200 | 15 | 15 |
| 200 - 300 | 18 | 33 |
| 300 - 400 | p | 33 + p |
| 400 - 500 | 20 | 53 + p |
| 500 - 600 | 17 | 70 + p |

यहाँ तेस्रो चतुर्थांश (Q₃) = 460 छ । त्यसैले तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तर (400-500)

अब तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको तल्लो सीमा (L) = 400

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरभन्दा अगिल्लो वर्गान्तरको सञ्चित बारम्बारता (cf) = 33 + p

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता (f) = 20

तेस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) = 500 - 400 = 100

$$\begin{aligned}
\text{हामीलाई थाहा छ, तेस्रो चतुर्थांश (Q}_3\text{)} &= L + \frac{3N - cf}{f} \times h \\
\text{अथवा, } 460 &= 400 + \frac{3(70 + p) - (33 + p)}{20} \times 100
\end{aligned}$$

$$\text{अथवा, } 460 - 400 = \frac{210 + 3p - 132 - 4p}{4 \times 20} \times 100$$

$$\text{अथवा, } 60 = \frac{78 - p}{4} \times 5$$

$$\text{अथवा, } 78 - p = \frac{60 \times 4}{5} = 48$$

$$\text{अथवा, } 78 - 48 = p$$

$$\text{अथवा, } 30 = p$$

$$\therefore p = 30$$

अतः छुटेको मान (p) = 30

अभ्यास 13.4

1. तल दिइएका तथ्याङ्कबाट Q_1 र Q_3 को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 10, 12, 14, 11, 22, 15, 27, 14, 16, 13, 25

(ख)

| | | | | | | | | | | |
|--------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| प्राप्ताङ्क | 42 | 48 | 49 | 53 | 56 | 59 | 60 | 65 | 68 | 70 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 2 | 3 | 5 | 8 | 9 | 11 | 7 | 8 | 6 | 4 |

2. तलक दिइएका तथ्याङ्कबाट Q_1 र Q_3 को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

| | | | | | | | | |
|--------------------|-----|-----|-----|------|-------|-------|-------|-------|
| उमेर | 2-4 | 4-6 | 6-8 | 8-10 | 10-12 | 12-14 | 14-16 | 16-18 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 5 | 12 | 25 | 26 | 24 | 28 | 20 | 15 |

(ख)

| | | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| प्राप्ताङ्क | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 2 | 3 | 6 | 12 | 13 | 11 | 7 |

(ग)

| | | | | | | | |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| उचाइ (cm) | 100-110 | 110-120 | 120-130 | 130-140 | 140-150 | 150-160 | 160-170 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 3 | 4 | 9 | 15 | 20 | 14 | 7 |

(घ)

| | | | | | | |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ज्याला (रु. हजारमा) | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 |
| कामदार सङ्ख्या | 6 | 11 | 21 | 34 | 25 | 22 |

(ङ)

| | | | | | | | |
|--------------------|------|-------|-------|-------|--------|---------|---------|
| खाजा खर्च (रु.) | 0-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 | 80-100 | 100-120 | 120-140 |
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 8 | 12 | 15 | 14 | 12 | 9 | 10 |

| | | | | | | | |
|-----|---------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| (च) | समय (मिनेटमा) | 0 - 10 | 10 - 20 | 20 - 30 | 30 - 40 | 40 - 50 | 50 - 60 |
| | बारम्बारता | 5 | 3 | 10 | 6 | 4 | 2 |

| | | | | | | | |
|-----|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (छ) | प्राप्ताङ्क | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 | 40-45 | 45-50 |
| | विद्यार्थी सङ्ख्या | 2 | 5 | 8 | 6 | 4 | 5 |

3. (क) यदि $Q_1 =$ वर्ष 8 भए, k को मान कति होला ?

| | | | | | | |
|---------------|-----|------|-------|-------|-------|-------|
| उमेर (वर्षमा) | 0-6 | 6-12 | 12-18 | 18-24 | 24-30 | 30-36 |
| मानिस सङ्ख्या | 9 | 6 | 5 | k | 7 | 9 |

(ख) यदि $Q_1 = 31$ भए छुटेको बारम्बारता कति होला ?

| | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| वर्गान्तर | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
| बारम्बारता | 4 | 5 | ? | 8 | 7 | 6 |

(ग) यदि $Q_3 = 53.375$ भए q को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

| | | | | | | |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| तौल (in kg) | 40-44 | 44-48 | 48-52 | 52-56 | 56-60 | 60-64 |
| बारम्बारता | 8 | 10 | 14 | q | 3 | 1 |

4. तलको तथ्याङ्कबाट Q_1 र Q_3 को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

| | | | | | | | | |
|-----|------------|------|------|------|------|------|------|------|
| (क) | उचाइ (cm) | <125 | <130 | <135 | <140 | <145 | <150 | <155 |
| | बारम्बारता | 0 | 5 | 11 | 24 | 45 | 60 | 72 |

| | | | | | | | | | |
|-----|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| (ख) | तौल (lbs) | 110-119 | 120-129 | 130-139 | 140-149 | 150-159 | 160-169 | 170-179 | 180-189 |
| | बारम्बारता | 5 | 7 | 12 | 20 | 16 | 10 | 7 | 3 |

| | | | | | | | |
|-----|-----------------------------|-----------------|---------|---------|---------|---------|------------------|
| (ग) | खर्च (रु.मा) (प्रति दिन) | 100 भन्दा कम | 100-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500 भन्दा बढी |
| | बारम्बारता | 22 | 34 | 52 | 20 | 19 | 13 |

| | | | | | | |
|-----|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| (घ) | प्राप्ताङ्क | 20 भन्दा कम | 40 भन्दा कम | 60 भन्दा कम | 80 भन्दा कम | 100 भन्दा कम |
| | विद्यार्थी सङ्ख्या | 21 | 44 | 66 | 79 | 90 |

5. (क) तल दिइएका आँकडाहरूले कुनै एउटा आन्तरिक परीक्षणमा 30 विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई जनाउँछ। उक्त आँकडालाई 10 को वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिका बनाई पहिलो र तेस्रो चतुर्थांशहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

42, 65, 78, 70, 62, 50, 72, 34, 30, 40, 58, 53, 30, 34, 51, 54, 42, 59, 20, 40, 42, 60, 25, 35, 35, 28, 46, 60, 47, 52

- (ख) एउटा कुखुरा फार्ममा हरेक दिन उत्पादित अन्डाको सङ्ख्यालाई तल दिइएको छ। उक्त आँकडालाई 20 को वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिका बनाई पहिलो र तेस्रो चतुर्थांशहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

32, 87, 17, 51, 99, 79, 64, 39, 25, 95, 53, 49, 78, 32, 42, 48, 59, 86, 69, 57, 15, 27, 44, 66, 77, 92.

परियोजना कार्य

विद्यालयका कक्षा 9 र 10 का 100 जना विद्यार्थीले आन्तरिक परीक्षा 100 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरेको जम्मा प्राप्ताङ्क सोधेर लेख्नुहोस्।

- (क) उक्त तथ्याङ्कलाई उपयुक्त वर्गान्तरको बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस्।
 (ख) तथ्याङ्कको प्रयोग गरी भन्दा ठुलो र भन्दा सानो सञ्चित बारम्बारता तालिका तयार पार्नुहोस्।
 (ग) सबै कार्यको सिलसिलेवार रूपमा प्रतिवेदन तयार गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

उत्तर

1. (क) 12, 22 (ख) 53, 65
 2. (क) 7.74, 13.73 (ख) 42.08, 64.09 (ग) 131.33 cm, 152.14 cm
 (घ) रु. 230.35, रु.334.5 (ङ) 40, 98.33
 (च) 18.3 मिनेट, 37.5 मिनेट (छ) 30.31, 41.87
 3. (क) 8 (ख) 10 (ग) 16
 4. (क) 137.69, 148 cm (ख) 136.16, 159.5 (ग) 152.94, 360 (घ) 21.3, 62.3
 5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस्।

14.0 पुनरवलोकन (Review)

उपयुक्त समूहमा बसी तलका प्रश्नका बारेमा छलफल गरी उत्तर खोज्नुहोस् :

- (क) एउटा डाइसलाई एक पटक उफार्दा जोर वा रूढ सङ्ख्या पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (ख) राम्ररी फिटिएको एक गड्डी तासबाट एउटा तास थुन्दा एक्का वा मुहार आकृति आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (ग) दुईओटा सिक्कालाई सँगै उफार्दा दुईओटैमा अग्रभाग [Head (H)] आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

माथिका प्रश्नका आधारमा,

- (क) प्रत्येक परीक्षणको नमुना क्षेत्र लेख्नुहोस् ।
- (ख) प्रत्येक घटना लेख्नुहोस् ।
- (ग) प्रत्येक घटनाको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) प्रत्येक घटना कस्ता कस्ता घटना हुन् पत्ता लगाउनुहोस् ।
- प्रत्येक समूहले समूह कार्य तयार गरी उक्त कार्य कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

14.1 सम्भाव्यताका सिद्धान्तहरू (Principles of Probabilities)

(क) पारस्परिक निषेधक घटना (Mutually Exclusive)

क्रियाकलाप 1

एउटा डाइसलाई एक पटक उफार्दा माथिपट्टि

- (क) जोर सङ्ख्या वा विजोर सङ्ख्या पर्ने
- (ख) जोर सङ्ख्या वा रूढ सङ्ख्या पर्ने घटना लेखौं ।

यहाँ डाइसको माथिपट्टि देखिन सक्ने सङ्ख्याको समूह $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

माथिपट्टि देखिन सक्ने जोर सङ्ख्याको समूहलाई (A),

माथिपट्टि देखिन सक्ने विजोर सङ्ख्याको समूहलाई (B) र

माथिपट्टि देखिन सक्ने रूढ सङ्ख्याको समूहलाई (C) मान्दा,

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{2, 3, 5\} \text{ हुन्छ ।}$$

माथिको उदाहरणमा हेर्दा घटना A र B मा कुनै पनि सदस्य साभ्मा छैनन् । त्यसैले घटना A आउंदा घटना B आउन सक्दैन । तसर्थ A र B पारस्परिक निषेधक घटना हुन् ।

फेरि घटना A र C मा साभ्मा सदस्य 2 छन् । यदि डाइस उर्फादा 2 आयो भने त्यो जोर सङ्ख्या पनि हुन्छ र रूढ सङ्ख्या पनि हुन्छ । त्यसैले घटना A आउंदा घटना C पनि आउन सक्छ । तसर्थ A र C पारस्परिक निषेधक घटना होइनन् ।

त्यस्तै B र C कस्ता घटना होलान् ? छलफल गरी लेख्नुहोस् ।

कुनै पनि परीक्षणमा एउटा घटनाले अर्को घटनाको सम्भाव्यतालाई निषेध गर्छ भने ती घटनालाई पारस्परिक निषेधक घटना (Mutually Exclusive Events) भनिन्छ । त्यसै गरी एउटा घटना आउदा अर्को घटना पनि आउन सक्ने घटना पारस्परिक निषेधक घटना होइनन् । माथिको उदाहरणमा घटनाहरू A र B पारस्परिक निषेधक घटना हुन् भने घटनाहरू A र C पारस्परिक निषेधक घटना होइनन् ।

(ख) सम्भाव्यताको जोडको सिद्धान्त (Addition Law of Probability)

क्रियाकलाप 2

एउटा डाइसलाई उर्फादा बन्न सक्ने नमुना क्षेत्र (S) लेख्नुहोस् । जोर सङ्ख्या आउन सक्ने घटना (A), विजोर सङ्ख्या आउन सक्ने घटना (B), रूढ सङ्ख्या आउन सक्ने घटना (C) र यिनीहरूको गणनात्मकता र सम्भाव्यता पनि लेख्नुहोस् । यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर लेखी निष्कर्षमा पुग्नुहोस् :

(क) जोर सङ्ख्या वा विजोर सङ्ख्या आउने सम्भाव्यता कति होला ?

(ख) जोर सङ्ख्या वा रूढ सङ्ख्या आउने सम्भाव्यता कति होला ?

यहाँ एउटा डाइसलाई उर्फादा बन्न सक्ने नमुना क्षेत्र (S) = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, $n(S) = 6$

| घटना | गणनात्मकता | सम्भाव्यता |
|------------------------------------|------------|--|
| जोर सङ्ख्या आउने (A) = {2, 4, 6} | $n(A) = 3$ | $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ |
| विजोर सङ्ख्या आउने (B) = {1, 3, 5} | $n(B) = 3$ | $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ |
| रूढ सङ्ख्या आउने (C) = {2, 3, 5} | $n(C) = 3$ | $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ |

(क) जोर सङ्ख्या वा बिजोर सङ्ख्या आउने = {2, 4, 6} वा {1, 3, 5}

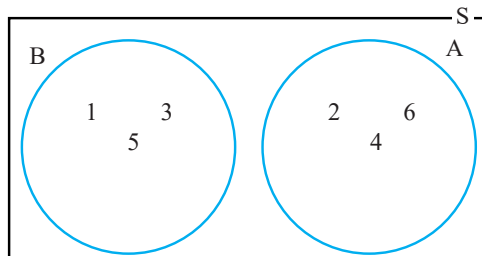
$$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore n(A \cup B) = 6$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\text{फेरि } P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



(ख) जोर सङ्ख्या वा रूढ सङ्ख्या आउने = {2, 4, 6} वा {2, 3, 5}

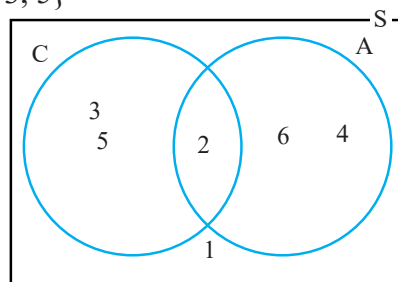
$$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad \therefore n(A \cup C) = 5$$

$$P(A \cup C) = \frac{n(A \cup C)}{n(S)} = \frac{5}{6}$$

$$\text{यहाँ } A \cap C = \{2\} \quad \therefore n(A \cap C) = 1$$

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup C) = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6} = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$



यदि A र B दुई पारस्परिक निषेधक घटना भएमा $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ हुन्छ र यदि A र B दुई पारस्परिक निषेधक घटना नभएमा $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ हुन्छ । यसलाई सम्भाव्यताको जोडको सिद्धान्त (Addition Law of Probability) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

एक हप्ताको बारका नाममध्ये एउटा नाम लिँदा W बाट सुरु हुने अथवा T बाट सुरु हुने नाम आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ $S = \{\text{Sunday, Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday, Friday, Saturday}\}$;
 $n(S) = 7$

मानौं, $A = \{W \text{ बाट सुरु हुने बारहरू}\} = \{\text{Wednesday}\}$; $n(A) = 1 \therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{7}$

$B = \{T \text{ बाट सुरु हुने बारहरू}\} = \{\text{Tuesday, Thursday}\}$; $n(B) = 2 \therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{7}$

W बाट सुरु हुने अथवा T बाट सुरु हुने नाम आउने सम्भाव्यता $P(A \cup B) = ?$

यहाँ A र B पारस्परिक निषेधित घटना हुन् ।

$$\text{तसर्थ } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

अतः W बाट सुरु हुने अथवा T बाट सुरु हुने बारको नाम आउने सम्भाव्यता = $\frac{3}{7}$

उदाहरण 2

एउटा भोलामा 4 ओटा कालो, 6 ओटा पहेँलो र 5 ओटा रातो उत्रै र उस्तै बलहरू छन् :

- (क) एउटा बल नहेरीकन निकाल्दा काला अथवा राता बल आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) एउटा बल नहेरीकन निकाल्दा पहेँला अथवा राता बल आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ जम्मा बलहरूको सङ्ख्या, $n(S) = (4 + 6 + 5) = 15$

कालो बलको सङ्ख्या, $n(B) = 4$, कालो बल आउने सम्भाव्यता $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{15}$

पहेँला बलको सङ्ख्या $n(Y) = 6$, पहेँलो बल आउने सम्भाव्यता $P(Y) = \frac{n(Y)}{n(S)} = \frac{6}{15}$

राता बलको सङ्ख्या $n(R) = 5$, रातो बल आउने सम्भाव्यता $P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{5}{15}$

- (क) कालो अथवा रातो बल आउने $P(B \cup R) = ?$

यी घटना पारस्परिक निषेधक भएकाले सम्भाव्यताको जोड सिद्धान्तअनुसार,

$$P(B \cup R) = P(B) + P(R) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

अतः कालो अथवा रातो बल आउने सम्भाव्यता $= \frac{3}{5}$

- (ख) पहेँलो अथवा रातो बल आउने $P(Y \cup R) = ?$

यी घटना पारस्परिक निषेधक भएकाले सम्भाव्यताको जोड सिद्धान्तअनुसार,

$$P(Y \cup R) = P(Y) + P(R) = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$

अतः पहेँलो अथवा रातो बल आउने सम्भाव्यता $= \frac{11}{15}$

उदाहरण 3

1 देखि 20 सम्म लेखिएका जम्मा 20 ओटा बराबर अङ्क पत्तीहरूबाट नहेरीकन एउटा पत्ती थुत्दा 4 ले भाग जाने अथवा 3 ले भाग जाने अङ्क पत्ती आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

जम्मा अङ्क पत्ती सङ्ख्या $n(S) = 20$

मानौं, $A = 1$ देखि 20 सम्मका 4 ले भाग जाने सङ्ख्या $= \{4, 8, 12, 16, 20\}$

$$n(A) = 5 \quad \therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{20}$$

$B = 1$ देखि 20 सम्मका 3 ले भाग जाने सङ्ख्या $= \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$$n(B) = 6 \quad \therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{20}$$

$A \cap B = \{12\}$; (A र B मा 12 भएको पत्ती साभ्ना भएकाले)

$$n(A \cap B) = 1 ; \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = ?$$

यहाँ A र B पारस्परिक निषेधक घटना नभएकाले

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20}$$

$$= \frac{5+6-1}{20}$$

$$= \frac{10}{20}$$

$$= \frac{1}{2}$$

अतः 4 ले भाग जाने अथवा 3 ले भाग जाने अड्क पत्ती आउने सम्भाव्यता = $\frac{1}{2}$

उदाहरण 4

52 पत्तीको एक गड्डी तासलाई राम्ररी फिटेर कुनै एउटा तासको पत्ती थुन्दा बादशाह, मिस्सी अथवा गुलाम पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ जम्मा तासको सङ्ख्या, $n(S) = 52$

$$\text{बादशाहको सङ्ख्या, } n(K) = 4 ; \quad P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\text{मिस्सीको सङ्ख्या, } n(Q) = 4 ; \quad P(Q) = \frac{n(Q)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\text{गुलामको सङ्ख्या, } n(J) = 4 ; \quad = \frac{n(J)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

एउटा तास बादशाह, मिस्सी अथवा गुलाम पर्ने सम्भाव्यता $P(K \cup Q \cup J) = ?$

यहाँ K, Q र J तीनैओटा घटना पारस्परिक निषेधक घटना हुन् ।

तसर्थ बादशाह वा मिस्सी वा गुलाम पर्ने सम्भाव्यता $P(K \cup Q \cup J) = P(K) + P(Q) + P(J)$

$$= \frac{1}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{3}{13}$$

अतः बादशाह, मिस्सी अथवा गुलाम पर्ने सम्भाव्यता = $\frac{3}{13}$

1. दिइएका घटना पारस्परिक निषेधक हुन् वा होइनन् पत्ता लगाउनुहोस् :

- (क) एउटा सिक्का उफार्दा, A = अग्रभाग (H) आउने र B = पश्चभाग (T) आउने
- (ख) एउटा डाइस उफार्दा, P = जोर सङ्ख्या आउने र O = विजोर सङ्ख्या आउने
- (ग) राम्ररी फिटिएका तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा, F = मुहार आकृति भएको आउने र A = हुकुम आउने
- (घ) राम्ररी फिटिएका तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा, T = 10 आउने र A = एक्का आउने
- (ङ) 5 ओटा सेता, 8 ओटा हरिया र 7 ओटा निला बल भएको भोलाबाट एउटा बल नहेरीकन निकाल्दा,
G = हरियो बल आउने र B = निलो बल आउने

2. दिइएका घटनाका सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :

- (क) दुईओटा सिक्का उफार्दा कम्तीमा एउटा अग्रभाग (H) आउने
- (ख) एउटा डाइस उफार्दा रूठ सङ्ख्या आउने
- (ग) राम्ररी फिटिएको तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा मुहार आकृति भएको आउने
- (घ) अङ्ग्रेजी महिनाअनुसार कुनै एउटा बालकको जन्म 30 दिन भएको महिनामै हुने
- (ङ) 4 ओटा सेता, 7 ओटा हरिया र 5 ओटा निला बल भएको भोलाबाट एउटा बल नहेरीकन निकाल्दा सेतो बल आउने

3. तलका घटनाको सम्भाव्यता कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

- (क) 6 ओटा राता, 5 ओटा पहेँला र 7 ओटा निला उही आकारको बल भएको भोलाबाट एउटा बल नहेरीकन निकाल्दा रातो अथवा निलो बल आउने
- (ख) तीनओटा सिक्कालाई सँगै उफार्दा तीनओटा अग्रभाग (H) आउने अथवा तीनओटा पश्चभाग (T) आउने
- (ग) एउटा डाइस उफार्दा रूठ सङ्ख्या आउने अथवा 4 आउने
- (घ) राम्ररी फिटिएको तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा 10 आउने वा एक्का (A) आउने
- (ङ) राम्ररी फिटिएको तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा मुहार आकृति भएको आउने वा हुकुम आउने

4. तलका घटनाको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :

- (क) MATHEMATICS मा भएका अक्षरहरूमा एउटा तान्दा M अथवा T आउने
- (ख) STATISTICS मा भएका अक्षरहरूमा एउटा अक्षर तान्दा S अथवा T आउने

- (ग) RHODODENDRON मा भएका अक्षरहरूमा एउटा अक्षर तान्दा O अथवा D आउने
- (घ) एउटा कक्षाका 15 विद्यार्थीमध्ये 8 जनाले अङ्ग्रेजी, 9 जनाले गणित र 4 जनाले दुवै विषय छाने । एक जना विद्यार्थीलाई नहेरीकन छनोट गर्दा गणित वा अङ्ग्रेजी छनोट गर्ने विद्यार्थी पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (क) $\frac{3}{4}$ (ख) $\frac{1}{2}$ (ग) $\frac{3}{13}$ (घ) $\frac{1}{3}$ (ङ) $\frac{1}{4}$
3. (क) $\frac{13}{18}$ (ख) $\frac{1}{4}$ (ग) $\frac{2}{3}$ (घ) $\frac{2}{13}$ (ङ) $\frac{11}{26}$
4. (क) $\frac{4}{11}$ (ख) $\frac{3}{5}$ (ग) $\frac{1}{2}$ (घ) $\frac{13}{15}$

14.2 अनाश्रित र पराश्रित घटना (Independent and DDependent Events)

क्रियाकलाप 3

तलका दुई अवस्थाबाट प्राप्त सम्भव्यतालाई तुलना गर्नुहोस् :

एउटा भोलामा 5 ओटा राता, 7 ओटा हरिया र 4 ओटा निला समान आकारका बल छन् ।

(अ) पहिलो अवस्था (पुनः राखेर)

- (क) पहिलो बल रातो आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (ख) फेरि उक्त बललाई सोही भोलामा राखेर दोस्रो बल निकाल्दा दोस्रो बल रातो आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(आ) दोस्रो अवस्था (पुनः नराखेर)

- (क) पहिलो बल रातो आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (ख) फेरि उक्त बललाई सोही भोलामा नराखेर दोस्रो बल निकाल्दा दोस्रो बल रातो आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

माथिका दुई अवस्थाबाट प्राप्त सम्भाव्यतालाई तुलना गर्दा,

| | |
|--|--|
| (अ) पहिलो अवस्था (पुनः राखेर) | (आ) दोस्रो अवस्था (पुनः नराखेर) |
| <p>रातो बलको सङ्ख्या $n(R) = 5$</p> <p>पहिलो बल रातो बल पर्ने सम्भाव्यता $P_1(R)$</p> $= \frac{n(R)}{n(S)}$ $= \frac{5}{16}$ <p>अब भोलामा 15 बल बाँकी रहे ।</p> <p>पहिलो बललाई पुनः भोलामा राखेपछि अब भोलामा 16 ओटा नै बल हुन्छन् ।</p> <p>दोस्रो बल पनि रातो आउने सम्भाव्यता</p> $P_2(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{5}{16}$ नै भयो । | <p>राता बलको सङ्ख्या $n(R) = 5$</p> <p>पहिलो बल रातो बल पर्ने सम्भाव्यता</p> $P_1(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{5}{16}$ <p>अब भोलामा 15 बल बाँकी रहे ।</p> <p>पहिलो बललाई पुनः भोलामा नराखेमा रातो बल 1 ओटा कम भयो र भोलामा 15 ओटा बल बाँकी रहन्छन् ।</p> <p>दोस्रो बल पनि रातो आउने सम्भाव्यता $P_2(R)$</p> $\frac{n(R)}{n(S)} = \frac{4}{15}$ भयो । |
| पहिलो घटनाले दोस्रो घटनाको सम्भाव्यतालाई केही असर गर्दैन । तसर्थ यिनीहरू अनाश्रित घटना (Independent Event) भए । | पहिलो घटनाले दोस्रो घटनाको सम्भाव्यतालाई असर गर्‍यो । तसर्थ यिनीहरू पराश्रित घटना (Dependent Event) भए । |

दुई वा दुईभन्दा बढी घटनामा एउटाको प्राप्तिले अर्को घटनालाई असर गर्दैन भने त्यस्ता घटनालाई अनाश्रित घटना (Independent Event) भनिन्छ । कुनै परीक्षणमा दुई वा दुईभन्दा बढी घटनामा एउटाको प्राप्तिले अर्को घटनाको सम्भाव्यतामा प्रभाव पार्ने घटनालाई पराश्रित घटना (Dependent Events) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा सिक्का र एउटा डाइस एकै समय उफार्दा सिक्काको अग्रभाग (H) र डाइसमा 5 आउने घटना कस्ता घटना हुन् ?

समाधान

यहाँ एउटा सिक्का र एउटा घनाकार डाइसलाई एकै साथ उफार्दा सिक्कामा H अथवा T मध्ये कुनै पनि आउन सक्छ, भने डाइसमा 1 देखि 6 अङ्कसम्म कुनै पनि आउन सक्छ । सिक्कामा आउने घटनाले डाइसमा आउने घटनालाई कुनै असर गर्दैनन् त्यसैले ती घटनाहरू अनाश्रित हुन् ।



उदाहरण 2

52 पत्तीको एक गड्डी तासलाई राम्ररी फिटेर पहिले निकालेको तास पुनः नराखी एकपछि अर्को गर्दै 2 ओटा तास निकाल्दा दुवै तास बादशाह (K) नै पर्ने घटना कस्ता घटना हुन् ? लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर पहिलो तास निकाल्दा उक्त तासको गड्डीमा जम्मा 4 ओटा K हुन्छन्, त्यसैले $n(S) = 52$, $n(K) = 4$ हुन्छ ।

K आउने सम्भाव्यता $P_1(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4}{52}$ हुन्छ । फेरि उक्त K लाई बाहिर नै राख्दा जम्मा 51 ओटा मात्र बाँकी रहन्छ । अब $n(S) = 51$, $n(K) = 3$ हुन्छ ।

दोस्रो K आउने सम्भावना $P_2(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{3}{51}$ भयो । यहाँ दोस्रो घटनाको सम्भाव्यता, पहिलो घटनाको सम्भाव्यतामा भर पर्ने देखियो ।

तसर्थ यी दुई पराश्रित घटना भए ।

14.3 सम्भाव्यताको गुणन सिद्धान्त (Multiplication Principle of Probability)

क्रियाकलाप 4

दिइएको समस्याको समाधान दुई दुई जनाको समूहमा बसी गर्नुहोस् :

एउटा सिक्का र एउटा घनाकार डाइसलाई एकै साथ उफार्दा,

(क) सम्भावित नमुना क्षेत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) सिक्कामा H र डाइसमा 4 पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

(ग) यी कस्ता प्रकारका घटना हुन् ?

एउटा सिक्का र एउटा घनाकार डाइसलाई एकै साथ उफार्दा सिक्कामा H वा T मध्ये कुनै पनि आउन सक्छ भने डाइसमा 1 देखि 6 सम्म कुनै पनि आउन सक्छ । त्यसैले सिक्कामा आउने घटनाले डाइसमा आउने घटनालाई कुनै असर गर्दैनन् त्यसैले ती घटना अनाश्रित हुन् ।

यहाँ सिक्काको नमुना क्षेत्र $(S_1) = \{H, T\}$ $\therefore n(S_1) = 2$

डाइसको नमुना क्षेत्र $(S_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\therefore n(S_2) = 6$

एक सिक्का र डाइस सँगै उफार्दा बन्ने सम्भावित नमुना क्षेत्र $(S) = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$ $\therefore n(S) = 12$

अब सिक्कामा H आउने र डाइसमा 4 पर्ने सम्भाव्यता कति होला ?

A = सिक्कामा H आउने $\therefore n(A) = 1$ र B = डाइसमा 4 आउने $\therefore n(B) = 1$

H आउने र डाइसमा 4 पर्ने $(A \cap B) = \{(H, 4)\}$; $n(A \cap B) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S_1)} = \frac{1}{2} \text{ र } P(B) = \frac{n(B)}{n(S_2)} = \frac{1}{6}$$

$$\text{त्यसै गरी } P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

अब माथिको समाधानबाट केही निष्कर्ष निकाल्न सक्नुहुन्छ ?



$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = P(A \cap B)$$

यदि दुईओटा घटना A र B पारस्परिक अनाश्रित छन् भने,

$$P(A \text{ र } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 3

एउटा सिक्का र तीन रङ हरियो, निलो र रातो भएको स्पिनरलाई सँगै घुमाउँदा, सिक्कामा T र स्पिनरको सुई हरियो रङमा अडिने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

$$\text{सिक्काको नमुना क्षेत्र } (S_1) = \{H, T\} \quad \therefore n(S_1) = 2$$

$$\text{सिक्काको T आउने सम्भाव्यता } P(T) = \frac{n(T)}{n(S_1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{स्पिनरको नमुना क्षेत्र } (S_2) = \{\text{हरियो, निलो, रातो}\}$$

$$\therefore n(S_2) = 3$$

$$\text{स्पिनरको सुई हरियामा अडिने सम्भाव्यता } P(G) = \frac{n(G)}{n(S_2)} = \frac{1}{3} \text{ सिक्काको T आउने र स्पिनरको सुई हरियामा अडिने सम्भाव्यता } P(T \cap G) = ?$$

सिक्काको T आउने र स्पिनरको सुई हरियोमा अडिने घटना पारस्परिक अनाश्रित घटना हुन् ।

$$\text{तसर्थ } P(T \cap G) = P(T) \times P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

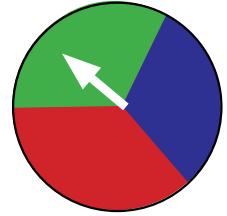
वैकल्पिक तरिका

सिक्का र स्पिनरको सम्भावित नमुना क्षेत्र

$$S = \{(H, \text{हरियो}), (H, \text{निलो}), (H, \text{रातो}), (T, \text{हरियो}), (T, \text{निलो}), (T, \text{रातो})\} \quad \therefore n(S) = 6$$

$$\text{सिक्काको T आउने र स्पिनरको सुई हरियोमा अडिने } (A) = \{(T, \text{हरियो})\} \quad \therefore n(A) = 1$$

$$\text{सिक्काको T आउने र स्पिनरको सुई हरियोमा अडिने सम्भाव्यता } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$



उदाहरण 4

52 पत्तीको एक गड्डी तासलाई राम्ररी फिटेर एउटा तास थुतेर पुनः राखी दोस्रो तास थुन्दा पहिलो तास बादशाह (K) र दोस्रो तास एक्का (A) पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर पहिलो तास निकाल्दा उक्त तासको गड्डीमा जम्मा 4 ओटा K हुन्छन्, त्यसैले $n(S) = 52$, $n(K) = 4$ हुन्छ ।

तसर्थ K आउने सम्भाव्यता $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4}{52}$ हुन्छ ।

पहिलो तासलाई पुनः सोही गड्डीमा राख्दा जम्मा 52 ओटै तास भए । एक्काको सङ्ख्या पनि 4 नै हुन्छ ।

त्यसैले $n(S) = 52$, $n(A) = 4$ हुन्छ ।

दोस्रो तास A आउने सम्भाव्यता $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52}$ नै भयो ।

पहिलो तास K र दोस्रो तास A आउने सम्भाव्यता $P(K \cap A) = ?$

यहाँ दुवै घटना अनाश्रित घटना भए ।

हामीलाई थाहा छ $P(K \cap A) = P(K) \times P(A) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$

अतः पहिलो तास बादशाह (K) र दोस्रो तास एक्का (A) पर्ने सम्भाव्यता $= \frac{1}{169}$

उदाहरण 5

52 पत्तीको एक गड्डी तासलाई राम्ररी फिटेर पहिले निकालेको तास पुनः नराखी एकपछि अर्को गर्दै 2 ओटा तास थुन्दा पहिलो तास बादशाह (K) र दोस्रो तास एक्का (A) पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ 52 पत्ती तासमा जम्मा 4 ओटा K हुन्छन् । त्यसैले $n(S) = 52$, $n(K) = 4$ हुन्छ ।

तसर्थ K आउने सम्भाव्यता $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4}{52}$ हुन्छ ।

पहिलो तासलाई पुनः सोही गड्डीमा नराख्दा जम्मा $52 - 1 = 51$ ओटा तास भए । एक्काको सङ्ख्या 4 हुन्छ ।

त्यसैले, $n(S_1) = 51$, $n(A) = 4$ हुन्छ ।

दोस्रो तास A आउने सम्भाव्यता $P(A) = \frac{n(A)}{n(S_1)} = \frac{4}{51}$ भयो ।

पहिलो तास K र दोस्रो तास A आउने सम्भाव्यता $P(K \cap A) = ?$

यहाँ दुवै घटना पारस्परिक आश्रित घटना भए ।

$$\text{हामीलाई थाहा छ } P(K \cap A) = P(K) \times P(A) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{663}$$

अतः पहिलो तास बादशाह (K) र दोस्रो तास एक्का (A) पर्ने सम्भाव्यता = $\frac{4}{663}$

उदाहरण 6

एउटा भोलामा 5 ओटा निला र 6 ओटा राता गुच्चाहरू छन्। तीमध्ये दुईओटा गुच्चा नहेरी निकाल्दा तलका अवस्थामा पहिलो गुच्चा रातो र दोस्रो निलो गुच्चा आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

- (क) पहिलो गुच्चालाई पुनः राखेर दोस्रो निकाल्दा
 (ख) पहिलो नराखीकन दोस्रो गुच्चा निकाल्दा ।

समाधान

एउटा भोलामा भएका जम्मा गुच्चा सङ्ख्या $n(S) = 5 + 6 = 11$

एउटा गुच्चा निकाल्दा,

$$\text{रातो गुच्चा पर्ने सम्भाव्यता } P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{6}{11}$$

$$\text{निलो गुच्चा पर्ने सम्भाव्यता } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{11}$$

(क) पहिलो गुच्चा पुनः भोलामा राखी एकपछि अर्को क्रमशः निकाल्दा,

पहिलो गुच्चा रातो र दोस्रो गुच्चा निलो पर्ने सम्भाव्यता $P(R \cap B) = ?$

$$\text{पहिलो गुच्चा रातो आउने सम्भाव्यता } P(R) = \frac{6}{11}$$

$$\text{दोस्रो गुच्चा निलो आउने सम्भाव्यता } P(B) = \frac{5}{11}$$

$$\begin{aligned} \text{पहिलो गुच्चा रातो र दोस्रो गुच्चा निलो पर्ने सम्भाव्यता } P(R \cap B) &= P(R) \times P(B) \\ &= \frac{6}{11} \times \frac{5}{11} = \frac{30}{121} \end{aligned}$$

(ख) पहिलो गुच्चा पुनः भोलामा नराखी एकपछि अर्को क्रमशः निकाल्दा,

$$\text{पहिलो गुच्चा रातो आउने सम्भाव्यता } P(R) = \frac{6}{11}$$

अब भोलामा जम्मा $11 - 1 = 10$ ओटा गुच्चा रहे ।

$$\text{दोस्रो गुच्चा निलो आउने सम्भाव्यता } P(B) = \frac{5}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{पहिलो गुच्चा रातो र दोस्रो गुच्चा निलो पर्ने सम्भाव्यता } P(R \cap B) &= P(R) \times P(B) \\ &= \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

अभ्यास 14.2

1. एउटा सिक्का र एउटा डाइस एकसाथ उफार्दा सिक्कामा पछिल्लो भाग (T) र डाइसमा 3 आउने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् ।
2. एउटा बाकसमा 2 ओटा हरिया, 3 ओटा राता र 5 ओटा काला उस्तै र उत्रै बल राखिएका छन् । त्यसबाट नहेरीकन एउटा बल निकाली पुनः त्यसमा राखी अर्को बल नहेरी निकाल्दा निम्नअनुसारका बलहरू आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :
 - (क) दुवै एउटै रङका
 - (ख) दुईओटा भिन्ना भिन्नै रङका
 - (ग) कम्तीमा एउटा बल रातो अथवा कालो रङको
3. एउटा बाकसमा 2 ओटा हरिया, 3 ओटा राता र 5 ओटा कालो उस्तै र उत्रै बलहरू राखिएका छन् । त्यसबाट नहेरीकन एउटा बल निकाली पुनः त्यसमा नराखी अर्को बल नहेरी निकाल्दा निम्नअनुसारका बलहरू आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :
 - (क) दुवै एउटै रङका
 - (ख) दुईओटा भिन्ना भिन्नै रङका
 - (ग) कम्तीमा एउटा बल रातो अथवा कालो रङको
4. एउटा भोलामा राखिएका उस्तै उत्रै 7 ओटा राता र 8 ओटा पहेँला बलमा दुईओटा बल पालैपालो निकाल्दा दुवै पटक रातो अथवा पहेँलो बल आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् । (पहिले निकालिएको बल पुनः भोलामा नराख्ने ।)
5. राम्ररी फिटिएको 52 पत्तीको एक गड्डी सेट तासबाट नहेरीकन एउटा तास भिकेर पुनः त्यसमा नराखी नहेरीकनै दोस्रो तास भिक्दा,
 - (क) दुवै पटक एक्का पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (ख) एक एकओटा एक्का वा वादशाह पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. एउटा भोलामा रातो, हरियो र कालो एक एकओटा उस्तै र उत्रै गुच्चा राखिएका छन् । उक्त भोलाबाट नहेरीकन एउटा गुच्चा निकाल्ने र पुनः त्यसमा नराखी अर्को गुच्चा निकाल्दा हुने सबै सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

सम्भाव्यताको प्रयोग दैनिक जीवनमा कहाँ कहाँ हुन्छ, खोजी गर्नुहोस् । यसको सकारात्मक प्रयोग सम्बन्धमा एक लेख तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

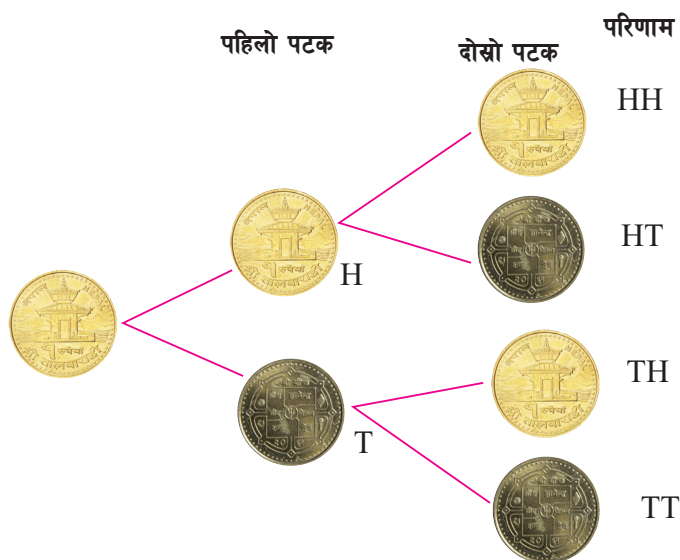
1. $\frac{1}{12}$ 2. (क) $\frac{19}{50}$ (ख) $\frac{31}{50}$ (ग) $\frac{24}{25}$
 3. (क) $\frac{14}{45}$ (ख) $\frac{31}{45}$ (ग) $\frac{44}{45}$ 4. $\frac{7}{15}$
 5. (क) $\frac{1}{221}$ (ख) $\frac{8}{663}$ 6. $\frac{1}{6}$

14.3 वृक्ष चित्र (Tree Diagram)

क्रियाकलाप 5

एउटा सिक्कालाई दुई पटक उफार्दा तिनीहरूमा आउने घटनाको सूची बनाउनुहोस् ।

जस्तै: एउटा सिक्कालाई दुई पटक उफार्दा आउने नतिजालाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



कुनै पनि परीक्षणबाट आउन सक्ने नतिजालाई प्रस्तुत गरिने माथिको जस्तै चित्रलाई वृक्ष चित्र भनिन्छ । यसमा परीक्षणका प्रत्येक नतिजालाई हाँगाहरूले जनाइन्छ । यसले तिनीहरूको सम्भाव्यताको नमुना क्षेत्र र सम्भाव्यता पत्ता लगाउन सकिन्छ, जस्तै: माथिको परीक्षणमा नमुना क्षेत्र $S = \{ HH, HT, TH, TT \}$ हुन्छ ।

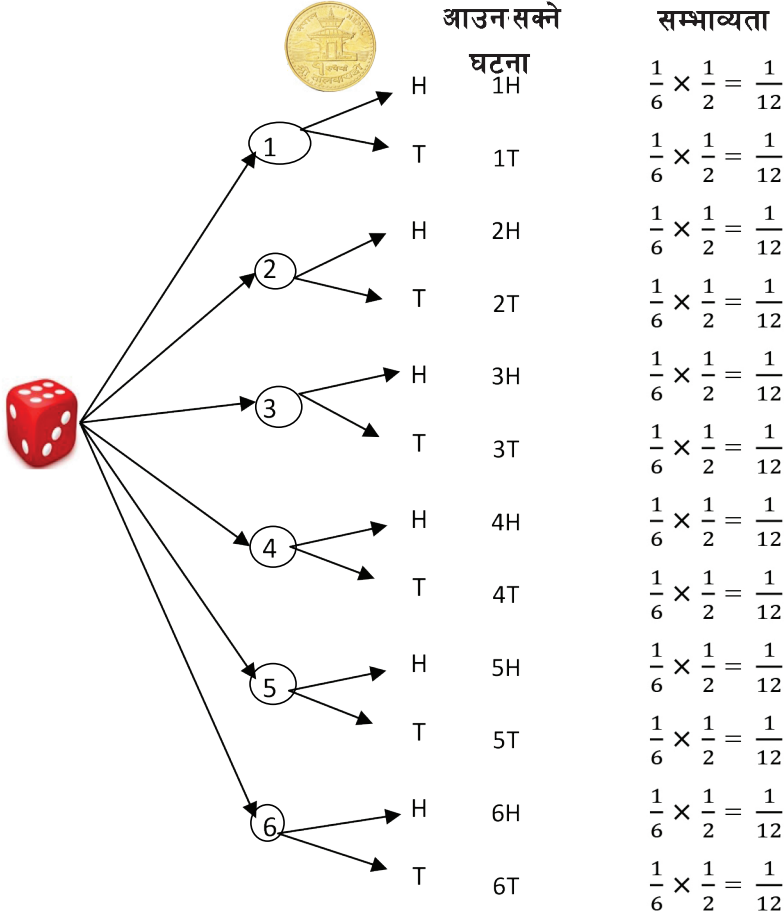
उदाहरण 1

एउटा डाइस र सिक्कालाई एकपछि अर्को गर्दै उफार्दा आउन सक्ने नतिजा र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई

जनाउने वृक्ष चित्र तयार गर्नुहोस् ।

समाधान

एउटा डाइस र सिक्कालाई एकपछि अर्को गर्दै उफार्दा आउने घटना र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्ष चित्र निम्नानुसार रहेको छ :

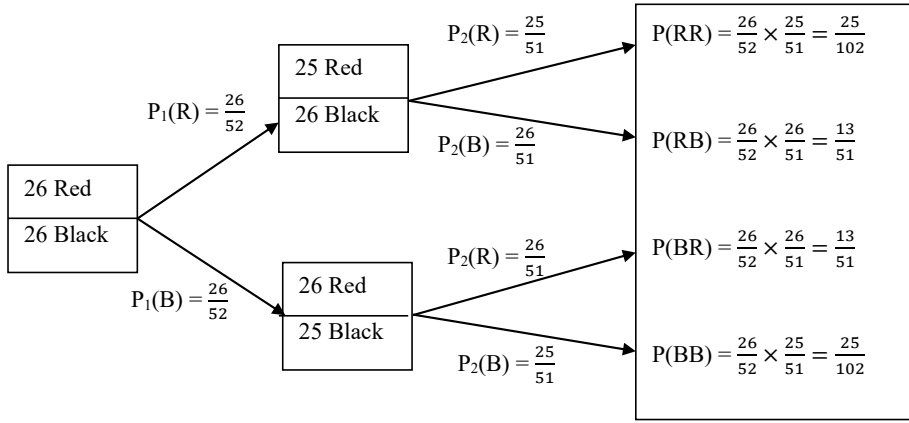


उदाहरण 2

राम्ररी फिटिएको 52 पत्ती तासको गड्डीबाट पहिलो तास निकालेर पुनः उक्त गड्डीमा नमिसाई दोस्रो तास निकाल्दा रातो वा कालो तास आउन सक्ने घटना र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्ष चित्र तयार गर्नुहोस् :

समाधान

तासको गड्डीबाट पहिलो तास निकालेर पुनः उक्त गड्डीमा नमिसाई दोस्रो तास निकाल्दा आउन सक्ने घटना र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्ष चित्रलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



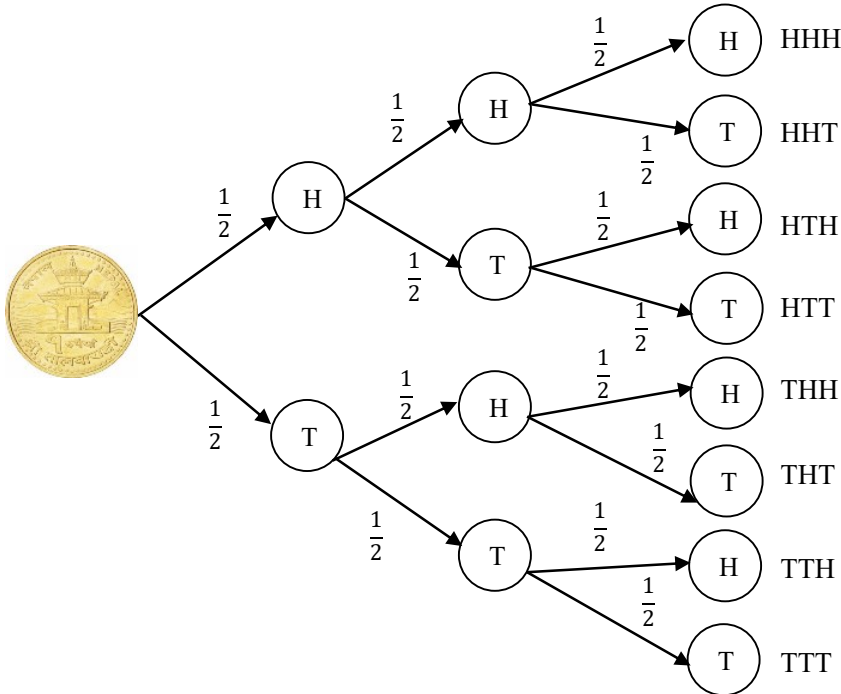
उदाहरण 3

तीनओटा सिक्कालाई एकपछि अर्को गदै क्रमशः उफार्दा,

- (क) आउन सक्ने घटना र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्ष चित्र तयार गर्नुहोस् ।
- (ख) कम्तीमा 2 ओटा अग्रभाग (H) आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

- (क) तीनओटा सिक्कालाई एकपछि अर्को गदै क्रमशः उफार्दा आउन सक्ने घटना र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्ष चित्रलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



- (ख) नमुना क्षेत्र (S) = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} ∴ n(S) = 8

कम्तीमा 2 ओटा अग्र भाग आउने (A) = {HHH, HHT, HTH, THH} $\therefore n(A) = 4$
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

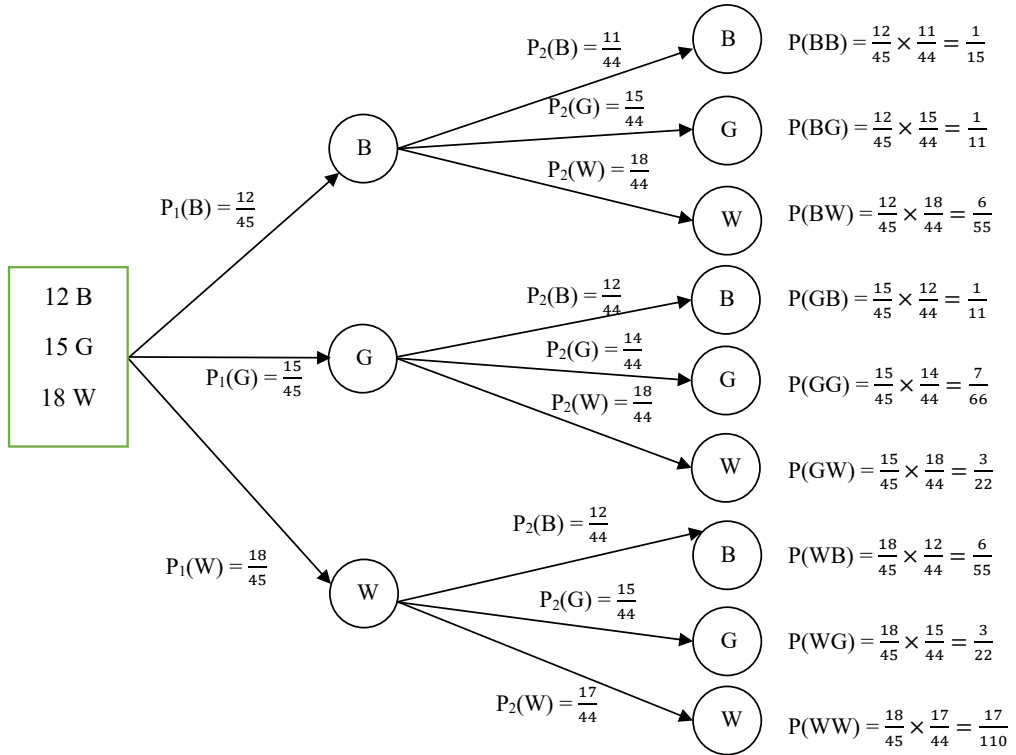
उदाहरण 4

एउटा भोलामा 12 ओटा निला, 15 ओटा हरिया र 18 ओटा सेता बराबर आकारका बल रहेका छन् । दुईओटा बल एकपछि अर्को गर्दै नहेरीकन निकाल्दा बन्ने घटनालाई वृक्ष चित्रमा देखाउनुहोस् । उक्त वृक्ष चित्रको प्रयोग गरी तलका सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :

- (क) दुवै बल निलो आउने
- (ख) पहिलो बल सेतो र दोस्रो बल हरियो आउने
- (ग) एउटा बल निलो र अर्को सेतो बल आउने

समाधान

भोलामा भएका 12 ओटा निला (B), 15 ओटा हरिया (G) र 18 ओटा सेता (W) बराबर आकारका बलबाट 2 ओटा बल एकपछि अर्को नहेरी निकाल्दा आउने घटना र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई वृक्ष चित्रमा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



अब वृक्ष चित्रको प्रयोग गर्दा,

(क) दुवै निलो बल पर्ने $P(BB) = \frac{1}{15}$

(ख) पहिलो सेतो र दोस्रो हरियो पर्ने $P(WG) = \frac{3}{22}$

(ग) एउटा निलो र अर्को सेतो पर्ने $P(BW) + P(WB) = \frac{6}{55} + \frac{6}{55} = \frac{12}{55}$

अभ्यास 14.3

- एउटा सिक्कालाई तीन पटक उफार्दा आउने सम्भावित घटनालाई वृक्ष चित्रमा देखाउनुहोस् र निम्नानुसारका सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् :
 - सबै तीनओटा पश्च भाग (T)
 - कम्तीमा दुईओटा अग्र भाग (H)
 - तीनओटा पश्च भाग (T)
- रातो, निलो र खैरो तीनओटा रङ भएको एउटा स्पिनर घुमाएर एउटा सिक्का उफार्दा आउन सक्ने सबै घटनालाई देखाउने वृक्षचित्र तयार पार्नुहोस् । वृक्ष चित्रको प्रयोग गरी तलका सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् :
 - स्पिनरको सुई रातो रङमा अडिने र सिक्कामा H आउने
 - स्पिनरको सुई खैरो रङमा अडिने र सिक्कामा T अथवा H आउने
- एउटा सिक्कालाई र एउटा डाइसलाई एकपछि अर्को गरी उफारियो । यसरी उफार्दा आउनसक्ने सबै घटनालाई वृक्ष चित्रमा देखाउनुहोस् । वृक्ष चित्रको प्रयोग गरी तलका सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :
 - सिक्कामा H र डाइसमा जोर सङ्ख्या आउने
 - सिक्कामा T र डाइसमा वर्ग सङ्ख्या आउने
- राम्ररी फिटिएको 52 पत्ती तासको गड्डीबाट एउटा तास थुन्दा (हुकुम, चिडी, इँटा र पान) मध्ये एउटा आउने र त्यसपछि सिक्कालाई उफार्दा आउने सम्भाव्य घटना जनाउने वृक्ष चित्र तयार गर्नुहोस् । उक्त वृक्ष चित्र प्रयोग गरी (क) रातो र H आउने (ख) कालो र T आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा भोलामा भएका 7 ओटा राता र 5 ओटा हरिया गुच्चाबाट नहेरीकन 3 ओटा गुच्चा एकपछि अर्को पालैपालो निकाल्दा (i) पुनः राखेर (ii) पुनः नराखीकन आउनसक्ने घटनालाई जनाउने वृक्ष चित्र तयार पार्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

52 पत्ती तासको गड्डी लिनुहोस् । त्यसपछि पालैपालो 3 ओटा तास पहिलोलाई नराखी/नहेरीकन एकपछि अर्को तास थुत्दै जानुहोस् । उक्त 3 ओटा तासमध्ये,

(क) सबै 3 ओटा हुकुम आउने

(ख) 2 ओटा मात्र हुकुम आउने

(ग) 1 ओटा मात्र हुकुम आउने

(घ) कति पनि हुकुम नआउने सम्भाव्यतालाई वृक्ष चित्रका माध्यमबाट प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. $\frac{1}{8}$ (ख) $\frac{1}{2}$ (ग) $\frac{1}{8}$ 2. (क) $\frac{1}{6}$ (ख) $\frac{1}{3}$
 3. (क) $\frac{1}{4}$ (ख) $\frac{1}{6}$ 4. क) $\frac{1}{4}$ (ख) $\frac{1}{4}$ 5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास

1. 50 जना मानिसको उचाइ (से.मि.मा) तल दिइएको छ :

| उचाइ (से.मि.मा) |
|---|
| 125, 137, 155, 149, 122, 128, 133, 144, 115, 118, 142, 145, 151, 157, 159, 160, 165, 162, 156, 158, 155, 141, 147, 149, 148, 159, 154, 155, 166, 168, 169, 172, 174, 173, 176, 161, 164, 163, 149, 150, 154, 153, 152, 164, 158, 159, 162, 157, 156, 155. |

(क) उक्त तथ्याङ्कलाई 10 को वर्गान्तर बनाई बारम्बारता तालिका तयार पार्नुहोस् ।

(ख) माथिको बारम्बारता तालिकाबाट मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) माथि (क) मा तयार पारिएको बारम्बारता तालिकालाई हिस्टोग्राममा देखाउनुहोस् ।

(घ) माथिको तथ्याङ्कको मध्यिका मान कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. तलको तालिकाले एउटा विद्यालयका विद्यार्थीको तौल (kg) मा जनाउँछ :

| तौल (Kg) |
|---|
| 18, 20, 13, 24, 35, 34, 56, 45, 33, 23, 24, 56, 33, 22, 26, 35, 39, 44, 42, 47, 46, 48, 55, 51, 44, 40, 47, 49, 34, 31, 28, 29, 35, 39, 28, 48, 51, 50, 47, 23, 19, 27, 57, 42, 33, 23, 38, 36, 45, 45, 37, 29, 27, 22, 28, 36, 35, 57, 54, 40, 50, 30, 29, |

(क) माथिको तथ्याङ्कबाट 5 वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिका तयार पार्नुहोस् ।

(ख) भन्दा सानो र भन्दा ठुलो बारम्बारता तालिका तयार पार्नुहोस् ।

(ग) बहुलक र मध्यिकाको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा समुदायमा जागिरेहरूको उमेरका बारेमा गरिएको सर्वेक्षणमा निम्नअनुसारको तथ्याङ्क प्राप्त भयो :

| | | | | | |
|---------------|------|-------|-------|-------|-------|
| उमेर (वर्षमा) | 0-15 | 15-30 | 30-45 | 45-60 | 60-75 |
| मानिस सङ्ख्या | 5 | 6 | 10 | 6 | 3 |

- (क) माथिको तालिकामा सबैभन्दा धेरै जागिरे कुन उमेर समूहका रहेछन् ?
 (ख) जागिरेहरूको औसत उमेर कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) एन्जलले औसत र मध्यिका एउटै वर्गान्तरमा पर्छ भने के यो कुरा ठिक हो ? पुष्टि गर्नुहोस् ।

4. थाहा नगरपालिकाका 40 घरधुरीले मासिक खपत गर्ने बिजुलीको विवरण निम्नानुसार रहेको छ :

| | | | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| खपत युनिट | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
| घरधुरी सङ्ख्या | 5 | 6 | 8 | 9 | 7 | 4 | 1 |

- (क) माथिको तालिकाबाट भन्दा सानो र भन्दा ठुलो सञ्चित बारम्बारता तालिका तयार पार्नुहोस् ।
 (ख) प्रश्न (क) को उत्तरका आधारमा सञ्चित बारम्बारता वक्रहरू तयार पार्नुहोस् ।
 (ग) के औसत र मध्यिका एउटै वर्गान्तरमा पर्छन् । गणना गर्नुहोस् ।

5. दिइएको तथ्याङ्कले एउटा अस्पतालमा एक हप्तामा भर्ना हुने बिरामीको सङ्ख्या जनाउँछन् :

| | | | | | | | | | |
|----------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| उमेर (वर्षमा) | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 |
| बिरामी सङ्ख्या | 4 | 5 | 8 | 13 | 12 | 8 | 4 | 9 | 7 |

- (क) माथिको तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) माथिको तथ्याङ्कको कुन मानले बिरामीको सङ्ख्यालाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर्छ होला ?
 (ग) निरुताले बहुलक र मध्यिका एउटै वर्गान्तरमा पर्छ भन्नुभयो के उहाँ ठिक हुनुहुन्छ ? पुष्टि गर्नुहोस् ।

6. दिइएको तथ्याङ्कले लाम्पाटनका केही परिवारको मासिक खर्च (हजारमा) जनाउँछ भने,

| | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| खर्च (रु. 000) | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| परिवार सङ्ख्या | 3 | 2 | 6 | 5 | 4 |

- (क) माथिको तथ्याङ्कबाट बहुलक पर्ने वर्गान्तर लेख्नुहोस् ।
 (ख) माथिको तथ्याङ्कबाट सबैभन्दा धेरै परिवारले गर्ने खर्च कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) माथिको तथ्याङ्कबाट पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. कक्षा 10 को दोस्रो त्रैमासिक परीक्षामा 30 पूर्णाङ्कको गणित विषयको परीक्षामा विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्कलाई तलको तालिकामा दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्क हेरी सोधिएका प्रश्नको जवाफ दिनुहोस् :

| प्राप्ताङ्क | 0 - 5 | 5 - 10 | 10 - 15 | 15 - 20 | 20 - 25 | 25 - 30 |
|--------------------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|
| विद्यार्थी सङ्ख्या | 2 | 4 | 5 | 3 | 2 | 4 |

- (क) कक्षा 10 मा 20 भन्दा कम प्राप्ताङ्क ल्याउने विद्यार्थीको सङ्ख्या कति रहेछ ?
 (ख) दिइएको तालिकाको आधारमा सञ्चित बारम्बरता तालिका बनाउनुहोस् ।
 (ग) माथिको तालिकाबाट तथ्याङ्कलाई बराबर ४ भागमा बाँड्ने तथ्याङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) मध्यिकाको आधारमा मध्यिका प्राप्ताङ्कभन्दा कम अङ्क प्राप्त गर्ने अधिकतम विद्यार्थी कति जना हुन्छन् ?
8. तीनओटा सिक्कालाई एकै पटक उफार्दा,
 (क) आउने सम्भावित नमुना क्षेत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) एउटा मात्र अग्र भाग आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) कम्तीमा 2 ओटा पश्च भाग (T) आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) अग्रभाग (H) नआउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ङ) 2 ओटा H आउने अथवा H नआउने घटनाको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. राम्ररी फिटिएका 52 पत्ती तासको गड्डीबाट एउटा तास थुन्दा,
 (क) एक्का आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
 (ख) हुकुम वा इँटा पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) हुकुम वा एक्का आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) चिडी वा मुहार भएको पत्ती आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. एउटा सिक्का उफारेर र चारओटा रङ (निलो, हरियो, रातो, प्याजी) को बराबर एक एक खण्ड भएको स्पिनरलाई एकसाथ घुमाइयो :
 (क) उक्त परीक्षणलाई वृक्ष चित्रमा देखाउनुहोस् । परीक्षणको छुट्टाछुट्टै र सँगसँगैको सम्भावी नमुना क्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) सिक्काको H र स्पिनरको सुई हरियो वा निलोमा अडिने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) सिक्काम H र स्पिनरको सुई हरियोमा अडिने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
11. राम्ररी फिटिएको 52 पत्ती तासको गड्डीबाट दुईओटा तास एकपछि अर्को गर्दै तान्दा,
 (क) यदि पहिलो तास पुनः राखेर दोस्रो तास थुन्दा दुवै तास हुकुम आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) यदि पहिलो तास पुनः नराखेर दोस्रो तास तान्दा पहिलो तास हुकुम र दोस्रो तास पान आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) माथि (क) र (ख) को सम्भाव्यतालाई छुट्टाछुट्टै वृक्ष चित्रमा देखाउनुहोस् ।

12. एउटा भोलामा राखिएका 7 ओटा राता र 8 ओटा पहुँला उस्तै उत्रै बल राखिएका छन् :

- (क) दुईओटा बल पालैपालो निकाल्दा (पहिले निकालिएको बल पुनः भोलामा नराख्ने) दुवै पटक रातो बल आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) दुईओटा बल पालैपालो निकाल्दा (पहिले निकालिएको बल पुनः भोलामा राखेर) दुवै पटक रातो बल आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) रमिलाले माथिका दुवै अवस्था अनाश्रित घटना हुन भनिन् । के उनी सही छिन्, लेख्नुहोस् ।

13. एउटा भोलामा रातो, हरियो र कालो एक एकओटा उस्तै र उत्रै गुच्चा राखिएका छन् । उक्त भोलाबाट नहेरीकन एउटा गुच्चा निकाल्ने र पुनः त्यसमा नराखी अर्को गुच्चा निकाल्दा हुने,

- (क) उक्त घटनालाई वृक्ष चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- (ख) उक्त घटनाको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. एउटा सिक्कालाई र एउटा डाइसलाई एकपछि अर्को गरी उफारियो :

- (क) यसरी उफार्दा आउनसक्ने सबै घटनालाई वृक्ष चित्रमा देखाउनुहोस् ।
- (ख) वृक्ष चित्रको प्रयोग गरी तलका सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (अ) सिक्कामा H र डाइसमा जोर सङ्ख्या आउने
 - (आ) सिक्कामा T र डाइसमा वर्ग सङ्ख्या आउने
- (ग) माथि (ख) का घटना अनाश्रित हुन् त ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

15. राम्ररी फिटिएका 52 पत्ती तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा (हुकुम, चिडी, ईँटा र पान) मध्ये एउटा आउने र त्यसपछि सिक्कालाई उफारिएको छ ।

- (क) आउन सक्ने सबै सम्भाव्य घटना जनाउने वृक्ष चित्र तयार गर्नुहोस् ।
- (ख) उक्त वृक्ष चित्रका आधारमा परीक्षणका नमुना क्षेत्र लेख्नुहोस् ।
- (ग) उक्त वृक्ष चित्र प्रयोग गरी
 - (अ) रातो र H आउने (आ) कालो र T आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (घ) विकासले तास र सिक्काबाट आउने घटना आपसमा पराश्रित हुने कुरा बताए के विकासको भनाइ ठिक हो, कारण सहित लेख्नुहोस् ।

16. एउटा भोलामा भएका 7 ओटा राता र 5 ओटा हरिया गुच्चाबाट नहेरीकन 3 ओटा गुच्चा एकपछि अर्को पालैपालो [(क) पुनः राखेर, (ख) पुनः नराखीकन] निकाल्दा निम्नलिखित अवस्थामा आउन सक्ने घटनालाई जनाउने वृक्ष चित्र तयार पार्नुहोस्,

- (क) वृक्ष चित्रका आधारमा दुवै गुच्चा रातो पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (ख) दुवै गुच्चा हरियो पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- (ग) के पहिलो रातो र दोस्रो हरियो पर्ने सम्भाव्यता तथा पहिलो हरियो र दोस्रो रातो पर्ने सम्भाव्यता बराबर हुन्छन् ? (पहिलो भिकेको बल नराखी दोस्रो भिकेने)

17. 1 देखि 20 सम्म लेखिएका सङ्ख्या पत्तीबाट एउटा पत्ती नहेरीकन थुत्दा,

- (क) 3 ले भाग जाने र 5 ले भाग जाने सङ्ख्या पत्तीहरूको सूची बनाउनुहोस् ?
(ख) 3 ले मात्र भाग जाने सङ्ख्या पत्ती वा 5 ले मात्र भाग जाने सङ्ख्या पत्ती पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
(ग) कोपिलाले भनिन् “प्रश्न (क) को घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटना होइन ।” के कोपिलाको भनाइ ठिक छ ? कारणसहित प्रस्ट पार्नुहोस् ।
(घ) 3 ले भाग जाने अथवा 5 ले भाग जाने सङ्ख्या पत्ती पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

18. एउटा भोलामा 5 राता र 3 निला बल छन् । एउटा बल नहेरीकन निकालिएको छ र पुनः प्रतिस्थापन गरिएको छ । त्यसपछि अर्को बल निकालिन्छ भने,

- (क) दुवै बल निलो आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) तीमध्ये कुनै पनि बल निलो नआउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) माथिको दुवै सम्भाव्यतालाई वृक्ष चित्रमा देखाउनुहोस् ।

उत्तर

1 देखि 7 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8. (क) {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

(ख) $\frac{3}{8}$ (ग) $\frac{1}{2}$ (घ) $\frac{1}{8}$ (ङ) $\frac{1}{2}$

9. (क) $\frac{1}{13}$ (ख) $\frac{1}{2}$ (ग) $\frac{4}{13}$ (घ) $\frac{11}{26}$

10. (ख) $\frac{1}{4}$ (ग) $\frac{1}{8}$ 11. (क) $\frac{1}{16}$ (ख) $\frac{13}{204}$ (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

12. (क) $\frac{1}{5}$ (ख) $\frac{49}{225}$ (ग) छैनन्

13. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

14. (ख) अ) $\frac{1}{4}$ आ) $\frac{1}{6}$ (ग) हुन्

15 र 16 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

17. (क) $M_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $M_5 = \{5, 10, 15, 20\}$ (ख) $\frac{2}{5}$

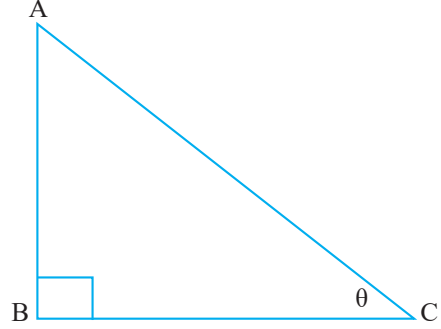
(ग) ठीक छ (घ) $\frac{9}{20}$

18. (क) $\frac{9}{64}$ (ख) $\frac{25}{64}$

त्रिकोणमिति (Trigonometry)

15.0 पुनरवलोकन (Review)

समकोणी त्रिभुज ABC दिइएको छ । यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :



- समकोणी त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल कति हुन्छ ?
- त्रिकोणमितीय अनुपातहरू $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ को अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।
- समकोणी त्रिभुज ABC मा भुजाहरूको सम्बन्ध के हुन्छ ? यस सम्बन्धलाई के भनिन्छ ?
- यदि $AB = 6$ से.मि. र $AC = 10$ से.मि. भए त्रिकोणमितीय अनुपातहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
- $\theta = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 60^\circ$ र $\theta = 90^\circ$ भएको अवस्थामा $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ का मानहरू के के होलान् ?

| कोणहरू अनुपातहरू | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ∞ |

15.1 उन्नतांश कोण र अवनति कोण (Angle of Elevation and Angle of Depression)

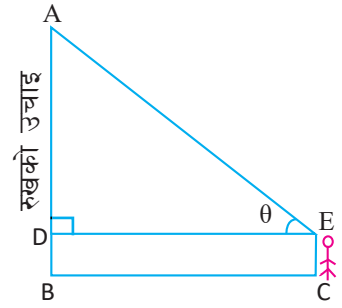
क्रियाकलाप 1

रामनरेशले विद्यालयको चउरमा रुखतिर हेरी केही कुराहरू मनमा सोचिरहेको जस्तो देखिन्छ । यतिकैमा उनका गणित शिक्षक आइपुग्नुहुन्छ ।



शिक्षक : रामनरेश तिमिलीलाई के भयो ? किन एकोहोरो रुखतिर हेरिरहेको ?

रामनरेश : सर नमस्कार । सर यो रुख कति अग्लो होला ? रुख र म उभिएको ठाउँबिचको दुरी कति होला ? विद्यालयमा भएको भन्डाको उचाइ कति होला ? यी सबै कुरा कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ होला भनेर सोचिरहेको सर ।

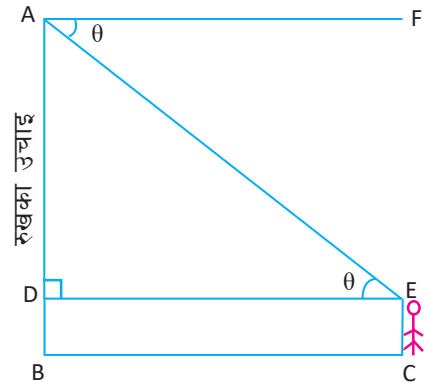


शिक्षक : पख पख रामनरेश । एकै पटक कति धेरै प्रश्न सोध्नु भएको । अब कक्षा कोठामा गएर एउटा एउटा प्रश्नको चित्र बनाएर साथीसँग पनि छलफल गरौं ल ! (दुवै जना कक्षाकोठामा जान्छन् ।)

शिक्षक : रामनरेश तपाईंले सोध्नु भएको पहिलो प्रश्न चउरको रुख कति अग्लो होला ? भन्ने हो है । यसलाई शैक्षणिक पाटीमा चित्रमा देखाएको छु । हामीले रुखका टुप्पामा हेर्दा बन्ने कोणलाई θ मानौं । चित्रमा $BD = CE$ छ । अब AD को मान पत्ता लगाउन सक्यौ भने रुखका उचाइ त पत्ता लगाउन सकिहाल्छौं नि । समकोण त्रिभुज ADE बन्थो । कक्षा 9 मा त्रिकोणमितीय अनुपात निकालेको सम्झनु त ।

ओमकुमारी : सर हाम्रो आँखाले रुखका टुप्पामा हेर्दा बनेको कोणलाई के भनिन्छ ? यो कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

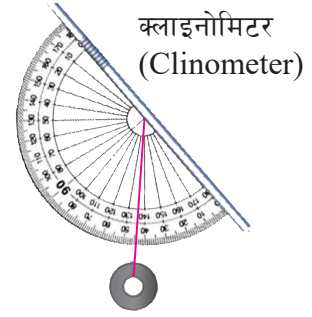
शिक्षक : ओमकुमारी, सबैभन्दा पहिला त हाम्रो आँखाले रुखको टुप्पोमा हेर्दा जमिनसँग समानान्तर हुने गरी हाम्रो आँखाको उचाइबाट एउटा काल्पनिक रेखा कोर्नु पर्छ (चित्रमा DE) । हो त्यही रेखासँग हाम्रो दृष्टिरेखाले (चित्रमा EA) बनाएको कोण नै हामीले रुखको टुप्पोमा हेर्दा बनेको कोण हो । यसलाई उन्नतांश कोण भनिन्छ । चित्रमा $\angle AED$ उन्नतांश कोण हो ।



रामनरेश : सर रुखको टुप्पो (चित्रमा बिन्दु A) बाट बिन्दु E मा हेर्दा पनि त कोण त बराबर हुन्छ, होइन र ? यसलाई के भनिन्छ ?

शिक्षक : रामनरेश हो तपाईंले भन्नु भएको ठिक हो । यसमा पनि हामीले सबैभन्दा पहिलो रुखको टुप्पोबाट जमिनसँग समानान्तर हुने गरी रुखको टुप्पोका उचाइमा एउटा काल्पनिक रेखा कोर्नु पर्छ (चित्रमा AF) । हो त्यही रेखासँग हाम्रो दृष्टिरेखाले (चित्रमा AE) बनाएको कोण नै हामीले रुखको टुप्पोबाट हेर्दा बनेको कोण हो । यसलाई अवनति कोण भनिन्छ । यो चित्रमा $\angle FAE$ अवनति कोण हो । अब तलका कथनहरूमा कुन अवस्थामा उन्नतांश कोण र कुन अवस्थामा अवनति कोण बन्छ छलफल गर्नुहोस् ।

- (क) जमिनबाट घरको छतमा हेर्दा
- (ख) जमिनबाट रुखको टुप्पोमा हेर्दा
- (ग) जमिनबाट टावरको टुप्पोमा हेर्दा
- (घ) घरको छतबाट जमिनमा गुडिरहेको गाडी हेर्दा
- (ङ) धरहराबाट भुइँमा हेर्दा
- (च) विद्यालय भवनको छतबाट चउरमा हेर्दा आदि ।



कुनै स्थानबाट अग्लो स्थानमा रहेको वस्तुलाई तलबाट हेर्दा दृष्टिरेखाले जमिनसँग समानान्तर हुने रेखासँग बनाएको कोणलाई उन्नतांश कोण (Angle of Elevation) भनिन्छ । दिइएको चित्रमा $\angle AED$ उन्नतांश कोण हो । कुनै अग्लो स्थानबाट होचो भागमा रहेको कुनै वस्तुलाई हेर्दा दृष्टिरेखाले क्षितिज रेखासँग बनाएको कोणलाई अवनति कोण (Angle of depression) भनिन्छ । चित्रमा $\angle FAE$ अवनति कोण हो । यी कोणहरू नाप्ने यन्त्रलाई क्लाइनोमिटर (Clinometer) भनिन्छ ।

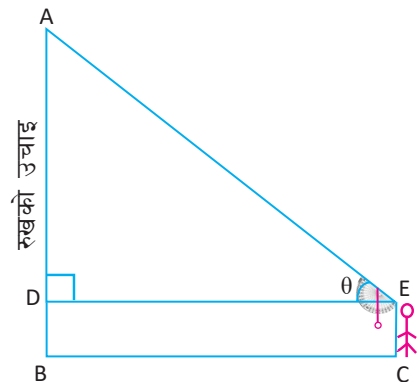
- रामनरेश : सर हामीले रुखका टुप्पामा हेर्दा बन्ने उन्नतांश कोण र रुखको बिच भागतिर हेर्दा बन्ने उन्नतांश कोण कुन ठुलो हुन्छ ?
- शिक्षक : तपाईंले नै हेरेर पत्ता लगाउनु है । तपाईंले रुखको बिचमा वा टुप्पोमा हेर्दा आँखाको तन्काइ कस्तो रहन्छ ?
- रामनरेश : सर रुखकोबिच भागतिर हेर्दाभन्दा टुप्पोमा हेर्दा आँखाको तन्काइ ठुलो भयो । रुखको टुप्पोमा हेर्दा बन्ने उन्नतांश कोण रुखको बिच भागतिर हेर्दा बन्ने उन्नतांश कोणभन्दा ठुलो हुन्छ जस्तो लाग्यो ।
- शिक्षक : तपाईंले ठिक भन्नुभयो । रुखको टुप्पोमा हेर्दा बन्ने उन्नतांश कोण रुखको बिच भागतिर हेर्दा बन्ने उन्नतांश कोणभन्दा ठुलो हुन्छ । त्यस्तै रुखको टुप्पोबाट हेर्दा बन्ने अवनति कोणमा पनि टाढा हेर्दाभन्दा नजिक हेर्दा कोण ठुलो बन्छ । ल आजलाई यति नै गरौं । अरू भोलि गरौंला है ।

क्रियाकलाप 2

(भोलिपल्ट कक्षामा)

ओमकुमारी : सर हिजो हामीले रुखको उचाइ पत्ता लगाउने कुरा गर्दै थियौं । चउरमा रुखको उचाइ कसरी पत्ता लगाउने होला ?

शिक्षक : समकोण त्रिभुज ADE मा, यदि $\angle AED$ को मान र हामीबाट रुखसम्मको दुरी ED थाहा



भयो भने त निकाल्न सकिहाल्छौं नि । अब क्लाइनोमिटरले रुखको टुप्पोमा हेरौं त । रुखको टुप्पोको उन्नतांश कोण 45° पाइयो । तपाईंको आँखासम्मको उचाइ $CE = 1.6$ m, उन्नतांश कोण $\angle AED = 45^\circ$ र तपाईंबाट रुखको फेदसम्मको दुरी $BC = DE = 30$ m भए,

समकोण त्रिभुज ADE बाट

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{30}$$

$$\text{अथवा, } 1 = \frac{AD}{30}$$

तसर्थ $AD = 30$ m

त्यसैले रुखका पूरा उचाइ $= 30 + 1.60 = 31.60$ m रहेछ ।

उदाहरण 1

1.80 m अग्लो मानिसले 20 m पर रहेको रुखका टुप्पामा अवलोकन गर्दा 45° को उन्नतांश कोण बनेको छ भने रुखका उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ मानिसको दृष्टिरेखाले जमिनसँग समानान्तर हुने गरी रुखका टुप्पामा अवलोकन गर्दा 45° को कोण बनेको छ ।

चित्रमा,

रुखको पूरा उचाइ $(x + 1.80)$ m छ भने मानिसको उचाइ 1.80 m छ ।

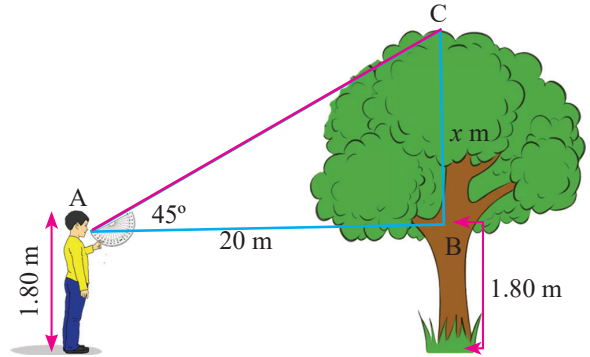
अब समकोणी त्रिभुज ABC बाट

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{20}$$

$$\text{अथवा, } 1 = \frac{x}{20}$$

तसर्थ $x = 20$

त्यसैले रुखको पूरा उचाइ $= 20 + 1.80 = 21.80$ m रहेछ ।



उदाहरण 2

एक जना मानिसले 140 m अग्लो टावरको टुप्पोलाई त्यसको फेदबाट x m पर गएर अवलोकन गर्छ ।
दृष्टिरेखाले उन्नतांश कोण 60° पाउँछ भने x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ टावरको उचाइ (AC) = 140 m

मानिस र टावरबिचको दुरी (BC) = x m (मानौं)

समकोण त्रिभुज ACB मा, $\tan 60^\circ = \frac{AC}{BC}$

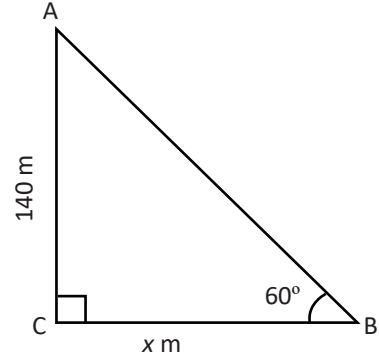
$$\text{अथवा, } \sqrt{3} = \frac{140}{x}$$

$$\text{अथवा, } x\sqrt{3} = 140$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{140}{1.732}$$

$$\therefore BC = 80.83 \text{ m}$$

तसर्थ मानिस र टावरबिचको दुरी (x) = 80.83 m रहेछ ।



उदाहरण 3

एउटा 18 m अग्लो रुख हावाले भाँचिएर नछुटिएको अवस्थामा टुप्पाले जमिनमा छुँदा जमिनसँग 30° को कोण बनेको छ । उक्त रुखका भाँचिएको भागको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ रुखको सुरुको उचाइ (AB) = 18 m

भाँचिएको रुखको भाग (AD) = CD = x m

बाँकी रहेको रुखका भाग (BD) = $(18 - x)$ m

अब,

समकोण त्रिभुज CBD मा,

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{CD}$$

$$\text{अथवा, } \frac{1}{2} = \frac{18-x}{x}$$

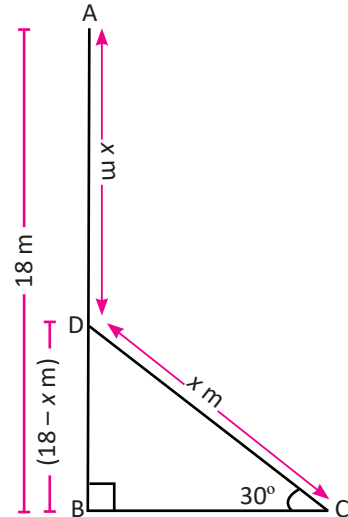
$$\text{अथवा, } x = 36 - 2x$$

$$\text{अथवा, } x + 2x = 36$$

$$\text{अथवा, } 3x = 36$$

$$\text{अथवा, } x = 12 \text{ m}$$

तसर्थ उक्त रुखको भाँचिएको भागको लम्बाइ 12 m रहेछ ।



उदाहरण 4

एउटा स्तम्भ र घरबिचको दुरी स्तम्भको उचाइको एक तिहाइ छ । यदि स्तम्भको उचाइ 60 m र स्तम्भको टुप्पोबाट घरको छत हेर्दा अवनति कोण 45° भए घरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ स्तम्भको उचाइ (AB) = 60 m

घरको उचाइ (DE) = BC

स्तम्भ र घरबिचको दुरी (BC) = CD = $60 \times \frac{1}{3} = 20$ m

अब,

समकोण त्रिभुज ACD मा

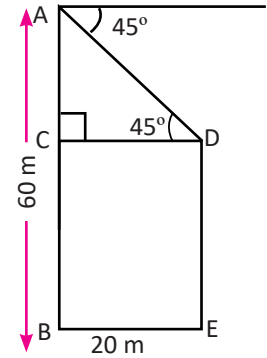
$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{CD}$$

$$\text{अथवा, } 1 = \frac{AC}{20}$$

$$\text{अथवा, } AC = 20 \text{ m}$$

फेरि $DE = AB - AC = 60 - 20 = 40$ m.

तसर्थ उक्त घरको उचाइ 40 m रहेछ ।



उदाहरण 5

एक जना 1.2 m अग्लो मानिसले आफू अगाडि रहेको टावरको टुप्पोमा अवलोकन गर्छ र उन्नतांश कोण 60° पाउँछ । यदि टावरको उचाइ 53.2 m छ भने टावर र मानिसबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ टावरको उचाइ (AB) = 53.2 m

मानिसको उचाइ (DE) = BC = 1.2 m

टावर र मानिसबिचको दुरी (CD) = BE

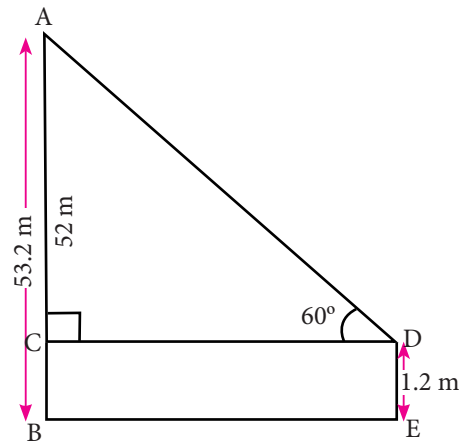
अब,

समकोण त्रिभुज ACD मा

$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{CD}$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{3} = \frac{AB - BC}{CD}$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{3} = \frac{53.2 - 1.2}{CD}$$



$$\text{अथवा, } \sqrt{3} = \frac{52}{CD}$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{3} \times CD = 52$$

$$\text{अथवा, } CD = \frac{52}{\sqrt{3}}$$

$$\text{अथवा, } CD = \frac{52}{1.732}$$

$$\text{अथवा, } CD = 30.02 \text{ m}$$

तसर्थ टावर र मानिसबिचको दुरी 30.02 m रहेछ ।

उदाहरण 6

वृत्ताकार पोखरीको व्यास 100 m छ । उक्त पोखरीको ठिकबिचमा पानीको सतहभन्दा माथि 50 m देखिने गरी खम्बा गाडिएको छ । एक जना मानिसले पोखरीको किनाराबाट खम्बाको टुप्पामा हेर्दा कति डिग्रीको उन्नतांश कोण बन्ला पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ वृत्ताकार पोखरीको व्यास (BD) = 100 m

त्यसैले वृत्ताकार पोखरीको अर्धव्यास (OB) = 50 m हुन्छ ।

खम्बाको पानी माथिको भागको लम्बाइ (AO) = 50 m हुन्छ ।

यहाँ पोखरीको किनारा B बाट खम्बाको टुप्पा A मा हेर्दा उन्नतांश कोण $\angle OBA = \theta$ (मानौं) बनेको छ ।

अब,

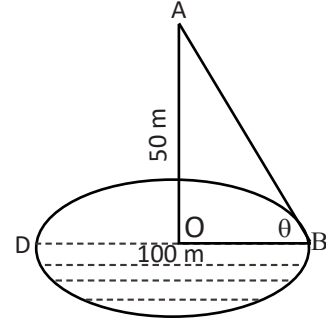
समकोण त्रिभुज AOB मा

$$\tan\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{50}{50} = 1$$

$$\text{अथवा, } \tan\theta = \tan 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

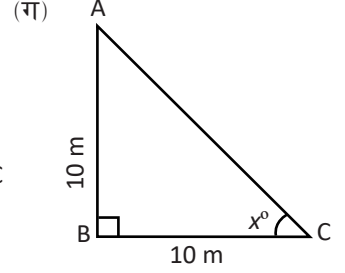
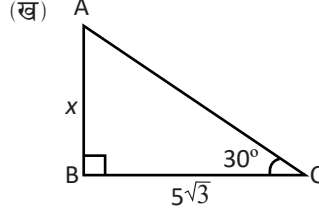
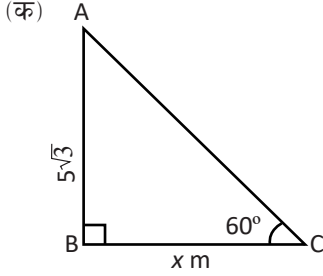
तसर्थ पोखरीको किनारा B बाट खम्बाको टुप्पो A मा हेर्दा 45° को उन्नतांश कोण बनेको छ ।



अभ्यास 15

1. (क) उन्नतांश कोण र अवनति कोणलाई उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् ।
 (ख) समकोण त्रिभुजमा लम्ब र आधारको सम्बन्ध कुन त्रिकोणमितीय अनुपातसँग हुन्छ ?
 (ग) समकोण त्रिभुजमा लम्ब र कर्णको सम्बन्ध कुन त्रिकोणमितीय अनुपातसँग हुन्छ ?

2. दिइएका समकोण त्रिभुजबाट x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



3. (क) एक जना मानिसले 60 m अग्लो टावरको टुप्पालाई त्यसको फेदबाट x m पर गएर अवलोकन गर्छ । दृष्टिरेखाले क्षितिज रेखासँग उन्नतांश कोण 30° बनेको पाउँछ भने x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) एक जना मानिसले 12 m अग्लो टावरको टुप्पालाई त्यसको फेदबाट 12 m पर गएर अवलोकन गर्छ । दृष्टिरेखाले क्षितिज रेखासँग उन्नतांश कोण x° बनेको पाउँछ भने x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) एक जना मानिसले x m अग्लो टावरको टुप्पालाई त्यसको फेदबाट 12 m पर गएर अवलोकन गर्छ । दृष्टिरेखाले क्षितिज रेखासँग उन्नतांश कोण 45° बनेको पाउँछ भने x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. (क) हुरी बतास लागेको वेलामा एउटा 14 m अग्लो रुख हावाले भाँचिएर नछुटिएको अवस्थामा त्यसको टुप्पोले जमिनमा छुँदा जमिनसँग 60° को कोण बनेको छ । उक्त रुखको भाँचिएको भागको लम्बाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) एउटा रुखबिचबाट हावाले भाँचिएर नछुटिएको अवस्थामा टुप्पोले जमिनमा छुँदा जमिनसँग 60° को कोण बनेको छ । यदि उक्त रुखको भाँचिएको भागको लम्बाइ 7.5 m भए नभाँचिदैंको अवस्थामा रुखको उचाइ कति थियो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) हुरी बतासका कारणले एउटा रुखबिचबाट भाँचिएर नछुटिएको अवस्थामा टुप्पाले जमिनमा छुँदा जमिनसँग 30° को कोण बनेको छ । उक्त रुखका भाँचिएको भागको लम्बाइ 30 m छ ।
 (अ) नभाँचिदैंको अवस्थामा रुखको वास्तविक उचाइ कति थियो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (आ) भाँचिएपछि उक्त रुखका टुप्पो फेदबाट कति टाढासम्म पुगेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. क) एक जना 1.7 m अग्लो मानिसले आफूअगाडि रहेको टावरको टुप्पोमा अवलोकन गर्छ, र उन्नतांश कोण 60° पाउँछ । यदि टावर र मानिसबिचको दुरी 30 m छ भने टावरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ख) एक जना 1.4 m अग्लो मानिसले 33.6 m अग्लो घरको छतबाट चङ्गा उडाइरहेको छ । यदि चङ्गाको धागाको लम्बाइ $90\sqrt{2}$ m छ र यसले क्षितिजसँग 45° को कोण बनाउँछ भने जमिनदेखि चङ्गासम्मको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) 1.5 m अग्लो मानिस 51.5 m अग्लो रुखको ठिक अगाडि उभिएर रुखको टुप्पोमा हेर्दा 45° को कोण बनाउँछ भने रुख र मानिसबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. (क) एउटा स्तम्भ र मानिसबिचको दुरी 20 m र स्तम्भको उचाइ 36.5 m छ । यदि मानिसको आँखाबाट स्तम्भको टुप्पामा हेर्दा उन्नतांश कोण 60° बन्छ भने मानिसको आँखासम्मको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) 30 फिट अग्लो एउटा एउटा घरको छतबाट नजिकै रहेको रुखको टुप्पो हेर्दा अवनति कोण 30° पाइयो । यदि घर र रुखबिचको दुरी $10\sqrt{3}$ फिट भए सो रुखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) एउटा स्तम्भको उचाइ 60 m तथा स्तम्भ र घरबिचको दुरी 35 m छ । यदि एक जना मानिसले स्तम्भको टुप्पाबाट घरको छतमा अवलोकन गर्दा अवनति कोण 45° पाउँछ भने घरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. (क) एउटा वृताकार पोखरीको व्यास 90 m छ । उक्त पोखरीको ठिकबिचमा पानीको सतहभन्दा माथि 45 m देखिने गरी खम्बा गाडिएको छ । एक जना मानिसले पोखरीको किनाराबाट खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा कति डिग्रीको उन्नतांश कोण बन्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) एउटा वृताकार पोखरीको व्यास 130 m छ । उक्त पोखरीको ठिकबिचमा एउटा खम्बा गाडिएको छ । एक जना मानिसले पोखरीको किनाराबाट खम्बाको टुप्पामा हेर्दा 45° को उन्नतांश कोण बन्छ भने खम्बाको पानी माथिको उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) एउटा वृताकार पोखरीको केन्द्रमा पानीको सतहभन्दा माथि 11.62 m अग्लो खम्बा छ । उक्त पोखरीको किनाराबाट 1.62 m अग्लो मानिसले खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 60° पाउँछ भने सो पोखरीको व्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. (क) चाडपर्वको वेलामा रमेशले उडाएको चङ्गाको धागाले जमिनसँग 30° को कोण बनाउँछ । यदि धागोको लम्बाइ 120 m र रमेशको उचाइ 1.5 m भए जमिनबाट चङ्गा कति उचाइमा पुग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) 1.5 m अग्लो रामशरणले 9 m अग्लो घरको छतबाट चङ्गा उडाइरहेको छ । चङ्गाको धागोले जमिनसँग 30° को कोण बनाउँछ । यदि चङ्गा जमिनदेखि 58 m उचाइमा पुगेको भए चङ्गाको धागोको वास्तविक लम्बाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) 2 m अग्लो मानिसले 32 m अग्लो घरको छतबाट चङ्गा उडाइरहेको छ । चङ्गाको धागाले जमिनसँग 45° को कोण बनाउँछ । यदि चङ्गाको धागाको वास्तविक लम्बाइ $66\sqrt{2}$ m भए चङ्गा जमिनको सतहदेखि कति उचाइमा पुगेको हुन सक्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. दिउँसो 2 बजे 20 m अग्लो खम्बाको छायाको लम्बाइ $20\sqrt{3}$ m हुँदा कति डिग्रीको कोण बन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् । सो कोणको प्रयोग गरी $25\sqrt{3}$ m अग्लो स्तम्भको छायाको लम्बाइ पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. एउटा विद्यालयको चउरको छेउमा रहेको रुखका वास्तविक लम्बाइ 25 m छ । उक्त समतल चउरकै अर्को छेउमा बसेको मानिसको उचाइ 1.2 m छ । मानिस र रुखबिचको दुरी 23.8 m छ ।

(क) उक्त मानिसले रुखको टुप्पोमा हेर्दा कति डिग्रीको उन्नतांश कोण बन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) के रुखको उचाइ बढ्दा मानिसले हेर्दा बन्ने उन्नतांश कोण पनि बढ्छ त ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(ग) मानिस र रुखबिचको दुरी कम गर्दा उन्नतांश कोण बढ्छ कि घट्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

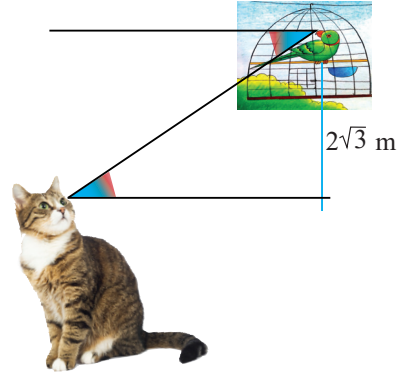
11. चित्रमा देखाइएको बिरालोले खम्बादेखि केही परबाट $2\sqrt{3}$ m उचाइमा रहेको पिँजडामा राखेको सुगा हेर्दा 30° को उन्नतांश कोण बनेको छ ।

(क) सुगाले बिरालोलाई हेर्दा क्षितिज रेखासँग बन्ने कोणलाई के भनिन्छ ?

(ख) सुगाले बिरालोलाई हेर्दा क्षितिज रेखासँग कति डिग्रीको कोण बन्छ ?

(ग) खम्बा र बिरालोबिचको दुरी कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) के बिरालो खम्बातिर सधैं जाँदा सुगाले बिरालोलाई हेर्दा बन्ने कोण कम हुन्छ त ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।



12. एउटा वृत्ताकार पोखरीको परिधि 176 m छ । उक्त पोखरीको ठिकबिचमा एउटा खम्बा गाडिएको छ । एक जना 1.6 m अग्लो मानिसले पोखरीको किनाराबाट खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा 45° को उन्नतांश कोण बनेको छ ।

(क) मानिस र खम्बाबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) उक्त खम्बाको पानीको सतहभन्दा माथिको उचाइ कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) पानीको सतहभन्दा माथिको खम्बाको उचाइ कति कम भएको भए उन्नतांश कोण 30° को हुन्थ्यो, गणना गर्नुहोस् ।

13. 1.2 m अग्लो मानिसले 8.8 m अग्लो घरको छतबाट चड्गा उडाइरहेको छ । चड्गाको धागाले क्षितिज रेखासँग 30° को कोण बनाउँछ र धागोको वास्तविक लम्बाइ 180 m पुगेको छ ।

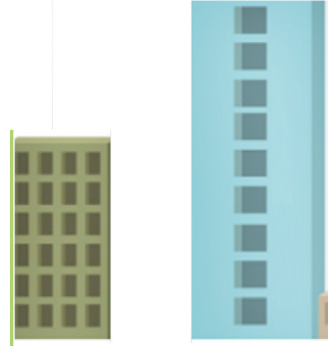
(क) माथिको सम्बन्धलाई चित्रात्मक रूपमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) चड्गा जमिनबाट कति मिटर माथि पुगेको होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) मानिस र चड्गाबिचको समानान्तर दुरी कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

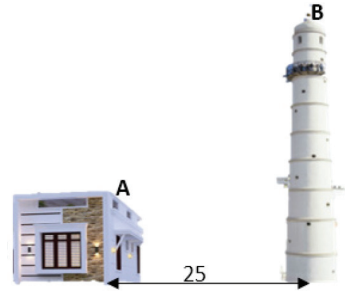
14. चित्रमा 20 m र 32 m अग्ला दुई घरहरू देखाइएको छ । अग्लो घर र होचो घरबिचको दुरी 12 m छ ।

- (क) अग्लो घरको छतबाट होचो घरको छतमा हेर्दा कस्तो कोण बन्छ, लेख्नुहोस् ।
- (ख) होचो घरको छतबाट अग्लो घरको छतको छेउको टुप्पोमा हेर्दा बन्ने कोण र अग्लो घरको छतबाट होचो घरको छतको छेउको टुप्पोमा हेर्दा बन्ने कोणको सम्बन्ध कारणसहित उल्लेख गर्नुहोस् ।
- (ग) होचो घरको छतबाट अग्लो घरको छतको छेउको टुप्पोमा हेर्दा बन्ने कोण कति डिग्रीको बन्छ, गणना गर्नुहोस् ।
- (घ) यदि होचो घरको छतबाट अग्लो घरको छतको छेउको टुप्पोमा भन्दा राख्नुपर्ने भन्ने कति मिटर अग्लो भन्दा चाहिन्छ ? गणना गर्नुहोस् ।



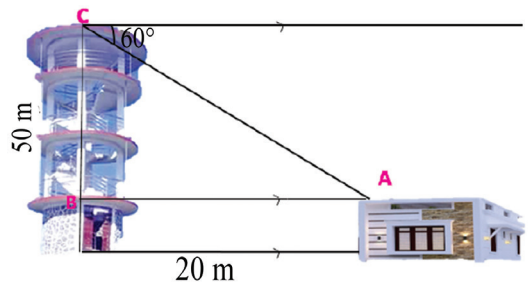
15. जमिनबाट समतल सतहमा रहेको टावर र घरबिचको दुरी 25 m छ । घरको उचाइ 15 m छ ।

- (क) घरको छतको बिन्दु A बाट टावरको टुप्पोको बिन्दु B मा हेर्दा उन्नतांश कोण 45° भए उक्त टावरको उचाइ कति हुन्छ ?
- (ख) यस चित्रमा टावरको उचाइ बढ्दै जाँदा कोणसँगको सम्बन्ध कस्तो हुन्छ, लेख्नुहोस् ।



16. चित्रमा 50 m अग्लो भ्यूटावरको टुप्पोबाट उक्त टावरको पूर्वपट्टि 20 m पर रहेको एउटा घरको छतको स्थान A मा हेर्दा 60° को कोण बनेको छ ।

- (क) घरको छतको बिन्दु A देखि भ्यूटावरको टुप्पोमा हेर्दा कति डिग्रीको कोण बन्छ ?
- (ख) टावरमा BC भागको उचाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) घरको उचाइ कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) सो भ्यूटावरको टुप्पोबाट कति तल झरेर उक्त घरको छतमा हेर्दा अवनति कोण 45° हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



परियोजना कार्य

साथीहरूको समूह निर्माण गरी आफ्नो घर वरपर कुनै अग्लो भागमा रहेका वस्तु वा होचो भागमा रहेका वस्तुको अवलोकन गरी तिनीहरूको उचाइ र दुरीका आधारमा बन्ने कोणहरू वा कोण र दुरीका आधारमा बनेको उचाइ आदिमा प्रयोगात्मक कार्य गरी साथीहरूसँगको छलफलबाट प्राप्त निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

2. (क) 5 m (ख) 5 m (ग) 45°
3. (क) $60\sqrt{3}$ m (ख) 45° (ग) 12 m
4. (क) 7.5 m (ख) 14 m (ग) 45 m , $15\sqrt{3}$ m
5. (क) 53.6 m (ख) 125 m (ग) 50 m
6. (क) 1.86 m (ख) 20 ft (ग) 25 m
7. (क) 45° (ख) 65 m (ग) 11.55 m
8. (क) 61.5 m (ख) 95 m (ग) 100 m
9. 30°, 75 m 10. (क) 45° 11. (क) 30° (ख) 6 m
12. (क) 28 m (ख) 29.6 m (ग) 11.83 m
13. (ख) 100 m (ग) $90\sqrt{3}$ m
14. (क) र (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) 45° घ) $12\sqrt{2}$ m
15. (क) 40 m (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
16. (क) 60° (ख) 34.64 m (ग) 15.36 m (घ) 14.64 m

